УДК 517.51

©2002 р. В.Г. Герасимчук, В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці

РІЗНОВИДИ ЛІПШИЦЕВОСТІ І МНОЖИНИ ТОЧОК РОЗРИВУ НАРІЗНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Отримано досить загальні теореми про малість множини точок розриву функцій, які неперервні відносно першої змінної і ліпшицеві в тому чи іншому сенсі відносно другої. Зокрема, встановлено, що локально проективно ніде не щільні F_σ-множини на координатній площині і тільки вони є множинами точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій двох дійсних змінних.

It is obtained rather general theorems on the smallness of the discontinuity points set of functions which are continuous with respect to the first variable and are some Lipchitz type with respect to the second one. In particular, it is proved that a subset of the coordinate plain is the discontinuity points set of some separately continously differentiable function of two real variable if and only if it is a locally projectively nowhere dense F_σ-subset.

1. Задача про опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій вивчена досить добре, зокрема, вона розв'язана для функцій, заданих на добутках метризовних просторів [1]. Така ж задача природно виникає і для нарізно диференційовних функцій, але, наскільки нам відомо, вона не розв'язана навіть у найпростішому випадку для функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Множини точок розриву нарізно диференційовних функцій мають свою специфіку. Ще К.Беґель [2] з'ясував, що у функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної і диференційовна відносно другої (тобто функції з класу CD), множина $D(f)$ її точок розриву ніде не щільна на площині. Далі в [3, теорема 7.3.2.] було показано, що для функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з класу CD для кожного $y \in \mathbb{R}$ множина $D_y(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D(f)\}$ ніде не щільна на числовій прямій.

Виявляється, ці результати можна значно розширити, використавши деякі різновиди ліпшицевості, а саме, ліпшицевість в точці і на множині та локальну ліпшицевість. У цій статті ми одержуємо досить загальні теореми (див. теореми 1-4) про малість множини $D(f)$ для відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно першої змінної і ліпшицеві у тому чи іншому сенсі відносно другої. Перша з цих теорем є далеким розвитком згаданого результату Беґеля. З теорем 2 і 4 ми відповідно виводимо такі цікаві наслідки: а) для кожної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з класу CD і кожної неперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множина $D_g(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, g(x)) \in D(f)\}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$; б) множина точок розриву будь-якої нарізно неперерно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є локально проективно ніде не щільною. Ми показуємо також, що твердження б) для нарізно диференційовних функцій не вірне.

Р.Кешнер [4] частково розв'язав обернену задачу, встановивши, що для кожної проективно ніде не щільної F_σ-множини E в кубі $[0, 1]^n$ існує нарізно нескінченно диференційовна функція $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$, така, що $D(f) = E$. Ми розвиваємо цей результат, з'ясовуючи, що кожна локально проективно ніде не щільна F_σ-множина $E \subseteq \mathbb{R}^n$ є множиною точок розриву деякої нарізно нескінченно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Таким чином, для нарізно неперервно диференційовних функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ одержується повний опис множин точок розриву.

Зауважимо, що попередні результати на цю тему анансовано в [5].

2. Почнемо з розгляду різних типів лі-

пшицевості відображень метричних просторів.

Нехай X і Y – метричні простори. Відстань між точками x' і x'' в X позначимо через $|x'-x''|_X$, а між точками y' і y'' в Y – через $|y'-y''|_Y$. Розглянемо відображення $f: X \to Y$. Ми кажемо, що f є *ліпшицевим у точці* $a \in X$, якщо існують окіл U точки a в X і число γ, такі, що $|f(x)-f(a)|_Y \leq \gamma|x-a|_X$, як тільки $x \in U$. Відображення f називається *ліпшицевим на множині* $A \subseteq X$, якщо існує така константа $\gamma > 0$, що $|f(x')-f(x'')|_Y \leq \gamma|x'-x''|_X$ для всіх $x', x'' \in A$. Якщо $f: X \to Y$ ліпшицеве на X, то f називається просто *ліпшицевим*. Далі, f – *локально ліпшицеве на множині* A, якщо для кожної точки $x \in A$ існує її окіл U_x в X, такий, що f є ліпшицевим на U_x. Нарешті $f: X \to Y$ – *локально ліпшицеве*, якщо f – локально ліпшицеве на X.

