УДК 514.76

©2002 р. **Р.Ф. Домбровський, В.В. Ковдриш, В.І. Мироник**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

НЕЙТРАЛЬНІ ПОВЕРХНІ ПСЕВДОЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРІВ

У тривимірному точковому просторі Мінковського $\mathcal{E}_{3,2}$ індекса 2 та у чотиривимірному просторі Рашевського $\mathcal{E}_{4,2}$ будується диференціальна геометрія двовимірної нейтральної поверхні.

The differential geometry of two-dimensioned neutral surface is constructed on 3-dimensioned dot Minkovsky space $\mathcal{E}_{3,2}$ of index 2 and on 4-dimensioned Rashevsky space $\mathcal{E}_{4,2}$.

У цій замітці досліджуються занурення двовимірної нейтральної поверхні у тривимірний точковий простір Мінковського та у чотиривимірний простір Рашевського. Знайдено тензорні ознаки важливіших класів двовимірних нейтральних поверхонь у цих просторах.

1. Якщо M_3 — простір Мінковського індекса 2, $\omega^I (I, J, K, L, ... = \overline{1,3})$ — його головні форми [1], а ω^I_K — форми зв'язності Мінковського, то метричний тензор $\{g_{IK}\}$ простору Мінковського M_3 коваріантно сталий [2]. Стандартний базис лінеалу простору M_3 визначається умовами $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\delta_{ij}$, $g_{i3} = g_{3i} = (\vec{e}_i, \vec{e}_3) = 0$, $g_{33} = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$ $(i, j, l, ... = 1, 2)$. Фундаментальною групою інфінітезімальних переміщень стандартного базису лінеалу простору M_3 є тричленна група Лі з лінійно незалежними інваріантними формами $\{\omega^2_1, \omega^3_1, \omega^3_2\}$ [3, 4]. Отже, форми зв'язності Мінковського задовольняють умови

$$\omega^1_1 = \omega^2_2 = \omega^3_3 = 0,$$
$$\omega^1_2 = -\omega^2_1, \quad \omega^1_3 = \omega^3_1, \quad \omega^2_3 = \omega^3_2. \tag{1}$$

Рівняння структури інваріантних форм фундаментальної групи (цю групу звуть групою Лоренца [5]) такі:

$$d\omega^2_1 = \omega^3_1 \wedge \omega^3_2, \quad d\omega^3_1 = \omega^2_1 \wedge \omega^3_2,$$
$$d\omega^3_2 = -\omega^2_1 \wedge \omega^3_1. \tag{2}$$

Двовимірна поверхня $\mathfrak{M}_2$ простору Мінковського M_3 визначається системою зовнішніх диференціальних рівнянь

$$\omega^I = \Lambda^I_i \theta^i, \quad \mathrm{rg}\,(\Lambda^I_i) = 2,$$
$$\Lambda^I_i = \Lambda^I_i(x^1, x^2, x^3), \tag{3}$$

де x^I — локальні координати точки $x \in \mathfrak{M}_2$, а θ^i — головні форми многовиду параметрів поверхні $\mathfrak{M}_2$.

Функції $\{\Lambda^I_i\}$ утворюють фундаментальний об'єкт першого порядку поверхні $\mathfrak{M}_2$, оскільки задовольняють систему

$$d\Lambda^I_i - \Lambda^I_j \theta^j_i + \Lambda^K_i \omega^I_K = \Lambda^I_{ij} \theta^j, \tag{4}$$

де $\Lambda^I_{ij} = \Lambda^I_{ji}$ — коефіцієнти Е.Картана.

Система зовнішніх диференціальних рівнянь (4) отримується внаслідок замикання системи (3) та з використанням умов (1) і рівнянь структури (2) інваріантних форм групи Лоренца.

Теорема 1. *Функції* $a_{ij} := g_{IK} \Lambda^I_i \Lambda^K_j$ *утворюють тензор типу* $(0, 2)$*, який є метричним тензором на поверхні* $\mathfrak{M}_2$ *простору Мінковського* M_3.

Висновок теореми 1 вірний, оскільки відносно зв'язності Мінковського простору M_3 тензор g_{IK} коваріантно сталий і, використовуючи (4), маємо

$$da_{ij} - a_{lj}\theta^l_i - a_{il}\theta^l_j = a_{ijl}\theta^l.$$

Поверхня $\mathfrak{M}_2$ простору M_3 називається нейтральною, якщо у всіх її звичайних точках слід тензора a_{ij} нульовий [4].

