УДК 519.86

©2002 р. В.С. Григорків

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ ФУНКЦІЙ МІНІМАЛЬНИХ ВИТРАТ

Запропоновано структурний (оптимізаційний) підхід при моделюванні еколого-економічних функцій. Розроблена методологія побудови цих функцій у явному аналітичному вигляді.

The structural (optimization) approach to the modelling of ecological-economical functions is proposed in this article. The methodology of construction of such functions is provided in explicit analytical form.

Задача побудови еколого-економічних функцій (ЕЕФ) належить до актуальних задач моделювання еколого-економічних процесів та систем [1]. Такі функції є не тільки деякими функціями корисності еколого-економічного розвитку і засобом оцінювання його тенденцій, але й формують також окремий блок в комплексі більш складних моделей еколого-економічних процесів та систем. У даній роботі для моделювання ЕЕФ пропонується структурний (оптимізаційний) підхід, який уже використовувався автором при побудові, наприклад, виробничих функцій [2,3].

Спочатку сформулюємо задачу оптимальної організації виробництва з урахуванням його розбиття на дві підгрупи виробництв: основного виробництва (матеріального виробництва) і допоміжного виробництва (знищення продуктів забруднення). Уведемо такі позначення: $x \in \mathbb{R}^n_+$ (R^l_+ — невід'ємний ортант l-вимірного векторного простору) — вектор валового (основного) випуску; $z \in \mathbb{R}^m_+$ — вектор допоміжного випуску (знищення забруднювачів); $A = (a_{ij})^n_{i,j=1}$ — квадратна матриця затрат продукції i на випуск одиниці продукції j; $B = (b_{il})^{n,m}_{i,l=1}$ — прямокутна матриця затрат продукції i на знищення одиниці продукції l; $C = (c_{lj})^{m,n}_{l,j=1}$ — прямокутна матриця випуску забруднювачів l під час випуску одиниці продукції j; $D = (d_{ls})^m_{l,s=1}$ — квадратна матриця випуску забруднювачів l під час знищення одиниці забруднювачів s; $R \in \mathbb{R}^n_+$ — вектор максимально допустимих об'ємів виробничих ресурсів; $Z \in \mathbb{R}^m_+$ — вектор мінімально допустимих об'ємів знищення забруднювачів; $p \in \mathbb{R}^n_+$ — вектор питомих оцінок основної продукції; $q \in \mathbb{R}^m_+$ — вектор питомих оцінок допоміжної продукції; $< \cdot, \cdot >$ — операція скалярного добутку векторів. Зазначимо, що всі уведені вище матриці і вектори складаються з невід'ємних елементів. В залежності від змісту векторів p і q можна по-різному сформулювати мету виробництва з урахуванням двох груп виробництв. Якщо p і q — оцінки доходів від основного та допоміжного виробництв, то природним є прагнення максимізувати величину $(< p,x > - < q,z >)$. У випадку, коли p і q — оцінки відповідних кінцевих витрат, очевидно, слід мінімізувати величину $(< p,x > + < q,z >)$. Нижче метою виробництва будемо вважати мінімізацію витрат (всі міркування у разі максимізації доходу будуть аналогічними). З урахуванням того, що витрати продукції на виробництво не можуть перевищувати R, а вироблене забруднення є не меншим ніж знищене Z, отримаємо задачу:

$$\begin{cases} < p,x > + < q,z > \mapsto \min, \\ (x,z) \in X_1(R,Z), \end{cases} \tag{1}$$

де $X_1(R,Z) = \{x \in \mathbb{R}^n_+, z \in \mathbb{R}^m_+ \,|\, Ax + Bz \le R,\, Cx + Dz \ge Z\}$. Будемо вважати, що в задачі (1) вектори R і Z є параметрами. Тоді ця задача неявно задає функцію:

$$F_1 : (R,Z) \mapsto < p, x^*(R,Z) > +$$
$$+ < q, z^*(R,Z) >, \qquad (2)$$

де $(x^*(R,Z), z^*(R,Z))$ — розв'язок задачі (1) при заданих R і Z. Областю визначення функції (2) є

$$O_1 = \{R \in \mathbb{R}^n_+, Z \in \mathbb{R}^m_+ \,|\, X_1(R,Z) \neq \varnothing\}.$$

Функція F_1 — це ЕЕФ мінімальних затрат.