Нехай X і Y – нормовані простори. Ясно, що з диференційовності за Фреше в точці $a \in X$ відображення $f: X \to Y$ випливає його ліпшицевість в цій точці. Якщо ж f диференційовне за Ґато на X і похідна Ґато локально обмежена, то з теореми про середнє [6, с.535] випливає, що f є локально ліпшицеве. Зокрема, диференційовні функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є ліпшицевими в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, а неперервно диференційовні – локально ліпшицевими.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *берівським*, якщо кожна непорожня відкрита множина в X є множиною другої категорії. Відомо [3, твердження 2.1.1], що простір X буде берівським тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності замкнених множин F_n, яка покриває простір X, множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} F_n$ всюди щільна в X.

Лема 1.*Нехай X і Y – метричні простори, причому X – берівський, і $f: X \to Y$ – відображення, яке є ліпшицевим у кожній точці простору X. Тоді існує така відкрита всюди щільна множина G в X, що f є локально ліпшицевим на G.*

Доведення. Оскільки з ліпшицевості відображення в точці a випливає його неперервність у цій точці, то відображення f неперервне. Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$F_n = \{x \in X : (\forall u \in X)(|u-x|_X < 1/n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(u)-f(x)|_Y \leq n|u-x|_X)\}.$$

Легко перевірити, що множини F_n замкнені.

Нехай $U_n = \mathrm{int} F_n$. З ліпшицевості відображення f у кожній точці простору X випливає, що

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Оскільки простір X берівський, то відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ буде всюди щільною в X. Доведемо, що f локально ліпшицеве на G. Нехай $a \in G$. Тоді існує номер n такий, що $a \in U_n$. Нехай U – куля з центром у точці a з радіусом, меншим ніж $1/2n$, яка міститься в U_n. Якщо $x', x'' \in U$, то $|x'-x''|_X \leq |x'-a|_X + |a-x''|_X < 1/n$. Крім того, $x' \in U_n$. Тоді $x' \in F_n$, отже,

$$|f(x')-f(x'')|_Y \leq n|x'-x''|_X.$$

Таким чином, відображення f ліпшицеве на околі U.

Лема 2. *Нехай X і Y – метричні простори, K – непорожня компактна множина в просторі X і $f: X \to Y$ – локально ліпшицеве відображення. Тоді існує відкритий окіл U множини K в X такий, що f ліпшицеве на U.*

Доведення. З умови випливає, що відображення f неперервне. В такому разі, $f(K)$ – непорожня компактна множина в Y, отже, вона має скінчений діаметр d_0. Нехай $d > d_0$ і $d - d_0 = \varepsilon$. Для кожної точки $x \in K$ існують відкритий окіл U_x точки x в X і число $\gamma_x > 0$, такі, що

$$|f(x')-f(x'')|_Y \leq \gamma_x|x'-x''|_X,$$

як тільки $x', x'' \in U_x$, і $|f(u)-f(x)|_Y < \varepsilon/2$ при $u \in U_x$. З відкритого покриття $\{U_x : x \in K\}$ компактної множини K виділимо скінченне підпокриття $\mathcal{U} = \{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$ і розглянемо відкритий окіл $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ множини K. Нехай $x', x'' \in G$. Тоді $x' \in U_{x_i}$ і $x'' \in U_{x_j}$ для деяких $i, j = 1, ..., n$. В такому разі,

$$|f(x') - f(x'')|_Y \leq |f(x') - f(x_i)|_Y +$$

$$+|f(x_i) - f(x_j)|_Y + |f(x_j) - f(x'')|_Y <$$

$$< \varepsilon/2 + d_0 + \varepsilon/2 = d_0 + \varepsilon = d.$$

Нехай δ – число Лебеґа покриття $\mathcal{U}$, тобто таке додатне число, що система куль $\{B(x, \delta) : x \in K\}$ вписана в $\mathcal{U}$. Існування числа Лебеґа випливає з компактності множини K [7, с.409]. Позначимо через $d(x, K)$ відстань від точки x до множини K у просторі X і розглянемо відкриту множину

