УДК 517.982

©2002 р. В.В. Городецький, Р.С. Колісник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОСТОРІВ ТИПУ W

Вивчаються простори цілих функцій, які спадають на нескінченності (на $\mathbb{R}$) разом з усіма своїми похідними швидше ніж $\exp\{-|x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

The spaces of entire functions are studied in the case when these functions decrease on infinity (on $\mathbb{R}$) along with all their derivatives rather than $\exp\{-|x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

У багатьох питаннях математичного аналізу та диференціальних рівнянь важливу роль відіграють простори нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які спадають на нескінченності разом з усіма своїми похідними швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$. До таких просторів відноситься простір Л.Шварца S, простори типу S та W, вагові простори $K(M_p)$, $Z(M_p)$, введені в [1], та ін. Тут вивчаються простори цілих функцій, порядок спадання яких та їхніх похідних на нескінченності (на $\mathbb{R}$) характеризується величинами $m_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(n)}(x)|$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$; при цьому простори типу S та W утворюють певні підкласи вказаних просторів.

Простір C^ρ. Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел таку, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{m_n}}{n} = 0$, $m_0 = 1$;
2) $\forall\, \alpha > 0\ \exists\, c_\alpha > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;
3) $\exists\, M > 0\ \exists\, h > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$:

$$m_{n+1} \leq M h^n m_n$$

і покладемо

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_n \dfrac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, що ρ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на $[1, +\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty, -1]$, $\rho(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\rho(1) = 1$. Відомо (див. [2]), що умова 1) еквівалентна умові $\lim\limits_{|x|\to\infty} \ln \rho(x)/|x| = \infty$, з якої випливає, що

$$\exists\, c_0 > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, x : |x| > 1 :\ \rho(x) \geq c_0 e^{c|x|}. \tag{1}$$

За функцією ρ побудуємо послідовність

$$\rho_n := \inf_{y\neq 0} \frac{\rho(y)}{|y|^n} = \inf_{|y|\geq 1} \frac{\rho(y)}{|y|^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

яка володіє властивостями: 1) вона є монотонно спадною, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$, 4) послідовність $\left\{\dfrac{\rho_{n-1}}{\rho_n},\ n \geq 1\right\}$ — обмежена зверху. Доведемо 2). Оскільки послідовність $\{\rho_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ обмежена знизу ($\rho_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$), то вона збіжна: $\exists\, a \geq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \inf\limits_n \{\rho_n\} = a$. Нехай $a > 0$. Тоді для $\varepsilon = a/2$ знайдеться номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такий, що $a/2 < \rho_n < 3a/2$, $\forall\, n \geq n_0$, або $a/2 < \rho_{n+n_0} < 3a/2$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Крім того, із означення ρ_n випливає, що для $\varepsilon = a/2$

$$\exists\, y_\varepsilon : \quad |y_\varepsilon| \geq 1 :$$

$$\rho_{n+n_0} \leq \frac{\rho(y_\varepsilon)}{|y_\varepsilon|^{n+n_0}} < \rho_{n+n_0} + \frac{a}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\frac{a}{2} < \frac{\rho(y_\varepsilon)}{|y_\varepsilon|^{n+n_0}} < 2a, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+,$$

або

$$\frac{a}{2} |y_\varepsilon|^{n+n_0} < \rho(y_\varepsilon) < 2a |y_\varepsilon|^{n+n_0},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Оскільки $\rho(y_\varepsilon) = \sup\limits_n \dfrac{|y_\varepsilon|^n}{m_n}$, то

$$\forall\, \nu_k > 0 \;\; \exists\, n_k : \;\; \frac{|y_\varepsilon|^{n_k}}{m_{n_k}} > \rho(y_\varepsilon) - \nu_k, \;\; k \geq 1.$$

Візьмемо $\nu_k > 0$ такі, що $\nu_k < a/4$, $\forall k \geq 1$. Тоді, внаслідок (2),

$$\frac{|y_\varepsilon|^{n_k}}{m_{n_k}} > \frac{a}{2}|y_\varepsilon|^{n_k+n_0} - \nu_k,$$

або $\quad m_{n_k} < |y_\varepsilon|^{n_k}\left(\dfrac{a}{2}|y_\varepsilon|^{n_k+n_0} - \nu_k\right)^{-1} <$

$$< \left(\frac{a}{2} - \frac{\nu_k}{|y_\varepsilon|^{n_k+n_0}}\right)^{-1} \leq \left(\frac{a}{2} - \nu_k\right)^{-1}.$$