Теорема 1. *Функція F_1 в області O_1 є опуклою вниз, неперервною у всіх внутрішніх точках, монотонно не зростаючою по компонентам вектора R і монотонно не спадною по компонентам вектора Z, додатно однорідною першого степеня та в загальному випадку кусково-лінійною.*

Доведення. Перш за все зазначимо, що область O_1 є опуклою множиною, оскільки при $(R^{(1)}, Z^{(1)}), (R^{(2)}, Z^{(2)}) \in O_1$ і $\alpha, \beta \in [0,1]$ $(\alpha + \beta = 1)$ маємо:

$$\alpha R^{(1)} + \beta R^{(2)} \geq$$
$$\geq \alpha(Ax + Bz) + \beta(Ax + Bz) = Ax + Bz,$$
$$\alpha Z^{(1)} + \beta Z^{(2)} \leq$$
$$\leq \alpha(Cx + Dz) + \beta(Cx + Dz) = Cx + Dz,$$

тобто

$$\alpha(R^{(1)}, Z^{(1)}) + \beta(R^{(2)}, Z^{(2)}) =$$
$$= (\alpha R^{(1)} + \beta R^{(2)}, \alpha Z^{(1)}) + \beta Z^{(2)}) \in O_1.$$

Нехай $(x^{(1)*}, z^{(1)*}) = (x^{(1)*}(R^{(1)}, Z^{(1)}), z^{(1)*}(R^{(1)}, Z^{(1)}))$ — розв'язок задачі (1) при $R = R^{(1)}$, $Z = Z^{(1)}$, а $(x^{(2)*}, z^{(2)*}) = (x^{(2)*}(R^{(2)}, Z^{(2)}), z^{(2)*}(R^{(2)}, Z^{(2)}))$ — розв'язок задачі (1) при $R = R^{(2)}$, $Z = Z^{(2)}$. Тоді точка $\alpha(x^{(1)*}, z^{(1)*}) + \beta(x^{(2)*}, z^{(2)*}) = (\alpha x^{(1)*} + \beta x^{(2)*}, \alpha z^{(1)*} + \beta z^{(2)*}) \in X_1(\alpha R^{(1)} + \beta R^{(2)}, \alpha Z^{(1)} + \beta Z^{(2)})$, тобто є допустимою для задачі (1). Крім того,

$$F_1(\alpha(R^{(1)}, Z^{(1)}) + \beta(R^{(2)}, Z^{(2)})) =$$
$$= F_1(\alpha R^{(1)} + \beta R^{(2)}, \alpha Z^{(1)} + \beta Z^{(2)}) =$$
$$= < p, x^*(\alpha R^{(1)} + \beta R^{(2)}, \alpha Z^{(1)} + \beta Z^{(2)}) > +$$
$$+ < q, z^*(\alpha R^{(1)} + \beta R^{(2)}, \alpha Z^{(1)} + \beta Z^{(2)}) > \leq$$
$$\leq < p, \alpha x^{(1)*} + \beta x^{(2)*} > +$$
$$+ < q, \alpha z^{(1)*} + \beta z^{(2)*}) > =$$
$$= \alpha(< p, x^{(1)*} > + < q, z^{(1)*} >) +$$
$$+ \beta(< p, x^{(2)*} > + < q, z^{(2)*} >) =$$
$$= \alpha F_1(R^{(1)}, Z^{(1)}) + \beta F_2(R^{(2)}, Z^{(2)}),$$

