УДК 517.51

©2002 р. В.В. Гульчак, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці

НЕМОЖЛИВІСТЬ РОЗБИТТЯ ВІДРІЗКА НА n СХОЖИХ ЧАСТИН

Встановлено, що відрізок не може бути розбитий на n схожих між собою частин.

It is shown, that a segment can not be parted on n similar sets.

1. В праці [1] досліджувалась задача про розбиття відрізка на подібні, гомеоморфні чи схожі частини. Зокрема, там було встановлено, що кожний невироджений відрізок числової прямої може бути розбитий на довільне скінченне число частин, кожна з яких подібна до відрізка з будь-яким фіксованим натуральним числом вилучених внутрішних точок, і не може бути розбитий на дві частини, кожна з яких подібна до самого відрізка, так само як і не може бути розбитий на дві схожі частини. Тут же були поставлені такі питання: чи можна невироджений відрізок числової прямої розбити

а) на n подібних і гомеоморфних частин?

б) на n схожих частин ?

в) на n частин, кожна з яких подібна до самого відрізка?

У цій замітці ми даємо негативну відповідь на питання б) для довільного натурального $n \geq 2$.

2. Підмножини числової прямої $\mathbb{R}$ ми будем наділяти порядком і топологією, індукованими з $\mathbb{R}$. Нагадаємо, що дві множини $A, B \subseteq \mathbb{R}$ називаються *схожими* [1], якщо існує *відображення схожості* $f : A \to B$, яке є одночасно подібністю і гомеоморфізмом, тобто така строго зростаюча неперервна бієкція $f : A \to B$, для якої обернене відображення $f^{-1} : B \to A$ теж неперервне. Множини A і B можуть бути подібними і гомеоморфними, не будучи при цьому схожими. Прикладом служать множини A і B з [1], які дають розбиття відрізка $[a, b]$ на дві подібні і гомеоморфні частини, при цьому вони не можуть бути схожими, бо відрізок на дві схожі частини не розбивається. Зрозуміло, що два однотипних проміжки числової прямої є схожими множинами. Ми будемо використовувати те, що неперервне відображення $f : X \to Y$ зберігає зв'язність множин, зокрема, переводить проміжки в проміжки, якщо $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, а коли $f : A \to B$ – схожість і $[\alpha, \beta) \subseteq A$, то $f([\alpha, \beta)) = [\gamma, \delta)$, де $\gamma = f(\alpha)$. Крім того, як і в [1], нам буде потрібний наступний відомий факт: не існує строго зростаючої трансфінітної послідовності дійсних чисел довжини ω_1.

3. Приступимо до встановлення основного результату.

Теорема. *Нехай $I = [a, b]$ – будь-який відрізок числової прямої і $n \in \mathbb{N}$. Тоді не існує розбиття $\mathcal{P}$ відрізка I на $n+1$ попарно схожих між собою частин.*

Доведення. Будемо вважати, що $a < b$, оскільки при $a = b$ твердження очевидне. Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує таке розбиття $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_{n+1}\}$ відрізка I, що будь-які множини P_i і P_j схожі, і нехай $\varphi_{i,j} : P_i \to P_j$ – відображення схожості. Виходячи з цього, ми з допомогою трансфінітної індукції побудуємо такі трансфінітні послідовності $a_\xi : \xi < \omega_1$ чисел $a_\xi \in I$ з $a_0 = a$ і $(A_\xi : \xi < \omega_1)$ множин $A_\xi \in \mathcal{P}$, що для кожного $\xi < \omega_1$ задовольняють умови:

1) $a_\xi < a_{\xi+1}$;

2) $a_\xi = sup\{a_\eta : \eta < \xi\}$, якщо ξ – граничне число, яке більше від 0;

3) $[a_\xi, a_{\xi+1}) \subseteq A_\xi$;

4) $a_{\xi+1} \notin A_\xi$.

Тим самим теорема буде доведена, адже

тоді $(a_\xi : \xi < \omega_1)$ буде строго зростаючою трансфінітною послідовністю дійсних чисел довжини ω_1, а такої послідовності не існує.

Покладемо $a_0 = a$. Оскільки $I = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n+1} P_i$, то існує єдиний індекс i_0, такий, що $a \in P_{i_0}$. Покладемо $A_0 = P_{i_0}$ і $a_1 = min\{\varphi_{i_0,j}(a_0) : j \neq i_0\}$. Зрозуміло, що $a_1 \in I$, причому $P_j \subseteq [a_1, b]$ для кожного $j \neq i_0$. Нехай j_0 – той єдиний індекс, для якого $a_1 = \varphi_{i_0,j_0}(a_0)$, і $A_1 = P_{j_0}$. Ясно, що $j_0 \neq i_0$, отже, $a_0 < a_1$, бо $a_0 \leq a_1$ і $a_0 \neq a_1$, адже $a_0 \in P_{i_0}$, $a_1 \in P_{j_0}$ і $P_{i_0} \bigcap P_{j_0} = \emptyset$. Крім того, $[a_0, a_1) \subseteq A_0$, $a_1 \notin A_0$ і $a_1 \in A_1$.