Оскільки $a/2 - \nu_k > a/2 - a/4 = a/4$, $\forall\, k \geq 1$, то $m_{n_k} \leq 4/a$, $\forall\, k \geq 1$. Отже, у послідовності $\{m_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$, яка монотонно зростає, існує обмежена зверху підпослідовність. Одержане протиріччя доводить, що $a = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Властивість 3) доводиться аналогічно. Доведемо, що має місце властивість 4). За означенням,

$$\rho_{n-1} \leq \frac{\rho(y)}{|y|^{n-1}}, \quad \forall\, y: \;\; |y| \geq 1;$$

$$\rho(y) = \sup_n \frac{|y|^n}{m_n}, \quad |y| \geq 1.$$

Тоді для довільного $0 < \varepsilon < \rho(y)$ існує номер $n_0 = n_0(\varepsilon, y)$ такий, що $\dfrac{|y|^{n_0}}{m_{n_0}} > \rho(y) - \varepsilon$. Покладемо $\varepsilon = \dfrac{1}{q}\rho(y)$, $q > 1$. Тоді

$$\rho(y) < \frac{q}{q-1}\frac{|y|^{n_0}}{m_{n_0}} \equiv \alpha_0 \frac{|y|^{n_0}}{m_{n_0}}, \;\; \alpha_0 > 1, \;\; |y| \geq 1.$$

Звідси дістаємо нерівність

$$\rho_{n-1} \leq \alpha_0 \frac{|y|^{n_0}}{|y|^{n-1} m_{n_0}} = \alpha_0 \frac{\rho(y)}{|y|^n} \cdot \frac{|y|^{n_0+1}}{\rho(y) m_{n_0}},$$

Оцінимо вираз $|y|^{n_0+1} \cdot (\rho(y) m_{n_0})^{-1}$:

$$\frac{|y|^{n_0+1}}{\rho(y) m_{n_0}} = \left(\frac{\rho(y)}{|y|^{n_0+1}} \cdot m_{n_0}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\inf_{|y|\geq 1} \frac{\rho(y)}{|y|^{n_0+1}} \cdot m_{n_0}\right)^{-1} = (\rho_{n_0+1} \cdot m_{n_0})^{-1};$$

$$\rho_{n_0+1} = \inf_{|y|\geq 1} \frac{\rho(y)}{|y|^{n_0+1}} = \left(\sup_{|y|\geq 1} \frac{|y|^{n_0+1}}{\rho(y)}\right)^{-1}.$$

Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon_0 > 0$ знайдеться y_0: $|y_0| \geq 1$ таке, що $\dfrac{1}{\rho_{n_0+1}} < \dfrac{|y_0|^{n_0+1}}{\rho(y_0)} + \varepsilon_0$. Отже,

$$\frac{|y|^{n_0+1}}{\rho(y) m_{n_0}} < \frac{1}{m_{n_0}}\left(\frac{|y_0|^{n_0+1}}{\rho(y_0)} + \varepsilon_0\right) \leq$$

$$\leq \frac{|y_0|^{n_0}}{m_{n_0}} \frac{|y_0|}{\rho(y_0)} + \varepsilon_0 \leq$$

$$\leq \rho(y_0) \cdot \frac{|y_0|}{\rho(y_0)} + \varepsilon_0 = |y_0| + \varepsilon_0.$$

Таким чином, $|y|^{n_0+1}(\rho(y) m_{n_0})^{-1} \leq |y_0|$. Тоді

$$\rho_{n-1} \leq \alpha_0 |y_0| \cdot \inf_{|y|\geq 1} \frac{\rho(y)}{|y|^n} = \alpha \rho_n, \quad n \geq 1,$$

де $\alpha = \alpha_0 |y_0| > 1$. Звідси дістаємо також нерівності

$$\frac{\rho_{n-2}}{\rho_n} = \frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}} \cdot \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \leq \alpha^2, \quad \forall\, n \geq 2; \ldots$$

Позначимо символом C^ρ сукупність всіх цілих аналітичних функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову $\exists\, b > 0 \; \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ $\exists\, c_k > 0 \; \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|z^k \varphi(z)| \leq c_k \rho(by)$.

Очевидно, що C^ρ є лінійним простором із звичайними операціями додавання функцій та множення їх на число.