$$U = \{x \in G : d(x, K) < \delta/2\}.$$

Покажемо, що множина U є шуканою. А саме, покладемо $\gamma = \max\{\gamma_{x_1}, ..., \gamma_{x_n}, 2d/\delta\}$ і доведемо, що f є ліпшицевим на U з константою γ. Нехай $x', x'' \in U$ і $|x' - x''|_X < \delta/2$. Існує таке $x^* \in K$, що $|x' - x^*|_X < \delta/2$. Знайдемо такий номер $k = 1, ..., n$, що $B(x^*, \delta) \subseteq U_{x_k}$. Ясно, що $x' \in B(x^*, \delta)$. Крім того,

$$|x'' - x^*|_X \leq |x'' - x'|_X + |x' - x^*|_X <$$

$$< \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Таким чином, $x', x'' \in U_{x_k}$. Тоді за побудовою

$$|f(x') - f(x'')|_Y \leq \gamma_{x_k}|x' - x''|_X \leq \gamma|x' - x''|_X.$$

Нехай $x', x'' \in U$ і $|x' - x''|_X \geq \delta/2$. Тоді

$$|f(x') - x''|_Y \leq d = 2d/\delta \cdot \delta/2 \leq \gamma|x' - x''|_X$$

Таким чином, $|f(x') - f(x'')|_Y \leq \gamma|x' - x''|_X$, як тільки $x', x'' \in U$, що й треба було довести.

3. Перейдемо до узагальнення згаданого в п.1 результату Беґеля. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Лема 3. *Нехай X – топологічний простір, Y і Z – метричні простори, A – всюди щільна множина в просторі X і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної, причому всі відображення $f^x : Y \to Z$ для $x \in A$ є ліпшицеві з однією і тією ж константою γ. Тоді*

а) $|f(x, y') - f(x, y'')|_Z \leq \gamma|y' - y''|_Y$ для всіх $x \in X$ і $y', y'' \in Y$;

б) f – неперервне відображення.

Доведення. а) Доведення легко отримати з допомогою граничного переходу.

б) Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення $f_{y_0} : X \to Z$ неперервне в точці x_0, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що $|f_{y_0}(x) - f_{y_0}(x_0)|_Z < \varepsilon/2$, як тільки $x \in U$. Нехай V – відкрита куля з центром в точці y_0 і радіусом $\varepsilon/2\gamma$ у просторі Y. Тоді на основі а) для $x \in U$ і $y \in V$ матимемо

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)|_Z \leq |f(x, y) - f(x, y_0)|_Z +$$

$$+|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|_Z <$$

$$< \gamma|y - y_0|_Y + \varepsilon/2 < \gamma \cdot \varepsilon/2\gamma + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким чином, f неперервне в точці p_0.

Лема 4. *Нехай X - топологічний простір, Y, Z – метричні простори, $f : X \times Y \to Z$– неперервне відносно першої змінної відображення, $L, \delta > 0$, $\gamma(x, y; \delta) = \sup\left\{\frac{|f(x,y) - f(x,y')|_Z}{|y - y'|_Y} : 0 < |y - y'|_Y < \delta\right\}$ і $A = \{(x, y) \in X \times Y : \gamma(x, y; \delta) > L\}$. Тоді $D(f) \subseteq \overline{\mathrm{int} A}$.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0)$ – довільна точка розриву відображення f, $W_0 = U_0 \times V_0$ – довільний відкритий окіл точки p_0 в $X \times Y$. Покладемо $\varepsilon = \omega_f(p_0)$. Зрозуміло, що $\varepsilon > 0$. Виберемо відкритий окіл U_1 точки x_0 в X, такий, що $U_1 \subseteq U_0$ і $\omega_{f_{y_0}}(U_1) < \varepsilon/8$. Позначимо через V відкриту кулю в просторі Y з центром в точці y_0 і радіусом $\eta = \min\{\delta/2, \varepsilon/48L\}$. Оскільки $\omega_f(U_1 \times V) \geq \varepsilon$, то існує точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U_1 \times V$ така, що $|f(p_1) - f(p_0)|_Z > \varepsilon/3$. Візьмемо відкритий окіл U точки x_1 в просторі X такий, що $U \subseteq U_1$ і $\omega_{f_{y_1}}(U) < \varepsilon/8$.