Нехай $\gamma > 1$ і точки a_ξ та множини A_ξ визначені при $\xi < \gamma$. Розглянемо спочатку той випадок, коли γ – ізольоване число. Тоді $\gamma = \beta + 1$, де $\beta > 0$. За побудовою маємо, що $a_\beta \in A_\beta \in \mathcal{P}$. Для скорочення запису покладемо $A = A_\beta$. Нехай $\mathcal{P} \setminus \{A\} = \{B_1, ..., B_n\}$ і $f_i : A \to B_i$ – відображення схожості. Існує такий індекс k, що $f_k(a_\beta) = min\{f_i(a_\beta) : i = 1, ..., n\}$.

Припустимо, що $f_k(a_\beta) > a_\beta$. Для кожного $i = 1, ..., n$ введемо множину

$$\Xi_i = \{\xi : \xi \leq \beta,\, a_\xi \in A \,\text{і}\, f_i(a_\xi) > a_\beta\}.$$

За припушенням $\beta \in \Xi_i$ для кожного i, отже, всі множини Ξ_i непорожні. Нехай $\xi_i = min\Xi_i$ при $i = 1, ..., n$. Ясно, що $\xi_i \leq \beta$, а значить, $a_{\xi_i} \leq a_\beta$ для кожного i. Покладемо тоді $a_\gamma = min\{f_i(a_{\xi_i}) : i = 1, ..., n\}$. Зрозуміло, що $a_\gamma > a_\beta$ і $a_\gamma \in I$.

Покажемо, що $(a_\beta, a_\gamma) \subseteq A$. Припустимо, що існує таке i, що $(a_\beta, a_\gamma) \bigcap B_i \neq \emptyset$. Візьмемо $y_0 \in (a_\beta, a_\gamma) \bigcap B_i$. Оскільки $y_0 \in B_i$ і $f_i(A) = B_i$, то існує таке $x_0 \in A$, що $f_i(x_0) = y_0$. Зрозуміло, що $f_i(x_0) = y_0 < a_\gamma \leq f_i(a_{\xi_i}) \leq f_i(a_\beta)$, отже, і $x_0 < a_\beta$. Тоді існує порядкове число $\xi_0 < \beta$, таке, що $a_{\xi_0} \leq x_0 < a_{\xi_0+1}$, адже $[a_0, a_\beta) = \bigcup\limits_{\xi<\beta} [a_\xi, a_{\xi+1})$. Справді, множина $\Xi = \{\xi : \xi \leq \beta \quad \text{і} \quad a_\xi \leq x_0\}$ непорожня, бо $0 \in \Xi$, тому існує $\xi_0 = sup\Xi$, причому $\xi_0 \leq \beta$. Якщо ξ_0 – ізольоване число або $\xi_0 = 0$, то обов'язково $\xi_0 \in \Xi$, якщо ж $\xi_0 > 0$ – граничне число, то $[0, \xi_0) \subseteq \Xi$, а значить, і $\xi_0 \in \Xi$, бо $a_{\xi_0} = \sup\limits_{\xi<\xi_0} a_\xi$. Таким чином, $a_{\xi_0} \leq x_0$ і $\xi_0 < \beta$, бо $a_\beta > x_0$. Оскільки $\xi_0 + 1 > \xi_0$, то $\xi_0 + 1 \notin \Xi$, отже, $x_0 < a_{\xi_0+1}$ і число ξ_0 і є шуканим. За побудовою $[a_{\xi_0}, a_{\xi_0+1}) \subseteq A_{\xi_0} \in \mathcal{P}$. Крім того, $x_0 \in A \bigcap [a_{\xi_0}, a_{\xi_0+1})$, звідки випливає, що $A \bigcap A_{\xi_0} \neq \emptyset$. Оскільки $A = A_\beta \in \mathcal{P}$, то обов'язково $A = A_{\xi_0}$. Тепер ми можемо розглянути образ $f_i([a_{\xi_0}, a_{\xi_0+1}))$, який є деяким півінтервалом $[p, q)$, що міститься в множині B_i, причому $p = f_i(a_{\xi_0})$. Ясно, що $y_0 = f_i(x_0) \in [p, q)$, отже, $y_0 < q$. Якщо $p \leq a_\beta$, то $a_\beta \in [p, q)$, адже $a_\beta < y_0 < q$, а це неможливо, бо $[p, q) \subseteq B_i$, $a_\beta \in A$ і $A \bigcap B_i = \emptyset$. Отже, $p > a_\beta$, звідки випливає, що $\xi_0 \in \Xi_i$. В такому разі, $\xi_0 \geq \xi_i$, а значить, $a_{\xi_0} \geq a_{\xi_i}$ і тому $y_0 = f_i(x_0) \geq f_i(a_{\xi_0}) \geq f_i(a_{\xi_i}) \geq a_\gamma$. Виходить, що $y_0 \geq a_\gamma$, а це суперечить вибору y_0. Отримана суперечність і завершує доведення включення $(a_\beta, a_\gamma) \subseteq A$. Таким чином, $[a_\beta, a_{\beta+1}) \subseteq A_\beta$, отже, умова 3) виконується і при $\xi = \beta$. Крім того, $a_\gamma \notin A_\beta$, бо a_γ входить в одну з множин B_i. Отже, нам залишається вибрати таку множину $A_\gamma \in \mathcal{P}$, що $a_\gamma \in A_\gamma$, і побудова в цьому випадку завершена.