Стандартний базис лінеалу простору M_3 назвемо адаптованим нейтральній поверхні

$\mathfrak{M}_2$, якщо вектори $\underset{x}{\vec{e}_i}$, $x \in \mathfrak{M}_2$ складають базис дотичної площини поверхні у точці x.

Теорема 2. *Для того, щоб поверхня $\mathfrak{M}_2$ внаслідок її занурення у простір Мінковського M_3 була нейтральною, необхідно і досить, щоб відносно адаптованого базису компоненти її фундаментального об'єкта першого порядку задовольняли умови*

$$(\Lambda_1^3)^2 = 1 + (\Lambda_1^1)^2 + (\Lambda_1^2)^2,$$
$$\Lambda_1^3\Lambda_2^3 = \Lambda_1^1\Lambda_2^1 + \Lambda_1^2\Lambda_2^2, \tag{5}$$
$$(\Lambda_2^3)^2 + 1 = (\Lambda_2^1)^2 + (\Lambda_2^2)^2.$$

Система (5) сумісна, оскільки, наприклад, має розв'язок:

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_1^2 = \Lambda_2^3 = \Lambda_2^1 = 0, \quad \Lambda_1^3 = \Lambda_2^2 = 1. \tag{6}$$

Оскільки векторні поля дотичних векторів

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}_i} := \Lambda_i^I \underset{x}{\vec{e}_I}$$

інваріантні на $\mathfrak{M}_2$, то розв'язку (6) системи (5) відповідає адаптований базис $\underset{x}{\vec{\Lambda}_1} = \underset{x}{\vec{e}_3}$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}_2} = \underset{x}{\vec{e}_2}$. Аналітична канонізація (6) афінного базису $\underset{x}{\vec{e}_I}$ приводить до співвідношень

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = \theta^2, \quad \omega^3 = \theta^1,$$
$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega^3 = \omega^2 \wedge \omega_2^3,$$
$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3,$$
$$d\omega_2^3 = -\omega_1^2 \wedge \omega_1^3.$$

Зв'язність Мінковського індукує на $\mathfrak{M}_2$ тангенційну зв'язність [1]. Якщо θ_i^j інваріантні форми цієї тангенційної зв'язності на $\mathfrak{M}_2$, то

$$da_{ij} - a_{lj}\theta_i^l - a_{il}\theta_j^l = 0. \tag{7}$$

На нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$ система (7) еквівалентна системі

$$\theta_1^1 = 0, \quad \theta_2^2 = 0, \quad \theta_2^1 = \theta_1^2.$$

Форми θ^i утворюють цілком інтегровну систему і тому задовольняють структурні рівняння

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i. \tag{8}$$

Система (8) на нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$ зводиться до такого вигляду

$$d\omega^2 = \omega^3 \wedge \theta_2^1, \quad d\omega^3 = \omega^2 \wedge \theta_2^1.$$

Отже,

$$\theta_2^1 = \omega_2^3 + a\omega^2 = \omega_2^3 + b\omega^3$$

і тому $\theta_2^1 = \omega_2^3$.

Формули (4) внаслідок канонізації (6) набувають вигляду

$$\omega_1^3 = \Lambda_{1j}^1\theta^j, \quad \omega_1^2 = -\Lambda_{2j}^1\theta^j,$$

$$\Lambda_{1j}^3 = 0, \quad \Lambda_{1j}^2 = 0, \quad \Lambda_{2j}^2 = 0, \quad \Lambda_{2j}^3 = 0. \tag{9}$$

Оскільки Λ_{1j}^1 і Λ_{2j}^1 — коефіцієнти Картана, то $\Lambda_{12}^1 = \Lambda_{21}^1$ і тому нейтральна поверхня $\mathfrak{M}_2$ відносно адаптованого базису визначається трьома функціями $\Lambda_{11}^1, \Lambda_{12}^1$ та Λ_{22}^1.

Замкнувши систему (4), маємо

$$d\Lambda_{ik}^I - \Lambda_{ij}^I\theta_k^j - \Lambda_{jk}^I\theta_i^j + \Lambda_{ik}^L\omega_L^I = \Lambda_{ikj}^I\theta^j,$$
$$\Lambda_{ikj}^I = \Lambda_{ijk}^I. \tag{10}$$

Наступні послідовні замикання приводять до рекурентних співвідношень

$$d\Lambda_{i_1\ldots i_s}^I - \Lambda_{ji_2\ldots i_s}^I\theta_{i_1}^j -$$
$$-\ldots - \Lambda_{i_1\ldots i_{s-1}j}^I\theta_{i_s}^j + \Lambda_{i_1\ldots i_s}^L\omega_L^I = \Lambda_{i_1\ldots i_s j}^I\theta^j,$$

де $s \geq 3$ [6, 7, 8].