Нехай $p = (x, y)$ – довільна точка з множини $W = U \times V$. Зауважимо, що

$$|f(x, y_0) - f(x, y_1)|_Z \geq |f(p_1) - f(p_0)|_Z -$$

$$-|f(x_0, y_0) - f(x, y_0)|_Z - |f(x_1, y_1) - f(x, y_1)|_Z >$$
$$> \varepsilon/3 - \varepsilon/8 - \varepsilon/8 = \varepsilon/12.$$

З нерівності трикутника випливає, що існує $i \in \{0, 1\}$, таке, що $|f(x, y) - f(x, y_i)|_Z > \varepsilon/24$. Оскільки точки y та y_i належать відкритій кулі радіуса η в просторі Y, то $|y - y_i|_Y < 2\eta \leq \delta$. Крім того,

$$\frac{|f(x, y) - f(x, y_i)|_Z}{|y - y_i|_Y} > \frac{\varepsilon/24}{2\eta} = \frac{\varepsilon}{48\eta} \geq L.$$

Отже, $p \in A$. Таким чином, $W \subseteq A$, тобто $W \subseteq \text{int}A$. Але $W \cap W_0 \neq \emptyset$, адже $(x_1, y_0) \in W \cap W_0$, тому $\text{int}A \cap W_0 \neq \emptyset$ і $p_0 \in \overline{\text{int}A}$.

Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, Y – метричний простір, причому $X \times Y$ – берівський, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, неперервне відносно першої змінної на $X \times Y$ і ліпшицеве відносно другої змінної в кожній точці залишкової в $X \times Y$ множини E. Тоді $D(f)$ – ніде не щільна в $X \times Y$ множина.*

Доведення. Припустимо, що множина $D(f)$ не є ніде не щільною, тобто існує непорожня відкрита множина W в просторі $X \times Y$ така, що $W \subseteq \overline{D(f)}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $A_n = \{(x, y) \in X \times Y : \gamma(x, y; 1/n) > n\}$. Згідно з лемою $D(f) \subseteq \overline{\text{int}A_n}$, тому $W \subseteq \overline{\text{int}A_n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, множини $W \setminus \text{int}A_n$ ніде не щільні, а множина $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{int}A_n$ залишкова в W. Оскільки $X \times Y$ берівський простір, то A є множиною другої категорії в $X \times Y$ і перетин $A \cap E$ непорожній. З іншого боку, в кожній точці множини A функція f не задовольняє умову Ліпшиця відносно другої змінної. Тому $A \cap E = \emptyset$.

Наслідок 1. *Нехай X – берівський простір, Y – нормований простір, такий, що добуток $X \times Y$ – берівський, Z – нормований і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної і диференційовне за Фреше відносно другої змінної. Тоді множина $D(f)$ ніде не щільна в $X \times Y$.*

У тому випадку, коли метричний простір Y ще й сепарабельний, беровість добутку $X \times Y$ рівносильна беровості співмножників, адже Y задовольняє другу аксіому зліченності [7, с.379]. Крім того, у цьому випадку можна дати інше доведення теореми 1, яке ми зараз наведемо.

Нехай $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – база топології Y. Згідно з лемою 1 кожне відображення $f^x : Y \to Z$ буде локально ліпшицевим на деякій відкритій всюди щільній множині $H(x)$ у просторі Y. Нехай U і V – відкриті непорожні множини відповідно в просторах X і Y. Для $m, n \in \mathbb{N}$ покладемо $V_{m,n}(x) = \{y \in Y : (y \in V_m \subseteq V) \, і \, (\forall y', y'' \in V_m)(|f^x(y') - f^x(y'')|_Z \leq \leq n|y' - y''|_Y)\}$ і $A_{m,n} = \{x \in X : V_{m,n}(x) \neq \emptyset\}$ Покажемо, що $X = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$. Справді, нехай $x \in X$. Тоді $B = H(x) \cap V \neq \emptyset$, бо $H(x)$ всюди щільна в Y. Нехай $b \in B$. Оскільки f^x локально ліпшицеве на $H(x)$ і $b \in H(x)$, то існує такий відкритий окіл W точки b у просторі Y, що $W \subseteq B$ і f^x ліпшицеве на W з константою γ. Візьмемо $n \in \mathbb{N}$, таке, що $n \geq \gamma$. Оскільки $\mathcal{V}$ – база в Y, то існує $m \in \mathbb{N}$, таке, що $b \in V_m \subseteq W$. Зрозуміло, що $b \in V_{m,n}(x)$, отже, $x \in A_{m,n}$.