Нехай тепер $f_k(a_\beta) \leq a_\beta$. Зрозуміло, що $f_k(a_\beta) \neq a_\beta$, бо $a_\beta \in A$, $f_k(a_\beta) \in B_k$ і $A \bigcap B_k = \emptyset$. Таким чином, $f_k(a_\beta) < a_\beta$. В такому разі, існує таке число $\eta < \beta$, що $a_\eta \leq f_k(a_\beta) < a_{\eta+1}$. Ясно, що при цьому $[a_\eta, a_{\eta+1}) \subseteq A_\eta = B_k$. Покладемо $g_k = f_k^{-1}$. Образ $g_k([a_\eta, a_{\eta+1}))$ є деяким півінтервалом $[r, s)$, для якого $r = g_k(a_\eta)$ і $a_\beta \in [r, s) \subseteq A$. Покажемо, що $r = a_\beta$, тобто, що нерівність $r < a_\beta$ неможлива.

Припустимо, що $\beta = \alpha + 1$ – ізольоване число. Якби $r < a_\beta$, то, покладаючи $t = max\{r, a_\alpha\}$, ми одержали би, що $\emptyset \neq (t, a_\beta) \subseteq [a_\alpha, a_\beta) \bigcap [r, s) \subseteq A_\alpha \bigcap A_\beta = \emptyset$, що приводить до суперечності. Отже, в цьому випадку $r = a_\beta$.

Припустимо, що β – граничне число. Тоді за побудовою $a_\beta = \sup\{a_\xi : \xi < \beta\}$. Якщо $r < a_\beta$,то $r < a_\xi < a_\beta$ для деякого $\xi < \beta$, а тоді і $r < a_\xi < a_{\xi+1} < a_\beta$ для цього ж ξ. В такому разі, $a_\xi, a_{\xi+1} \in (r, a_\beta) \subseteq A$, але за побудовою точки a_ξ і $a_{\xi+1}$ не можуть входити в одну і ту ж саму множину розбиття $\mathcal{P}$. Таким чином, і в цьому випадку $r = a_\beta$.

Оскільки $[r, s) \subseteq A \subseteq I$ і проміжок I замкнений,то $s \in I$. Покладаючи $a_\gamma = s$, ми одержимо, що $a_\gamma \in I$ і $a_\beta < a_\gamma$ причому $[a_\beta, a_\gamma) \subseteq A = A_\beta$. За A_γ беремо, як і раніше, ту множину $A_\gamma \in \mathcal{P}$, для якої $a_\gamma \in A_\gamma$. Залишилося ще показати, що $a_\gamma = s \notin A$. Нехай, навпаки, $s \in A$. Тоді $s = g_k(u)$ для деякого $u \in B_k$. Зрозуміло, що $u \geq a_{\eta+1}$, бо інакше існувала би точка $v \in [a_\eta, a_{\eta+1})$, така, що $u < v$. Тоді $s = g_k(u) < g_k(v) < s$, що неможливо. Рівність $u = a_{\eta+1}$ не має місця, бо $u \in B_k$, а $a_{\eta+1} \notin B_k$. Таким чином, $a_{\eta+1} < u$. Але в такому разі образ $f_k([r, s]) = [a_\eta, a_{\eta+1}) \bigcup \{u\}$ буде незв'язною множиною, що суперечить неперервності f_k і зв'язності $[r, s]$. Отож обов'язково $s \in A$ і побудова для ізольованого γ завершена.

Розглянемо нарешті той випадок, коли γ – граничне число. Тоді ми змушені покласти $a_\gamma = \sup\{a_\xi : \xi < \gamma\}$. Ясно, що $a_\gamma \in I$, бо $a_\xi \in I$ для всіх $\xi < \gamma$. Залишається за A_γ взяти ту множину з $\mathcal{P}$, для якої $a_\gamma \in A_\gamma$.

Таким чином, побудова трансфінітних послідовностей $(a_\xi : \xi < \omega_1)$ і $(A_\xi : \xi < \omega_1)$ а з нею і доведення теореми повністю завершені.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Попов М.М.* Розбиття відрізка на однотипні частини // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 46. Математика.— Чернівці: ЧДУ, 1999.— С.88—94.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.2001