тобто функція F_2 є опуклою вниз. Опуклі функції завжди неперервні у всіх внутрішніх точках області задання [4]. Тепер нехай $R^{(2)} > R^{(1)}$, $Z^{(2)} > Z^{(1)}$ і $(R^{(1)}, Z^{(1)}), (R^{(2)}, Z^{(2)}) \in O_1$. Тоді з нерівностей $Ax + Bz \leq R^{(1)}$ і $Cx + Dz \geq Z^{(2)}$ випливають нерівності $Ax + Bz \leq R^{(2)}$ і $Cx + Dz \geq Z^{(1)}$, тобто $X_1(R^{(1)}, Z) \subset X_1(R^{(2)}, Z)$, $X_1(R, Z^{(2)}) \subset X_1(R, Z^{(1)})$. Останні співвідношення означають, що $F_1(R^{(2)}, Z) \leq F_1(R^{(1)}, Z)$, $F_1(R, Z^{(2)}) \geq F_1(R, Z^{(1)})$, тобто функція F_1 монотонно не зростає по компонентах вектора R і монотонно не спадає по компонентах вектора Z. При $\nu > 0$ і $(R,Z) \in O_1$ функція $F_1(\nu R, \nu Z)$ є значенням задачі

$$\begin{cases} < p, x > + < q, z > \mapsto \min, \\ (x,z) \in X_1(\nu R, \nu Z), \end{cases} \qquad (3)$$

де $X_1(\nu R, \nu Z) = \{\nu R \in \mathbb{R}^n_+, \nu Z \in \mathbb{R}^m_+ \,|\, Ax + Bz \leq \nu R,\ Cx + Dz \geq \nu Z\}$. Оскільки $A \cdot x/\nu + B \cdot z/\nu \leq R$, $C \cdot x/\nu + D \cdot z/\nu \geq Z$, то після заміни змінних $x = \xi\nu$, $z = \eta\nu$ задачу (3) перепишемо так:

$$\begin{cases} \nu[< p, \xi > + < q, \eta >] \mapsto \min, \\ (\xi, \eta) \in Y_1(R,Z), \end{cases} \qquad (4)$$

де $Y_1(R,Z) = \{R \in \mathbb{R}^n_+, Z \in \mathbb{R}^m_+ \,|\, A\xi + B\eta \leq R,\ C\xi + D\eta \geq Z\}$. Порівнюючи задачі (3) і (4), одержимо співвідношення

$$F_1(\nu R, \nu Z) =$$
$$= \nu[< p, \xi^*(R,Z) > + < q, z^*(R,Z) >] \equiv$$
$$\equiv \nu[< p, x^*(R,Z) > + < q, z^*(R,Z) >] =$$
$$= \nu F_1(R,Z).$$

Останнє співвідношення стверджує, що функція F_1 є додатно однорідною першого степеня. Враховуючи результати [4] і той факт, що задача (1) є задачею лінійного програмування, дійдемо висновку, що функція F_1 є в загальному випадку кусково-лінійною в O_1. Теорема 1 доведена.

Випишемо до задачі (1) двоїсту задачу:

$$\begin{cases} -< R, \lambda^{(R)} > + \\ \qquad + < Z, \lambda^{(Z)} >] \mapsto \max, \\ (\lambda^{(R)}, \lambda^{(Z)}) \in \Lambda_1, \end{cases} \tag{5}$$

де $\Lambda_1 = \{\lambda^{(R)} \in R_+^n, \lambda^{(Z)} \in \mathbb{R}_+^m \,|\, -A^T\lambda^{(R)} + C^T\lambda^{(Z)} \leq p, -B^T\lambda^{(R)} + D^T\lambda^{(Z)} \leq q\}$, $\lambda^{(R)}$, $\lambda^{(Z)}$ — відповідні двоїсті змінні, T — знак операції транспонування. Характерною властивістю задачі (5) є те, що допустима множина Λ_1 не залежить від параметрів R і Z, що в свою чергу дає можливість знайти всі опорні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -A^T\lambda^{(R)} + C^T\lambda^{(Z)} + \mu^{(n)} = p, \\ -B^T\lambda^{(R)} + D^T\lambda^{(Z)} + \mu^{(m)} = q, \end{cases} \tag{6}$$

де $\mu^{(n)} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mu^{(m)} \in \mathbb{R}_+^m$ — вектори допоміжних змінних. Знайшовши опорні розв'язки системи (6), ми знайдемо вершини допустимої множини Λ_1. Користуючись співвідношенням двоїстості

$$< p, x^*(R, Z) > + < q, z^*(R, Z) >=$$

$$= - < R, \lambda^{(R)*} > + < Z, \lambda^{(Z)*} > \tag{7}$$

та критерієм оптимальності вершин $(\lambda^{(R)*}, \lambda^{(Z)*})$, можна побудувати функцію F_1 у явному аналітичному вигляді, яка в підобласті, визначеній вершиною $(\lambda^{(R)*}, \lambda^{(Z)*})$, збігається з правою частиною (7). Зауважимо, що зміст цього методу викладений в роботі автора [2], тобто немає потреби зупинятися на цьому більш детально.