Наприклад, якщо $m_n = n^{n(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(x) \sim \exp\{x^{1/(1-\beta)}\}$, тобто в цьому випадку C^ρ збігається з простором цілих функцій S^β, введеним І.М.Гельфандом і Г.Є.Шиловим у книзі [1].

Введемо збіжність в C^ρ так: *послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset C^\rho$ називається збіжною до нуля, якщо:*

1) послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ рівномірно збігається до нуля у кожній обмеженій області комплексної площини;

2) мають місце оцінки

$$|z^k \varphi_\nu(z)| \leq c_k \rho(by), \;\; z = x + iy \in \mathbb{C}, \;\; k \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі c_k і b не залежать від ν.

Простір C^ρ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів. Позначимо через $C^{\rho,b}$ сукупність тих функцій з простору C^ρ, для яких правильними є нерівності

$$|z^k\varphi(z)| \le c_k\rho(\bar{b}y),\ \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\bar{b} > b$. Інакше, $C^{\rho,b}$ складається з тих цілих функцій φ, які при кожному $\omega > 0$ задовольняють нерівності

$$|z^k\varphi(z)| \le c_{k\omega}\rho((b+\omega)y),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Із сукупністю норм

$$\|\varphi\|_{k\omega} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|z^k\varphi(z)|}{\rho((b+\omega)y)},\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \omega \in \mathbb{N},$$

$C^{\rho,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором. Доведення цієї властивості аналогічне доведенню подібного твердження для просторів типу W в [3].

У просторі C^ρ визначені і є неперервними операції диференціювання, зсуву аргумента, множення на z. Мультиплікатором у цьому просторі є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність

$$|f(z)| \le c_\varepsilon\rho(\varepsilon y), \quad \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. *Для функції $\varphi \in C^\rho$ наступні твердження еквівалентні:*
1) $\exists\, b > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_k > 0\ \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}$: $|z^k\varphi(z)| \le c_k\rho(by)$;
2) $\exists\, b_1 > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_k' > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $|x^k\varphi^{(n)}(z)| \le c_k' b_1^n n! \rho_n$.

Доведення. Доведемо, що з першого твердження випливає друге. Для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ покладемо $\varphi_k(z) = z^k\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Функції φ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору C^ρ і, внаслідок умови 1), задовольняють нерівності $|\varphi_k(z)| \le c_k\rho(by)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$. Згідно з інтегральною формулою Коші

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi_k(z)}{(z-x)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$|\varphi_k^{(n)}(x)| \le \frac{n!}{2\pi}\max_{z\in\Gamma_R}\frac{|\varphi_k(z)|}{|z-x|^{n+1}} \cdot \oint\limits_{\Gamma_R} ds \le$$

$$\le c_k n! b^n \inf_R \frac{\rho(bR)}{b^n R^n} = c_k n! b^n \inf_R \frac{\rho(R)}{R^n} =$$

$$= c_k n! b^n \rho_n, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що $\{\varphi^{(n)}, x^k\varphi\} \subset L_2(\mathbb{R})$, $\forall\,\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$. Справді,

$$\|\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{(n)}(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\{(1+x^2)|\varphi^{(n)}(x)|^2\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{\pi}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi^{(n)}(x)|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi^{(n)}(x)|^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le c_0' n! b^n \rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_0' = \sqrt{\pi(c_0^2 + c_1^2)}$. Аналогічно

$$\|x^k\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x^k\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{\pi}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}\{(1+x^2)|x^k\varphi(x)|^2\}\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{\pi(c_k^2 + c_{k+1}^2)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Зазначимо, що послідовність $\{c_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ є зростаючою, тобто $c_k \le c_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Справді, із нерівностей

$$|x^k\varphi(x)| \le c_k, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+,$$

випливає, що

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+ :\ \exists \sup_{|x|\ge 1}\{|x^k\varphi(x)|\},$$

$$\sup_{|x|\ge 1}\{|x^k\varphi(x)|\} = p_k \le c_k.$$

Нехай $p_k < c_k$. Візьмемо $\varepsilon > c_k - p_k$. Для цього ε знайдеться x_ε: $|x_\varepsilon| \ge 1$ таке, що $|x_\varepsilon^k \varphi(x_\varepsilon)| > p_k - \varepsilon$. Тоді

$$c_k < p_k + \varepsilon < |x_\varepsilon^k \varphi(x_\varepsilon)| + \varepsilon \le |x_\varepsilon^{k+1} \varphi(x_\varepsilon)| +$$

$$+\varepsilon \le \sup_{|x|\ge 1} |x^{k+1}\varphi(x)| + \varepsilon = c_{k+1} + \varepsilon.$$