Теорема 3. *Функції $\Lambda_{i_1\ldots i_s}^I$ на нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$ простору Мінковського M_3 утворюють геометричний об'єкт порядку s для кожного натурального числа s.*

За умов (8) рівняння (10) спрощуються і набувають вигляду

$$d\Lambda_{11}^1 - 2\Lambda_{12}^1\omega_2^3 = \Lambda_{11i}^1\theta^i,$$
$$d\Lambda_{12}^1 - (\Lambda_{22}^1 + \Lambda_{11}^1)\omega_2^3 = \Lambda_{12i}^1\theta^i,$$
$$d\Lambda_{22}^1 - 2\Lambda_{12}^1\omega_2^3 = \Lambda_{22i}^1\theta^i, \tag{11}$$
$$\Lambda_{1ij}^2 = -\Lambda_{1i}^1\Lambda_{2j}^1, \quad \Lambda_{1ij}^3 = \Lambda_{1i}^1\Lambda_{1j}^1,$$
$$\Lambda_{2ij}^2 = -\Lambda_{2i}^1\Lambda_{2j}^1, \quad \Lambda_{2ij}^3 = \Lambda_{2i}^1\Lambda_{1j}^1.$$

Використовуючи диференціальні рівняння системи (11), маємо

$$d(\Lambda_{11}^1 - \Lambda_{22}^1) = (\Lambda_{11i}^1 - \Lambda_{22i}^1)\theta^i.$$

Отже, функція $A := \Lambda^1_{11} - \Lambda^1_{22}$ на нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$ у просторі Мінковського M_3 є абсолютним інваріантом (тензором типу (0,0)).

Розглянемо клас нейтральних поверхонь $\mathfrak{M}_2$ у M_3 з нульовим інваріантом A. Поверхні $\mathfrak{M}_2$ цього класу позначатимемо через $\mathfrak{M}_2(A=0)$. Очевидно, що клас нейтральних поверхонь $\mathfrak{M}_2(A=0)$ інваріантний відносно лоренцових ізометрій простору Мінковського M_3. На нейтральних поверхнях класу $\mathfrak{M}_2(A=0)$

$$\begin{aligned} &d\Lambda^1_{11} - 2\Lambda^1_{12}\omega^3_2 = \Lambda^1_{11i}\theta^i,\\ &d\Lambda^1_{12} - 2\Lambda^1_{11}\omega^3_2 = \Lambda^1_{12i}\theta^i, \qquad (12)\\ &\Lambda^1_{11} = \Lambda^1_{22}, \quad \Lambda^1_{11i} = \Lambda^1_{22i}. \end{aligned}$$

Якщо згорнути першу рівність системи (12) з Λ^1_{11}, а другу — з Λ^1_{12}, то отримаємо

$$d((\Lambda^1_{11})^2 - (\Lambda^1_{12})^2) = 2(\Lambda^1_{11}\Lambda^1_{11i} - \Lambda^1_{12}\Lambda^1_{12i})\theta^i.$$

Теорема 4. *Функція*

$$B := (\Lambda^1_{11})^2 - (\Lambda^1_{12})^2$$

є абсолютним інваріантом на кожній нейтральній поверхні класу $\mathfrak{M}_2(A=0)$ тривимірного простору Мінковського.

До нейтральних поверхонь класу $\mathfrak{M}_2(A=0)$ відносяться також поверхні, у яких $\Lambda^1_{11} = 0$, $\Lambda^1_{22} = 0$. За цих умов функція Λ^1_{12} стає абсолютним інваріантом.

Теорема 5. *Нейтральна поверхня з нульовими компонентами $\Lambda^1_{11}, \Lambda^1_{12}, \Lambda^1_{22}$ фундаментального об'єкта другого порядку у тривимірному просторі Мінковського є двовимірною площиною Мінковського.*

Висновок. Функції Λ^1_{11} та Λ^1_{12} на нейтральних поверхнях класу $\mathfrak{M}_2(A=0)$ у просторі Мінковського M_3 є аналогами повної Гауссової та середньої кривин поверхонь евклідового простору [5]. В термінах компонент фундаментальних об'єктів можна будувати диференціальну геометрію інших класів нейтральних поверхонь: сфер, торсів, мінімальних поверхонь, гелікоїдів і т.п.