Повернемось до задачі еколого-економічного менеджменту (1), в якій область $X_1(R, Z)$ задається односторонніми обмеженнями на виробничі витрати та вироблене забруднення. Замінимо цю область на область з двосторонніми обмеженнями, тобто на область

$$X_2(r, R, Z, G) = \{x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$z \in \mathbb{R}_+^m \,|\, r \leq Ax+Bz \leq R,\ Z \leq Cx+Dz \leq G\},$$

де $r \in \mathbb{R}_+^n$ — вектор мінімально допустимих об'ємів виробничих ресурсів, а $G \in \mathbb{R}_+^m$ — вектор максимально допустимих об'ємів виробленого забруднення. Тоді одержимо таку задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} < p, x > + < q, z >\mapsto \min, \\ (x, z) \in X_2(r, R, Z, G). \end{cases} \tag{8}$$

Задача (8) задає неявно ЕЕФ мінімальних витрат

$$F_2 : (r, R, Z, G) \mapsto< p, x^*(r, R, Z, G) > +$$

$$+ < q, z^*(r, R, Z, G) >, \tag{9}$$

де $(x^*(r, R, Z, G), z^*(r, R, Z, G))$ — розв'язок задачі (8) при заданих r, R, Z, G. Функція (9) визначена в області

$$O_2 = \{r, R \in \mathbb{R}_+^n; Z, G \in \mathbb{R}_+^m \,|$$

$$X_2(r, R, Z, G) \neq \varnothing\}.$$

Теорема 2. *Функція F_2 в області O_2 є опуклою вниз, неперервною у всіх внутрішніх точках, монотонно не зростаючою по компонентам векторів R і G, монотонно не спадною по компонентам векторів r і Z, додатно однорідною першого степеня та в загальному випадку кусково-лінійною.*

Доведення теореми 2 здійснюється аналогічно до доведення теореми 1, тому немає змісту зупинятись на цьому детально. Уточнимо тільки властивості монотонності та однорідності функції F_2. Припустивши, що $r^{(2)} > r^{(1)}$, $R^{(2)} > R^{(1)}$, $Z^{(2)} > Z^{(1)}$, $G^{(2)} > G^{(1)}$, несkладно отримати включення:

$$X_2(r^{(1)}, R, Z, G) \supset X_2(r^{(2)}, R, Z, G),$$

$$X_2(r, R^{(1)}, Z, G) \subset X_2(r, R^{(2)}, Z, G),$$

$$X_2(r, R, Z^{(1)}, G) \supset X_2(r, R, Z^{(2)}, G),$$

$$X_2(r, R, Z, G^{(1)}) \subset X_2(r, R, Z, G^{(2)}).$$

Це в свою чергу означає, що

$$F_2(r^{(1)}, R, Z, G) \leq F_2(r^{(2)}, R, Z, G),$$

$$F_2(r, R^{(1)}, Z, G) \geq F_2(r, R^{(2)}, Z, G),$$

$$F_2(r,R,Z^{(1)},G)\le F_2(r,R,Z^{(2)},G),$$

$$F_2(r,R,Z,G^{(1)})\ge F_2(r,R,Z,G^{(2)}),$$

тобто властивості монотонності по всім компонентам конкретизовані.