Отже, $c_k \le c_{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$. Випадок $p_k = c_k$ розглядається аналогічно. Урахувавши це зауваження дістанемо, що

$$\|x^k\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c_k^{'}, \quad c_k^{'} = \sqrt{2\pi}c_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Користуючись формулою Лейбніца для диференціювання добутку двох функцій та нерівністю Коші—Буняковського знайдемо, що

$$\|x^k\varphi^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \left(x^k\varphi^{(n)}(x), x^k\varphi^{(n)}(x)\right)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \left|\left(\left[x^{2k}\varphi^{(n)}(x)\right]^{(n)}, \varphi(x)\right)_{L_2(\mathbb{R})}\right| =$$

$$= \Big|\sum_{j=0}^{r} C_n^j \frac{(2k)!}{(2k-j)!}\Big(x^{2k-j}\varphi^{(2n-j)}(x),$$

$$\varphi(x)\Big)_{L_2(\mathbb{R})}\Big| = \Big|\sum_{j=0}^{r} C_n^j \frac{(2k)!}{(2k-j)!}\Big(x^{2k-j}\varphi(x),$$

$$\varphi^{(2n-j)}(x)\Big)_{L_2(\mathbb{R})}\Big| \le \sum_{j=0}^{r} \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2k)!}{(2k-j)!}\times$$

$$\times \|x^{2k-j}\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \cdot \|\varphi^{(2n-j)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le c_0^{'} \sum_{j=0}^{r} \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2k)!}{(2k-j)!}\times$$

$$\times c_{2k-j}^{'} b^{2n-j}(2n-j)!\rho_{2n-j}, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $r = \min\{2k, n\}$.

Розглянемо послідовність $\gamma_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Із властивості 4) послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що послідовність $\{\gamma_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову: $\gamma_n \le \alpha\gamma_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$. Справді,

$$\gamma_n = n!\rho_n \le \alpha n!\rho_{n+1} \le \alpha(n+1)n!\rho_{n+1} =$$

$$= \alpha(n+1)!\rho_{n+1} = \alpha\gamma_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді $\forall\, j:\ 0 \le j \le r$

$$\gamma_{2n-j} \le \alpha\gamma_{2n-j+1} \le \alpha^2\gamma_{2n-j+2} \le \ldots \le$$

$$\le \alpha^j\gamma_{2n} \le \alpha^r\gamma_{2n} \le \alpha^{2k+n}\gamma_{2n}.$$

Отже,

$$(2n-j)!\rho_{2n-j} \le \alpha^{2k+n}\gamma_{2n} = (2n)!\alpha^{2k+n}\rho_{2n} \le$$

$$\le (2n)!\alpha^{2k+n}\rho_n^2, \quad \forall\, j:\ 0 \le j \le r.$$

Урахувавши вказані оцінки, а також те, що

$$c_{2k-j}^{'} \le c_{2k}^{'}, \quad \forall\, j:\ 0 \le j \le r;$$

$$n!(2n)! = 2^n(n!)^2,$$

прийдемо до нерівностей:

$$\|x^k\varphi^{(n)}(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le c_0^{'}(2k)!c_{2k}^{'} \cdot 2^n(n!)^2 b^{2n} \cdot \alpha^{2k+n}\rho_n^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \le$$

$$\le c_k^{''2} b_1^{2n}(n!)^2\rho_n^2, \quad c_k^{''} = \sqrt{c_0^{'}e(2k)!c_{2k}^{'}},$$

$$b_1 = b\sqrt{2\alpha}, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки півнорми

$$p_{k,n}^{'}(\varphi) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k\varphi^{(n)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \varphi \in C^\rho,$$

$$p_{k,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

еквівалентні, то цим доведено, що з умови 1) випливає умова 2).