Нехай $U_{m,n} = \text{int}\overline{A_{m,n}}$. З беровості простору X випливає, що відкрита в X множина $G = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} U_{m,n}$ всюди щільна в X. Тоді $G \cap U \neq \emptyset$, отже, існують такі номери m і n, що $\tilde{U} = U_{m,n} \cap U \neq \emptyset$. Покладемо $\tilde{V} = V_m$ і $\tilde{A} = A_{m,n} \cap \tilde{U}$. Зрозуміло, що $\tilde{A}$ щільна в $\tilde{U}$, звідки випливає, що $\tilde{A} \neq \emptyset$. Тому і $\tilde{V} \neq \emptyset$, причому $\tilde{V} \subseteq V$. Крім того, для будь-якого $x \in \tilde{A}$ і $y', y'' \in \tilde{V}$ виконується нерівність $|f(x, y') - f(x, y'')|_Z \leq n|y' - y''|_Y$. Застосувавши лему 3 до звуження $g = f|_{\tilde{U} \times \tilde{V}}$, ми одержимо, що g неперервне. Оскільки множина $\tilde{U} \times \tilde{V}$ відкрита в $X \times Y$, то і f неперервне в кожній точці з $\tilde{U} \times \tilde{V}$. Таким чином, $(\tilde{U}\times\tilde{V})\cap D(f)=\emptyset$ і $\tilde{U}\times\tilde{V}\subseteq U\times V$, що й треба було довести.

4. Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Для відображень $f : X\times Y\to Z$ і $g : X\to Y$ покладемо

$$D_g(f)=\{x\in X : (x,g(x))\in D(f)\}.$$

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, Y і Z – метричні простори, $g : X\to Y$ – неперервне відображення і $f : X\times Y\to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної, причому для кожного $x\in X$ відображення f^x ліпшицеве в точці $g(x)$. Тоді множина $D_g(f)$ ніде не щільна в X.*

Доведення. Для довільного номера n розглянемо множини $A_n=\{x\in X\colon (\forall y\in Y)\ (|y-g(x)|_Y\le 1/n\Rightarrow |f(x,y)-f(x,g(x))|_Z\le \le n|y-g(x)|_Y)\}$. З умови негайно отримуємо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n = X$. Покладемо $U_n=\mathrm{int}\overline{A}_n$. З беровості простору X випливає, що відкрита множина $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ всюди щільна в X, отже, її доповнення $F=X\setminus G$ ніде не щільне в X. Доведемо,що $D_g(f)\subseteq F$.

Нехай $x_0\in G$ і $y_0=g(x_0)$. Покажемо, що $p_0=(x_0,y_0)\notin D(f)$. Оскільки $x_0\in G$, то існує $n\in\mathbb{N}$, такий, що $x_0\in U_n$. Нехай $\varepsilon>0$ і $\delta=\min\{1/2n,\varepsilon/6n\}$. З неперервності відображень f_{y_0} і g в точці x_0 випливає, що існує відкритий окіл U точки x_0 в X, такий, що $U\subseteq U_n$, і для коливань функцій f_y і g на U виконуються нерівності $\omega_{f_{y_0}}(U)<\varepsilon/2$ і $\omega_g(U)<\delta$. Покладемо $A=A_n\cap U$. Ясно, що $U\subseteq\overline{A}$, бо множина U відкрита. Нехай V – відкрита куля з центром у точці y_0 і радіусом δ у просторі Y. Доведемо, що $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|_Z\le\varepsilon$, як тільки $(x,y)\in U\times V$.