Нейтральні поверхні класу $\mathfrak{M}_2(A=0)$ у просторі Мінковського, на яких $\Lambda^1_{11} = \Lambda^1_{12} \neq 0$, характеризуються нульовим абсолютним інваріантом B. Нейтральні поверхні класу $\mathfrak{M}_2(A=0)$, на яких $\Lambda^1_{11} = -\Lambda^1_{12} \neq 0$, теж характеризуються нульовим абсолютним інваріантом B. Назвемо цей клас нейтральних поверхонь торсами. На нейтральних торсах функція Λ^1_{11} задовольняє диференціальне рівняння

$$d\Lambda^1_{11} - 2\Lambda^1_{11}\omega^3_2 = \Lambda^1_{11i}\theta^i.$$

Оскільки $\Lambda^1_{11} \neq 0$, то задання скалярного поля Λ^1_{11} на нейтральному торсі еквівалентне його внутрішній нормалізації [2]. Адаптований базис нейтрального торса із фіксованим полем скалярів Λ^1_{11} є базисом Дарбу двовимірної поверхні простору Мінковського. Справді, якщо $\Lambda^1_{11} = \mathrm{const} \neq 0$, то форма ω^3_2 виражається через форми θ^i і тоді фіксація точки нейтрального торса приводить до фіксації єдиного адаптованого базису (фундаментальна група простору Мінковського редукується до тривіальної одиничної підгрупи).

Нейтральні поверхні класу $\mathfrak{M}_2(A = \mathrm{const} \neq 0)$ назвемо нейтральними сферами простору Мінковського. Якщо $A = \mathrm{const} > 0$, то маємо сфери дійсного радіуса, а при $A = \mathrm{const} < 0$ — сфери уявного радіуса. На нейтральних сферах $\Lambda^1_{11i} \equiv \Lambda^1_{22i}$.

Двовимірні нейтральні поверхні класу $\mathfrak{M}_2(B=0)$ називаються нейтральними мінімальними поверхнями. На нейтральних мінімальних поверхнях $\Lambda^1_{11}\Lambda^1_{11i} \equiv \Lambda^1_{12}\Lambda^1_{12i}$. До нейтральних мінімальних поверхонь належать нейтральні гелікоїди, які характеризуються умовою $\Lambda^1_{11} = -\Lambda^1_{12}$. Повна класифікація нейтральних двовимірних поверхонь простору Мінковського та вивчення диференціально-геометричних властивостей поверхонь цих класів може бути предметом окремого дослідження.

2. Застосуємо цей же метод при дослідженні геометрії двовимірної нейтральної поверхні $\mathfrak{M}_2$, зануреної у чотиривимірний дійсний точковий псевдоевклідів простір індекса 2 (чотиривимірний простір Рашевського $\mathcal{P}_4$). Теорія кривини мінімальних кривих, мінімальних кіл та неплоских

скісних кіл у просторі $\mathcal{P}_4$ розвинена у працях [9—11] і [12]. Диференціальна геометрія однорідних ліній n-вимірного псевдоевклідового простору описана у праці [13].

Головні форми ω^I $(I, J, K, L, ... = \overline{1,4})$ простору $\mathcal{P}_4$ задовольняють зовнішним диференціальним рівнянням

$$d\omega^I = \omega^L \wedge \omega_L^I.$$

Лінійні диференціальні форми ω_L^I є формами зв'язності Мінковського, бо метричний тензор простору $\mathcal{P}_4$ $\{g_{IK}\}$ коваріантно сталий

$$dg_{IL} - g_{IK}\omega_L^K - g_{KL}\omega_I^K = 0. \qquad (13)$$

Стандартний базис $\{\underset{x}{\vec{e}_i}\}$, $x \in \mathcal{P}_4$-лінеалу простору Рашевського визначається умовами

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{i\alpha} = g_{\alpha i} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \ (14)$$

де $i, j, k, l, ... = 1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma, ... = 3, 4$, δ_{ij}, $\delta_{\alpha\beta}$ — символи Кронекера.

Теорема 6. *Фундаментальною групою простору $\mathcal{P}_4$ є шестичленна група Лі з інваріантними формами $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4, \omega_3^4$.*

Справді, за умов (14) система (13) набуває вигляду

$$\omega_i^j = -\omega_j^i, \quad \omega_i^\alpha = \omega_\alpha^i, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$$

або

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0,$$
$$\omega_2^1 = -\omega_1^2, \quad \omega_3^1 = \omega_1^3,$$
$$\omega_3^2 = \omega_2^3, \quad \omega_4^1 = \omega_1^4,$$
$$\omega_4^2 = \omega_2^4, \quad \omega_4^3 = -\omega_3^4.$$

Отже, лінійно незалежними залишилися лише форми $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4$ і ω_3^4.