Навпаки, нехай нескінченно диференційовна функція $\varphi:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умову 2). Тоді її аналітично можна продовжити у всю комплексну площину $\mathbb{C}$. Дійсно, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x+\Delta x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}(\Delta x)^k +$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}(\Delta x)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $|\xi - x| < |\Delta x|$, допускає оцінку

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!}|\Delta x|^n \le c_0^{'} b_1^n \rho_n |\Delta x|^n =$$

$$= c_0^{'}\Big(b_1|\Delta x|\sqrt[n]{\rho_n}\Big)^n.$$

Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall\, n \geq n_0 :\ \rho_n < \varepsilon^n.$$

По заданому $b_1 > 0$ та довільно фіксованому $|\Delta x| > 0$ візьмемо $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(b_1|\Delta x|)^{-1}$. Тоді

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!}|\Delta x|^n \leq c_0^{'}\frac{1}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, залишковий член у формулі Тейлора прямує до нуля при довільному $\Delta x \in \mathbb{C}$, тому φ є цілою аналітичною функцією. Таким чином, для $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$x^k\varphi(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}x^k\varphi^{(n)}(x),$$

причому

$$|x^k\varphi(x+iy)| \leq c_k^{'}\sum_{n=0}^{\infty}|y|^n b_1\rho_n.$$

Оскільки

$$|y|^n b_1^n\rho_n = |y|^n b_1^n \inf_{y\neq 0}\frac{\rho(y)}{|y|^n} =$$

$$= |y|^n b_1^n \inf_{y\neq 0}\frac{\rho(2b_1y)}{(2b_1|y|)^n} \leq |y|^n b_1^n\frac{\rho(2b_1y)}{2^n b_1^n|y|^n} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\rho(2b_1y) = \frac{1}{2^n}\rho(by),$$

$$b = 2b_1, n \geq 1, y \neq 0,$$

то для $y \neq 0$

$$|x^k\varphi(x+iy)| \leq c_k^{'}\rho(by)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = c_k\rho(by),$$

де $c_k = 2c_k^{'}$. Зазначимо, що для $y = 0$ ця нерівність є очевидною. Теорема доведена.

Зауваження. *Якщо $\rho(y) = \exp\{\Omega(y)\}$, де Ω — диференційовна, невід'ємна, парна на $\mathbb{R}$ і зростаюча на $[0,+\infty)$ функція, то простір C^ρ збігається з простором W^Ω, введеним в [3]; при цьому*

$$\rho_n = \inf_{y\neq 0}\frac{\exp\{\Omega(y)\}}{|y|^n} = \gamma_n^{-n}\exp\{\Omega(\gamma_n)\},$$

γ_n — розв'язок рівняння $y\Omega'(y) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Простір C_γ. Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{l_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє властивостями 1)—3) (див. п.1) і покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_n \dfrac{l_n}{|x|^n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція γ є невід'ємною, парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка монотонно спадає на проміжку $[1,+\infty)$ і монотонно зростає на проміжку $(-\infty;-1]$, $\gamma(x) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Крім того, із нерівності (1) випливає, що

$$\exists c_0^{'} > 0\ \exists c^{'} > 0\ \forall\, x : |x| > 1 :\ \gamma(x) \leq c_0^{'}e^{-c^{'}|x|}.$$

Наприклад, якщо $l_n = n^{n\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, то γ задовольняє нерівності [1]:

$$\exp\Big\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\Big\} \leq \gamma(x) \leq c\exp\Big\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\Big\},$$

$$c = \exp\Big\{\frac{\alpha e}{2}\Big\}.$$

Символом C_γ позначимо сукупність всіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists\, a > 0\ \ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \ \exists\, c_q > 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq c_q\gamma(ax).$$

Очевидно, що C_γ — лінійний простір (із звичайними операціями). Простір C_γ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів. Позначимо через $C_{\gamma,a}$ сукупність тих функцій $\varphi \in C_\gamma$, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq c_q\gamma(\bar{a}x),\ q \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R},$$

з довільною сталою $0 < \bar{a} < a$. Іншими словами, $C_{\gamma,a}$ складається з тих функцій φ простору C_γ, для яких при кожному $0 < \delta < a$ справджуються нерівності

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq c_{q\delta}\cdot\gamma((a-\delta)x),\ q \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Покладемо

$$M_p(x) = \Big[\gamma\Big(a\Big(1-\frac{1}{p}\Big)x\Big)\Big]^{-1},\ \ p \in \{2,3,...\}.$$

Функції M_p утворюють зростаючу послідовність; при цьому $C_{\gamma,a}$ перетворюється в злічено нормований простір з нормами

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0\le q\le p}} \{M_p(x)|\varphi^{(q)}(x)|\}.$$

Отже, $C_{\gamma,a}$ збігається з простором $K\{M_p\}$, введеним в [1] з фіксованою послідовністю вагових функцій M_p, тобто до простору $C_{\gamma,a}$ можна застосувати всі результати, що стосуються загальних просторів $K\{M_p\}$. $C_{\gamma,a}$ з нормами $\|\cdot\|_p$ є повним досконалим зліченно нормованим простором, а $C_\gamma = \cup C_{\gamma,a}$ по всім $a \in \left\{1, \dfrac{1}{2}, ...\right\}$. Як і у випадку простору C^ρ має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Для функції $\varphi \in C_\gamma$ наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists\, a > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_q > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi^{(q)}(x)| \le c_q\gamma(ax);$$