Нехай спочатку $(x,y)\in A\times V$. Тоді $|y-y_0|_Y<\delta$, отже,

$$|y-g(x)|_Y\le |y-y_0|_Y+|g(x)-g(x_0)|_Y<$$

$$<\delta+\delta=2\delta\le 1/n.$$

Крім того, $|y_0-g(x)|<\delta<1/n$. Оскільки $x\in A\subseteq A_n$, то

$$|f(x,y)-f(x,g(x))|_Z\le n|y-g(x)|_Y$$

і

$$|f(x,y_0)-f(x,g(x))|_Z\le n|y_0-g(x)|_Y.$$

Тому

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|_Z\le |f(x,y)-f(x,g(x))|_Z+$$
$$+|f(x,g(x))-f(x,y_0)|_Z+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|_Z\le$$
$$\le n|y-g(x)|_Y+n|y_0-g(x)|_Y+\omega_{f_{y_0}}(U)<$$
$$<3n\delta+\varepsilon/2\le\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Позначимо через W замкнену кулю з центром у точці $z_0=f(x_0,y_0)$ і радіусом ε у просторі Z. Ми довели, що $f_y(A)\subseteq W$ для кожного $y\in V$. Тоді з неперервності f_y випливає, що

$$f_y(U)\subseteq f_y(\overline{A})\subseteq\overline{f_y(A)}\subseteq\overline{W}=W,$$

як тільки $y\in V$. Таким чином, $f(U\times V)\subseteq W$, отже, f неперервне в точці $(x_0,y_))$.

З доведенного включення $D_g(f)\subseteq F$ одразу ж випливає, що множина $D_g(f)$ ніде не щільна в X.

Наслідок 2. *Нехай X – берівський простір, Y і Z – нормовані простори і $f : X\times Y\to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної і диференційовне за Фреше відносно другої змінної. Тоді для кожного неперервного відображення $g : X\to Y$ множина $D_g(f)$ ніде не щільна в X.*

Зрозуміло, що з наслідку 2 негайно випливає твердження а) з п.1.

5. Для точки $p=(x,y)\in X\times Y$ покладемо $pr_X(p=x)$ і $pr_Y(p)=y$. Підмножина E добутку $X\times Y$топологічних просторів X і Y називається *проективно ніде не щільною*, якщо обидві її проекції $pr_X(E)$ і $pr_Y(E)$ ніде не щільні відповідно в X і Y. Множина E називається *локально проективно ніде не щільною*, якщо для кожної точки $p\in X\times Y$ існує такий її окіл W в $X\times Y$, що перетин $W\cap E$ буде проективно ніде не щільним.

Теорема 3. *Нехай X – берівський простір, Y і Z – метричні простори і f :*

$X \times Y \to Z$ – *відображення, яке неперервне відносно першої змінної і ліпшицеве відносно другої змінної. Тоді* $pr_X(D(f))$ *ніде не щільна множина в просторі* X.

Доведення. Покладемо

$$F_n = \{x \in X : (\forall y', y'' \in Y)$$

$$(|f^x(y') - f^x(y'')|_Z \le n|y' - y''|_Y)\}.$$

Легко перевірити, що множини F_n замкнені і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = X$. З беровості X випливає, що відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, де $U_n = \mathrm{int}(F_n)$, щільна в X. Оскільки $U_n \subseteq F_n$, то $|f(x, y') - f(x, y'')|_Z \le n|y' - y''|_Y$ для довільних $y', y'' \in Y$ і $x \in U_n$. За лемою 3 звуження $f_n = f\,|_{U_n \times Y}$ неперервне. Оскільки множина $U_n \times Y$ відкрита в $X \times Y$, то смуга $U_n \times Y$ міститься в множині $C(f)$ точок неперервності відображення f. Тоді і $G \times Y \subseteq C(f)$, отже, $D(f) \cap (G \times Y) = \emptyset$. В такому разі, $pr_X(D(f)) \subseteq X \setminus G$, отже, ця проекція ніде не щільна в X.