Структурні рівняння

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^4,$$
$$d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 - \omega_1^4 \wedge \omega_3^4,$$
$$d\omega_1^4 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4,$$
$$d\omega_2^3 = -\omega_1^2 \wedge \omega_1^3 - \omega_2^4 \wedge \omega_3^4,$$
$$d\omega_2^4 = -\omega_1^2 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^4,$$
$$d\omega_3^4 = \omega_1^3 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_2^4$$

підтверджують істинність висновку теореми 6.

Нехай

$$\omega^I = \Lambda_i^I \theta^i, \quad \operatorname{rg} \Lambda_i^I = 2 \qquad (15)$$

— рівняння занурення поверхні $\mathfrak{M}_2$ у простір $\mathcal{P}_4$. Тоді векторні поля

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}_i} = \Lambda_i^I \underset{x}{\vec{e}_I}$$

на поверхні $\mathfrak{M}_2$ будуть базисними у лінійному просторі дотичних векторів з початками у точці x поверхні $\mathfrak{M}_2$. Ці векторні поля інваріантні відносно фундаментальної групи Лі простору $\mathcal{P}_4$. Метричний тензор простору Рашевського індукує на поверхні $\mathfrak{M}_2$ тензор $a_{ij} := g_{IK}\Lambda_i^I\Lambda_j^K$ рангу 2 такий, що $a_{ij} = a_{ji}$. Поверхню $\mathfrak{M}_2$ називають нейтральною [3], якщо слід тензора a_{ij} в усіх точках поверхні нульовий. Зв'язність Мінковського індукує на поверхні $\mathfrak{M}_2$ тангенційну зв'язність з інваріантними формами θ_j^i таку, що

$$da_{ij} = a_{lj}\theta_i^l + a_{il}\theta_j^l. \qquad (16)$$

Рівняння (16) виражають коваріантну сталість структурного тензора індукованої метрики у тангенційній зв'язності.

Теорема 7. *Для того, щоб поверхня $\mathfrak{M}_2$ у просторі Рашевського, віднесеного до стандартного афінного базису, була нейтральною, необхідно і досить, щоб компоненти її фундаментального об'єкта першого порядку задовольняли умову*

$$(\Lambda_1^1)^2 + (\Lambda_1^2)^2 + (\Lambda_2^1)^2 + (\Lambda_2^2)^2 =$$
$$= (\Lambda_1^3)^2 + (\Lambda_1^4)^2 + (\Lambda_2^3)^2 + (\Lambda_2^4)^2. \qquad (17)$$

Спеціалізуємо стандартний афінний базис $\{\underset{x}{\vec{e}_I}\}$ простору $\mathcal{P}_4$ так, щоб $\underset{x}{\vec{e}_1} = \underset{x}{\vec{\Lambda}_1}$, $\underset{x}{\vec{e}_3} = \underset{x}{\vec{\Lambda}_2}$. Тоді матимемо базис, адаптований поверхні $\mathfrak{M}_2$. Відносно адаптованого базису

$$\Lambda_1^1 = 1, \quad \Lambda_1^2 = \Lambda_1^3 = \Lambda_1^4 = 0,$$

$$\Lambda_2^3 = 1, \quad \Lambda_2^1 = \Lambda_2^2 = \Lambda_2^4 = 0 \qquad (18)$$

і тому $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 0, a_{22} = -1$, а також задовольняється умова (17). Таким чином афінний базис адаптований нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$. Системи рівнянь (15) і (16) зводяться до вигляду

$$\omega^1 = \theta^1, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \theta^2, \quad \omega^4 = 0,$$

$$\theta_1^1 = \theta_2^2 = 0, \quad \theta_2^1 = \theta_1^2.$$

Функції $\{\Lambda_i^I\}$ задовольняють умови

$$d\Lambda_i^I - \Lambda_l^I \theta_i^l + \Lambda_i^K \omega_K^I = \Lambda_{ij}^I \theta^j,$$

які відносно адаптованого нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$ базису спрощуються і набувають вигляду

$$\omega_1^2 = \Lambda_{1j}^2 \theta^j, \quad \omega_1^4 = \Lambda_{1j}^4 \theta^j,$$

$$\omega_2^3 = \Lambda_{2j}^2 \theta^j, \quad \omega_3^4 = \Lambda_{2j}^4 \theta^j,$$

$$\theta_1^2 = \omega_1^3 - \Lambda_{1j}^3 \theta^j, \quad \Lambda_{11}^1 = 0,$$

$$\Lambda_{12}^1 = 0, \quad \Lambda_{21}^3 = 0,$$

$$\Lambda_{22}^3 = 0, \quad \Lambda_{1j}^3 = \Lambda_{2j}^1.$$

Отже, якщо фіксувати точку поверхні $\mathfrak{M}_2$, то

$$\bar\omega_1^2 = \bar\omega_1^4 = \bar\omega_2^3 = \bar\omega_3^4 = 0, \bar\theta_1^2 = \bar\omega_1^3$$

і $\bar\omega_2^4$ — вільна форма.