2) $\exists\, a_1 > 0\ \forall q \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_q^{'} > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \le c_q^{'}a_1^k\gamma_k \le c_q^{'}a_1^k l_k,$$

де

$$\gamma_k = \sup_{x\neq 0}\{|x|^k\gamma(x)\} = \sup_{|x|\ge 1}\{|x|^k\gamma(x)\}.$$

Зауваження 2. *З теореми 2, а також із результатів, одержаних в [4] випливає, що якщо покласти $l_k = \nu_k^k \exp\{-M(\nu_k)\}$, де ν_k — розв'язок рівняння $xM'(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, за умови, що M — диференційовна, невід'ємна, парна на $\mathbb{R}$ і зростаюча на $[0,+\infty)$ функція, то простір C_γ збігається з простором W_M, введеним в [3], тобто*

$$\Big(\varphi \in W_M\Big) \ \Leftrightarrow\ \Big(\exists\, a > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_q > 0$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}:\ |\varphi^{(q)}(x)| \le c_q \exp\{-M(ax)\}\Big).$$

У просторі C_γ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання та операція зсуву аргумента.

Мультиплікатором у просторі C_γ є нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція f, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівності

$$|f^{(q)}(x)| \le c_{q\varepsilon}(\gamma(\varepsilon x))^{-1},\ q \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Справді, нехай $\varphi \in C_\gamma$. Тоді

$$\exists\, a > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_q > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}:$$

$$|\varphi^{(q)}(x)| \le c_q\gamma(ax).$$

Отже,

$$|(f(x)\varphi(x))^{(q)}| \le \sum_{j=0}^{q} C_q^j|f^{(j)}(x)|\cdot|\varphi^{(q-j)}(x)| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{q} C_q^j c_{j\varepsilon}c_{q-j}\frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)} \equiv C_q^{'}\frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)},$$

де $c_q^{'} = \sum\limits_{j=0}^{q} C_q^j c_{j\varepsilon}c_{q-j}$. Візьмемо $\varepsilon \in (0,a)$ і доведемо, що

$$\exists\, c > 0\ \exists\, a_1 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}:\ \frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)} \le c\gamma(a_1x).$$

Оскільки

$$\gamma(x) = \inf_n \frac{l_n}{|x|^n} = \frac{1}{\sup\limits_n \dfrac{|x|^n}{l_n}},\ |x| \ge 1,$$

то

$$\sup_n \frac{|\varepsilon x|^n}{l_n} = \frac{1}{\gamma(\varepsilon x)},\quad |x| \ge \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon_0 > 0$ знайдеться номер $n_0 = n_0(\varepsilon_0, x)$ такий, що

$$\frac{1}{\gamma(\varepsilon x)} < \frac{|\varepsilon x|^{n_0}}{l_{n_0}} + \varepsilon_0,\quad |x| \ge \frac{1}{\varepsilon}.$$

Крім того, $\gamma(ax) \le \dfrac{l_n}{|ax|^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$, $|x| \ge \dfrac{1}{a}$. Тоді

$$\frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)} \le \frac{l_n}{|ax|^n}\left(\frac{|\varepsilon x|^{n_0}}{l_{n_0}} + \varepsilon_0\right) =$$

$$= \frac{l_n\cdot|\varepsilon x|^{n_0}}{|ax|^n l_{n_0}} + \varepsilon_0\frac{l_n}{|ax|^n} \le$$

$$\leq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{l_n\cdot|\varepsilon x|^{n_0}}{|ax|^n l_{n_0}}\right\}+\varepsilon_0\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{l_n}{|ax|^n}=$$

$$=\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{l_n\cdot|\varepsilon x|^{n_0}}{|ax|^n l_{n_0}}\right\}+\varepsilon_0\gamma(ax).$$

Оскільки

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{l_n\cdot|\varepsilon x|^{n_0}}{|ax|^n l_{n_0}}\right\}\leq \inf_{n\geq n_0}\left\{\frac{l_n\cdot|\varepsilon x|^{n_0}}{|ax|^n l_{n_0}}\right\},$$