При $\nu>0$ і $(r,R,Z,G)\in O_2$ значення $F_2(\nu r,\nu R,\nu Z,\nu G)$ є оптимальним значенням задачі

$$\begin{cases} <p,x>+<q,z>\mapsto \min, \\ (x,z)\in X_2(\nu r,\nu R,\nu Z,\nu G), \end{cases} \tag{10}$$

де $X_2(\nu r,\nu R,\nu Z,\nu G)=\{\nu r,\nu R\in \mathbb{R}^n_+;\nu Z,\nu G\in\mathbb{R}^m_+\,|\,\nu r\le Ax+Bz\le \nu R,\nu Z\le Cx+Dz\le \nu G\}$. Увівши змінні $\xi=x/\nu$, $\eta=z/\nu$, від задачі (10) приходимо до задачі

$$\begin{cases} \nu[<p,\xi>+<q,\eta>]\mapsto \min, \\ (\xi,\eta)\in Y_2(r,R,Z,G), \end{cases} \tag{11}$$

де $Y_2(r,R,Z,G)=\{r,R\in\mathbb{R}^n_+;Z,G\in\mathbb{R}^m_+\,|\,r\le A\xi+B\eta\le R,Z\le C\xi+D\eta\le G\}$. Аналіз задач (10) і (11) показує, що

$$F_2(\nu r,\nu R,\nu Z,\nu G)=\nu F_2(r,R,Z,G).$$

З урахуванням зробленого вище зауваження, доведення теореми можна вважати завершеним.

Двоїстою до (8) буде задача

$$\begin{cases} <r,\lambda^{(r)}>-<R,\lambda^{(R)}>+ \\ +<Z,\lambda^{(Z)}>- \\ \qquad -<G,\lambda^{(G)}>\mapsto \max, \\ (\lambda^{(r)},\lambda^{(R)},\lambda^{(Z)},\lambda^{(G)})\in\Lambda_2, \end{cases} \tag{12}$$

де $\Lambda_2=\{\lambda^{(r)},\lambda^{(R)}\in R^n_+;\lambda^{(Z)},\lambda^{(G)}\in\mathbb{R}^m_+\,|\,A^T\lambda^{(r)}-A^T\lambda^{(R)}+C^T\lambda^{(Z)}-C^T\lambda^{(G)}\le p,\ B^T\lambda^{(r)}-B^T\lambda^{(R)}+D^T\lambda^{(Z)}-D^T\lambda^{(G)}\le q\}$, $\lambda^{(r)}$, $\lambda^{(R)}$, $\lambda^{(Z)}$, $\lambda^{(G)}$ — вектори відповідних двоїстих змінних. Користуючись центральним співвідношенням двоїстості для задач (8) і (12) і знайшовши опорні розв'язки системи

$$\begin{cases} A^T\lambda^{(r)}-A^T\lambda^{(R)}+C^T\lambda^{(Z)}- \\ \qquad -C^T\lambda^{(G)}+\mu^{(n)}=p, \\ B^T\lambda^{(r)}-B^T\lambda^{(R)}+D^T\lambda^{(Z)}- \\ \qquad -D^T\lambda^{(G)}+\mu^{(m)}=q, \end{cases}$$

де $\mu^{(n)}\in\mathbb{R}^n_+$, $\mu^{(m)}\in\mathbb{R}^m_+$, як і раніше, — вектори допоміжних змінних, можна з урахуванням критерія оптимальності опорного розв'язку (відповідної вершини множини Λ_2), також побудувати функцію F_2 у явному аналітичному вигляді.

Завершуючи викладення даної роботи зауважимо, що проблема побудови ЕЕФ тісно пов'язана з проблемою вибору критерію еколого-економічного розвитку, але на цьому питанні, як і на питанні інтерпретації ЕЕФ в рамках запропонованого дослідження зупинятися не будемо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Григорків В.С.* До проблеми економіко-математичного моделювання процесів еколого-економічної взаємодії та сталого розвитку // Науковий вісник Чернівецького університету.— 2001.— Вип. 109—110.— Економіка.— С.106—110.

2. *Григоркив В.С.* Построение производственных функций при заданных линейных технологиях // Проблемы управления и информатики.— 1999.— N 5.— С.145—150.

3. *Григоркив В.С.* Обобщенные линейно однородные производственные функции // Кибернетика и системный анализ.— 1999.— N 5.— С.124—132.

4. *Ашманов С.А.* Линейное программирование.— М.: Наука, 1981.— 340 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2001