Нехай $\underset{x}{\vec{N}_i} = N_i^I \underset{x}{\vec{e}_I}$ — базисні векторні поля двовимірної нормалі $\underset{x}{N}$ на нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$. Інваріантність поля нормалей $N = \bigcup\limits_{x \in \mathfrak{M}_2} \underset{x}{N}$ еквівалентна тензорності функцій $\{N_i^I\}$:

$$dN_i^I - N_j^I v_i^j + N_i^L \omega_L^I = N_{ij}^I \theta^j,$$

де $\{v_i^j\}$ — інваріантні форми групи $GL(2;\mathbb{R})$. Очевидно, що $\underset{x}{\vec{N}_1} = \underset{x}{\vec{e}_4}$ і $\underset{x}{\vec{N}_2} = \underset{x}{\vec{e}_2}$, якщо $N_1^1 = N_1^2 = N_1^3 = 0$, $N_1^4 = 1$, $N_2^1 = N_2^3 = N_2^4 = 0$, $N_2^2 = 1$. За цих умов поле нормалей N для нейтральної поверхні $\mathfrak{M}_2$ у просторі $\mathcal{P}_4$ називатимемо природним.

Інваріантні форми групи автоморфізмів природної нормалі $\underset{x}{N}$ будуть формами нормальної зв'язності нейтральної поверхні, якщо $N_{ij}^I \equiv 0$ на $\mathfrak{M}_2$. Відносно нормальної зв'язності маємо

$$\omega_4^1 = 0, \omega_2^1 = 0, v_1^2 = \omega_4^2, v_2^2 = v_1^1 = 0,$$

$$\omega_4^3 = 0, \omega_2^3 = 0, v_2^1 = \omega_2^4 = \omega_4^2 = v_1^2,$$

$$\Lambda_{1j}^4 = 0, \Lambda_{1j}^2 = 0, \Lambda_{2j}^4 = 0, \Lambda_{2j}^2 = 0.$$

Теорема 8. *Якщо нейтральна поверхня $\mathfrak{M}_2$ у просторі Рашевського $\mathcal{P}_4$ віднесена до афінного базису, адаптованого поверхні та її природній нормалізації, то її компоненти фундаментальних об'єктів перших трьох порядків задовольняють умови*

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_2^3 = 1,$$

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_1^3 = \Lambda_1^4 = \Lambda_2^1 = \Lambda_2^2 = \Lambda_2^4 = 0,$$

$$\Lambda_{1i}^3 = \Lambda_{2i}^1,$$

$$\Lambda_{1i}^1 = \Lambda_{2i}^3 = \Lambda_{1i}^4 = \Lambda_{2i}^4 = \Lambda_{1i}^2 = \Lambda_{2i}^2 = 0,$$

$$\Lambda_{1ik}^1 = \Lambda_{2i}^1 \Lambda_{2k}^1 = \Lambda_{2ik}^3,$$

$$\Lambda_{1ik}^2 = \Lambda_{2ik}^2 = \Lambda_{1ik}^4 = \Lambda_{2ik}^4 = 0, \Lambda_{1ik}^3 = \Lambda_{2ik}^1,$$

$$d\Lambda_{2i}^1 - \Lambda_{2j}^1 \theta_i^j = \Lambda_{2ij}^1 \theta^j. \tag{19}$$

Справді, умови (17), (18) та рівняння

$$d\Lambda_{ij}^I - \Lambda_{kj}^I \theta_i^k - \Lambda_{ik}^I \theta_j^k + \Lambda_{ij}^L \omega_L^I = \Lambda_{ijk}^I \theta^k$$