то вважатимемо, що $n \geq n_0$. Нехай $\varepsilon<\min\{1,a\}$. Тоді

$$\frac{l_n\cdot|\varepsilon x|^{n_0}}{|ax|^n l_{n_0}}=\frac{l_n}{\left|\dfrac{a}{\varepsilon}x\right|^{n_0}\cdot|ax|^{n-n_0}l_{n_0}}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon^{n_0}l_n}{|ax|^{n-n_0}l_{n_0}}<\frac{\omega^{n_0}l_n}{|ax|^{n-n_0}l_{n_0}},$$

$$\omega=\begin{cases}1, & a\leq 1,\\ a, & a>1\end{cases}$$

(тут враховано, що $\left|\dfrac{a}{\varepsilon}x\right|>|x|\geq\dfrac{1}{\varepsilon}$). Оцінимо вираз

$$\inf_{n\geq n_0}\frac{l_n}{|ax|^{n-n_0}l_{n_0}}=\inf_{p\in\mathbb{Z}_+}\frac{l_{p+n_0}}{|ax|^p l_{n_0}}.$$

Послідовність $\{l_p,\, p\in\mathbb{Z}_+\}$ володіє властивостями 2), 3), тобто

$$\exists\, c>0\ \exists\, M>1:\ l_{n_0+p}\leq cM^{n_0+p-1}l_{n_0+p-1}=$$

$$=cM^{n_0}M^{p-1}l_{n_0+p-1},\ \forall\, p\geq 1;$$

$$\forall\, h>0\ \exists\, c_h>0:\ l_{n_0}\geq c_h h^{n_0}.$$

Візьмемо h таке, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{c(M\omega)^{n_0}}{h}\leq 1$. Тоді

$$\frac{\omega^{n_0}l_{p+n_0}}{l_{n_0}}\leq\frac{c}{c_h}\frac{(M\omega)^{n_0}\cdot M^{p-1}}{h^{n_0}}l_{n_0+p-1}\leq$$

$$\leq\frac{M^{p-1}}{c_h h^{n_0-1}}l_{n_0+p-1},$$

$$l_{n_0+p-1}\leq cM^{n_0+p-2}l_{n_0+p-2},$$

тобто

$$\frac{\omega^{n_0}l_{p+n_0}}{l_{n_0}}\leq\frac{M^{p-1}}{c_h h^{n_0-1}}\cdot c(M\omega)^{n_0}\cdot M^{p-2}\cdot l_{n_0+p-2}\leq$$

$$\leq\frac{M^{p-1}\cdot M^{p-2}}{c_h h^{n_0-2}}l_{n_0+p-2}$$

і т.д. Остаточно прийдемо до нерівностей

$$\frac{\omega^{n_0}l_{p+n_0}}{l_{n_0}}\leq\frac{\omega^{n_0}}{c_h}M^{p-1}\cdot M^{p-2}\cdot\ldots\cdot M^{p-n_0}l_p\leq$$

$$\leq\frac{1}{c_h}(M\omega)^{n_0p-(1+2+\ldots+n_0)}l_p\leq$$

$$\leq\frac{1}{c_h}\frac{(h/c)^p}{(h/c)^{(1+2+\ldots+n_0)/n_0}}l_p\leq$$

$$\leq\frac{1}{c_h}\frac{(h/c)^p}{(h/c)}l_p=\frac{c}{hc_h}\left(\frac{h}{c}\right)^p l_p,\ p\in\mathbb{Z}_+$$

(тут враховано, що $h/c\geq 1$). Отже,

$$\omega^{n_0}\inf_{n\geq n_0}\frac{l_n}{l_{n_0}\cdot|ax|^{n-n_0}}\leq\tilde{c}\inf_{p\in\mathbb{Z}_+}\frac{\tilde{h}^p l_p}{|ax|^p}=$$

$$=\tilde{c}\inf_{p\in\mathbb{Z}_+}\frac{l_p}{\left|\dfrac{a}{\tilde{h}}x\right|^p},$$

де $\tilde{c}=\dfrac{c}{h\cdot c_h}$, $\tilde{h}=\dfrac{h}{c}$. Звідси випливає, що

$$\frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)}\leq\tilde{c}\gamma\left(\frac{a}{\tilde{h}}x\right)+\varepsilon_0\gamma(ax)\leq c_0\gamma(a_1x),$$

де $c_0=\tilde{c}+\varepsilon_0$, $a_1=\min\left\{\dfrac{a}{\tilde{h}},a\right\}$. Нехай $\varepsilon<\min\{1,a_1\}$, $a_1\leq a$. Оскільки $1/\varepsilon>1/a_1$, $1/\varepsilon>1/a$, то остання нерівність правильна для x: $|x|\geq 1/\varepsilon$. Якщо ж $|x|<1/\varepsilon$, то $\gamma(\varepsilon x)=\gamma(ax)=\gamma(a_1x)=1$. Отже, для всіх $x\in\mathbb{R}$ має місце нерівність $\dfrac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)}\leq c\gamma(a_1x)$, де $c=\max\{1,c_0\}$. Таким чином,

$$|(f(x)\varphi(x))^{(q)}|\leq\tilde{c}_q^{'}\cdot\gamma(a_1x),\quad \tilde{c}_q^{'}=c_q^{'}\cdot c,$$

тобто $f\cdot\varphi\in C_\gamma$, що і потрібно було довести. За допомогою аналогічних міркувань доводимо, що операція $C_\gamma\ni\varphi\mapsto f\varphi\in C_\gamma$ є неперервною в цьому просторі.

3. Простір C_γ^ρ. Нехай ρ та γ — функції, побудовані у попередніх пунктах за послідовностями $\{m_n,\, n\in\mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_n,\, n\in\mathbb{Z}_+\}$ відповідно. Символом C_γ^ρ позначимо сукупність всіх цілих функцій $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists\, a>0\ \exists\, b>0\ \exists\, c>0\ \forall\, z=x+iy\in\mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by).$$

Збіжність в C_γ^ρ введемо так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset C_\gamma^\rho$ називається збіжною до нуля, якщо вона рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому мають місце нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by),\ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν.

Простір C_γ^ρ також можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $C_{\gamma,a}^{\rho,b}$ по всім $a \in \left\{\frac{1}{n}, n \ge 1\right\}$, $b \in \mathbb{N}$, де $C_{\gamma,a}^{\rho,b}$ складається з тих функцій $\varphi \in C_\gamma^\rho$, для яких правильними є нерівності

$$|\varphi(x+iy)| \le c\gamma(\bar{a}x)\rho(\bar{b}y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\bar{a}$ —довільна стала, менша за a, $\bar{b}$ — довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in C_{\gamma,a}^{\rho,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma\Big(a\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)x\Big)\rho((b+\omega)y)},$$

$$p \in \{2, 3, ...\}, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

то з цими нормами простір $C_{\gamma,a}^{\rho,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором.

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Для функції $\varphi \in C_\gamma^\rho$ еквівалентними є твердження:*

1) $\exists\, a > 0\ \exists\, b > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, z = x + iy$: $|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by)$;

2) $\exists\, a_1 > 0\ \exists\, b_1 > 0\ \exists\, c_1 > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le c_1 a_1^k b_1^n \gamma_k n! \rho_n \le c_1 a_1^k b_1^n l_k n! \rho_n.$$

Зауваження 3. *Із теореми 3, а також результатів, одержаних в [4] випливає, що якщо покласти $\rho_n = \gamma_n^{-n}\exp\{\Omega(\gamma_n)\}$, $l_k = \nu_k^k \exp\{-M(\nu_k)\}$, де γ_n — розв'язок рівняння $x\Omega'(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ν_k — розв'язок рівняння $xM'(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, за умови, що Ω, M — диференційовні, невід'ємні, парні на $\mathbb{R}$ і зростаючі на $[0,\infty)$ функції, то простір C_γ^ρ збігається з простором W_M^Ω, введеним в [3], тобто*

$$\Big(\varphi \in W_M^\Omega\Big) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \Big(\exists\, a, b, c > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)| \le c\exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}\Big).$$

Зазначимо, що простори C^ρ, C_γ, C_γ^ρ пов'язані між собою співвідношенням: $C_\gamma^\rho = C_\gamma \cap C^\rho$. Звідси випливає, що в C_γ^ρ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргумента. Мультиплікатором у просторі C_γ^ρ є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність

$$|f(z)| \le c_\varepsilon\Big(\gamma(\varepsilon x)\Big)^{-1}\rho(\varepsilon y),\ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

або на R нерівності

$$|f^{(n)}(x)| \le c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n n! \rho_n\Big(\gamma(\varepsilon x)\Big)^{-1},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307с.

2. *Бабенко К.И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций // Труды Моск. матем. общества.— 1956.— Т.5.— С.523—542.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274с.

4. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С. 21—26.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.2001