відносно афінного базису, адаптованого нейтральній поверхні та її природній нормалізації, визначають залежності (19), які є висновком теореми 8. Система диференціальних рівнянь у співвідношеннях (19) вказує на те, що функції $\{\Lambda_{2i}^1\}$ утворюють геометричний об'єкт на нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$. Цей об'єкт приєднаний до диференціальної групи першого порядку поверхні $\mathfrak{M}_2$. Отже, маємо

$$d\Lambda_{21}^1 - \Lambda_{22}^1 \omega_1^3 = (\Lambda_{21i}^1 - \Lambda_{22}^1 \Lambda_{2i}^1)\theta^i,$$

$$d\Lambda_{22}^1 - \Lambda_{21}^1 \omega_1^3 = (\Lambda_{23i}^1 - \Lambda_{21}^1 \Lambda_{2i}^1)\theta^i.$$

Якщо згорнути обидві частини першої рівності з Λ_{21}^1, а обидві частини другої рівності з $(-\Lambda_{22}^1)$ і додати, то отримаємо

$$dT = T_i \theta^i,$$

де

$$T := (\Lambda_{21}^1 - \Lambda_{22}^1)(\Lambda_{21}^1 + \Lambda_{22}^1) \tag{20}$$

— тензор типу (0,0), а

$$T_i = 2[\Lambda^1_{21}(\Lambda^1_{21i} + \Lambda^1_{22}\Lambda^1_{2i}) - \Lambda^1_{22}(\Lambda^1_{22i} + \Lambda^1_{21}\Lambda^1_{2i})].$$

Теорема 9. *На кожній нейтральній поверхні $\mathfrak{M}_2$ у просторі Рашевського $\mathcal{P}_4$, віднесеній до афінного базису, адаптованого поверхні і її природній нормалізації, існує поле абсолютного інваріанта T, охопленого компонентами фундаментального об'єкта другого порядку поверхні за формулами (20).*

Поверхні $\mathfrak{M}_2$ класу $T = 0$ характеризуються умовою $\Lambda^1_{21} = \Lambda^1_{22}$, де $d\Lambda^1_{21} - \Lambda^1_{21}\omega^3_1 = (\Lambda^1_{21i} - \Lambda^1_{21}\Lambda^1_{2i})\theta^i$. Якщо $\Lambda^1_{21} = \text{const} \neq 0$ у кожній точці нейтральної поверхні $\mathfrak{M}_2$ класу $T = 0$, то афінний базис, адаптований поверхні і її природній нормалізації, є аналогом базису Дарбу поверхні евклідового простору [5].

Двовимірні нейтральні поверхні $\mathfrak{M}_2$ класу $T = 0$ у просторі $\mathcal{P}_4$ будуть двовимірними площинами Мінковського, якщо $\Lambda^1_{21} = \Lambda^1_{22} = 0$. Якщо ж $\Lambda^1_{21} = \Lambda^1_{22} \neq 0$, то двовимірна нейтральна поверхня $\mathfrak{M}_2$ класу $T = 0$ є торсом першого роду. При $\Lambda^1_{21} = -\Lambda^1_{22} \neq 0$ маємо двовимірну нейтральну поверхню $\mathfrak{M}_2$ класу $T = 0$, яка є торсом другого роду. Отже, двовимірні нейтральні поверхні класу $T = 0$ у чотиривимірному просторі Рашевського є торсовими поверхнями або площинами Мінковського.

Двовимірна нейтральна поверхня класу $T = \text{const} \neq 0$ — це двовимірна сфера простору Рашевського. Отже, у дійсному чотиривимірному точковому просторі Рашевського двовимірні нейтральні сфери дійсного радіуса характеризуються тензором $T = \text{const} > 0$, а двовимірні нейтральні сфери уявного радіуса — тензором $T = \text{const} < 0$. На двовимірних сферах простору Рашевського компоненти їх фундаментального об'єкта третього порядку задовольняють умови

$$\Lambda^1_{21}(\Lambda^1_{21i} + \Lambda^1_{22}\Lambda^1_{2i}) = \Lambda^1_{22}(\Lambda^1_{22i} + \Lambda^1_{21}\Lambda^1_{2i}), i = 1, 2.$$

Фундаментальна група тривимірного простору Мінковського залишає інваріантним ізотропний конус простору і тому двовимірна нейтральна поверхня, яка досліджується у тезі 1, визначається з точністю до лоренцових ізометрій. Фундаментальна група простору Рашевського $\mathcal{P}_4$ теж залишає інваріантною двовимірну нейтральну поверхню, але існують такі її перетворення, які, наприклад, торси першого роду переводять у торси другого роду і навпаки. Існують також такі перетворення фундаментальної групи простору Рашевського, які двовимірні нейтральні сфери дійсного радіуса переводять у двовимірні нейтральні сфери уявного радіуса.

Застосування методу зовнішніх диференціальних форм та рухомого базису при побудові диференціальної геометрії двовимірної нейтральної поверхні ілюструє можливості порівняння особливостей занурення цієї поверхні у різні за структурою псевдоевклідові простори [6, 7, 8].

Звичайно, нейтральна поверхня $\mathfrak{M}_2$ у тривимірному просторі Мінковського зберігає геометричні властивості гіперповерхні. Їх можна виявити і описати, наприклад, за схемою дослідження гіперповерхонь, проілюстрованою у працях [14, 15]. Нейтральна поверхня $\mathfrak{M}_2$ у чотиривимірному просторі Рашевського володіє геометричними властивостями поверхонь ковимірності 2. Дотичне розшарування простору $\mathcal{P}_4$ над нормалізованою нейтральною двовимірною поверхнею має структуру майже добутку нульового індекса. У випадку інтегровного поля нормалей нейтральної поверхні простір Рашевського стає топологічним добутком нейтральної поверхні і деякої двовимірної поверхні, яка не дотикається жодного ізотропного вектора [16].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Труды Геометр. семинара: Сб. науч. тр.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— **4**.— 1973.— С.7—70.

2. *Домбровский Р.Ф., Плахта Г.В.* О нейтральных двумерных подмногообразиях трехмерного многообразия Минковского // Материалы Всес. совещания по дифф. геометрии. МГУ

им. М.В.Ломоносова и Ростовский ун-т: Абрау-Дюрсо.— 1990.— С.27.

3. *Ковдриш В.В.* Тензорна ознака нейтральних поверхонь простору Мінковського // Матеріали студентської наукової конференції, присвяченої 10-й річниці незалежності України. Кн.2. Природничі та фізико-математичні науки.— Чернівці: Рута, 2001.— С.431—432.

4. *Домбровский Р.Ф., Мироник В.И., Осадца И.С.* Фундаментальные объекты и кривизна локально однородных времениподобных линий нейтрального пространства // Материалы Международн. школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В.Ефимова.— Абрау-Дюрсо: МГУ им. М.В.Ломоносова и Ростовский ун-т, 2000.— С.33—34.

5. *Дубровин В.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и применения.— М.: Наука, 1979.— 760 с.

6. *Домбровський Р.Ф.* Метод Г.Ф.Лаптєва у побудові теорії кривини локально однорідних ліній нейтрального простору // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.34—40.

7. *Домбровський Р.Ф.* Алгебраїчна схема продовження і охоплення зображень скінченних груп Лі // Матеріали Третьої Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні. Український математичний конгрес.— Суми: Сумський державний педагогічний ун-т ім. А.С.Макаренка, 2001.— С.168—169.

8. *Балазюк Т.Н., Домбровський Р.Ф., Похила М.М.* Аналітична схема інваріантних диференціально-геометричних побудов для елементарних підмноговидів в однорідних просторах // Тези доповідей 4-ої Міжнародної конференції з геометрії і топології.— Черкаси: ЧІТІ, 2001.— С.6—8.

9. *Домбровський Р.Ф., Мироник В.І., Романюк Н.С.* Мінімальні криві нейтрального простору // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— Чернівці: Прут, 2001.— Вип.6.— С.38—51.

10. *Мироник В.І., Осадца І.С.* Неплоскі мінімальні скісні кола нейтрального простору // Матеріали Міжнародної конференції "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання".— К.: Ін-т математики НАН України, 2001.— С.111.

11. *Мироник В.І., Романюк Н.С.* Мінімальні кола нейтрального простору // Матеріали студентської наукової конференції, присвяченої 10-й річниці незалежності України. Кн.2. Природничі та фізико-математичні науки.— Чернівці: Рута, 2001.— С.449—450.

12. *Мироник В.І.* Ізотропні лінії нейтрального простору // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.96—99.

13. *Домбровський Р.Ф., Юрочко О.М.* Диференціальна геометрія однорідних ліній n-вимірного простору Мінковського // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 2000.— Вип.5.— С.108—125.

14. *Домбровський Р.Ф., Мироник В.І.* Класифікація гіперповерхонь антикватерніонного простору // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика.— Чернівці: Рута, 2000.— С.23—31.

15. *Домбровський Р.Ф., Осадца І.С.* До геометрії розподілу гіперплощинних елементів напівкватерніонного простору // Вісник національного університету "Львівська політехніка": Прикладна математика.— Львів: Львівська політехніка, 2000.— N 411.— С.122—128.

16. *Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д.* Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии.— 1982.— 13.— С.27—76.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.2001