Теорема 4. *Нехай* X – *берівський простір,* Y *і* Z – *метричні простори,* K – *компактна множина в просторі* Y *і* $f : X \times Y \to Z$ – *відображення, яке неперервне відносно першої змінної і локально ліпшицеве відносно другої змінної. Тоді* $pr_X(D(f) \cap (X \times K))$ *ніде не щільна в* X.

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$V_n = \{y \in Y : d(y, K) < 1/n\}.$$

Множини V_n відкриті в Y і утворюють базу околів компакта K в просторі Y. Згідно з лемою 2 для кожної точки $x \in X$ існує відкритий окіл $V(x)$ множини K в Y, такий, що f^x ліпшицеве на $V(x)$. Для довільного номера n розглянемо множини $A_n = \{x \in X : V_n \subseteq V(x)$ і $(\forall y', y'' \in V_n)(|f^x(y') - f^x(y'')|_Z \le n|y' - y''|_Y)\}$. Легко перевірити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_,n = X$. Покладемо $U_n = \mathrm{int}\overline{A_n}$ і $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Відкрита в X множина G всюди щільна в X, бо X берівський. Звуження $f_n = f\,|_{U_n \times V_n}$ задовольняє умови леми 3, бо множина $A = A_n \cap U_n$ щільна в U_n і для кожного $x \in A$ і довільних $y', y'' \in V_n$ виконується нерівність $|f(x, y') - f(x.y'')|_Z \le n|y' - y''|_Y$. Тому відображення f_n неперервне. Але ж множина $U_n \times V_n$ відкрита в $X \times Y$, отже, $U_n \times V_n \subseteq C(f)$. Таким чином, $G \times K \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U_n \times V_n) \subseteq C(f)$. В такому разі, $pr_X(D(f) \cap (X \times K)) \subseteq X \setminus G$, що і завершує доведення теореми.

Наслідок 3. *Нехай* X – *берівський простір,* Y – *локально компактний метричний простір,* Z – *метричний простір і* $f : X \times Y \to Z$ – *відображення, яке неперервне відносно першої змінної і локально ліпшицеве відносно другої змінної. Тоді для кожної точки* $y \in Y$ *існує її окіл* V *в* Y, *такий, що множина* $pr_X(D(f) \cap (X \times V))$ *ніде не щільна в* X.

Наслідок 4. *Нехай* X *і* Y – *локально компактні метричні простори,* Z – *довільний метричний простір і* $f : X \times Y \to Z$ – *нарізно локально ліпшицеве відображення. Тоді* $D(f)$ *локально проективно ніде не щільна в* $X \times Y$.

Цей наслідок легко одержується з наслідку 3, якщо зауважити, що кожний локально компактний простір є берівським.

Наслідок 5. *Нехай* X *і* Y – *скінченновимірні нормовані простори,* Z – *нормований простір і* $f : X \times Y \to Z$ – *нарізно диференційовне за Ґато відображення, причому частинні похідні* $D_1 f$ *і* $D_2 f$ *локально обмежені відносно першої і другої змінної відповідно. Тоді множина* $D(f)$ *локально проективно ніде не щільна в* $X \times Y$.

Зрозуміло, що з наслідку 5 випливає твердження б) з п.1.

6. З теореми 4 негайно випливає, що для кожної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної і неперервно диференційовна відносно другої, і довільного інтервалу $V = (c, d)$ проекція множини $D(f) \cap (\mathbb{R} \times V)$ на вісь абсцис ніде не щільна. Наведемо приклад, який показує, що для функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з класу CD це твердження не вірне. А саме, ми побудуємо функцію

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка навіть нескінченно диференційовна відносно першої змінної, диференційовна відносно другої змінної і для неї $D(f) \subseteq \mathbb{R} \times (0,1)$, причому проекція $D(f)$ на першу вісь всюди щільна в $\mathbb{R}$.

Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ покладемо $a_{n,k} = \frac{2k-1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$, $p_{n,k} = (a_{n,k}; b_n)$, $\delta_n = \frac{1}{2^{n+2}}$ і

$$Q_{n,k} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x - a_{n,k}|,$$

$$|y - b_n|\} \leq \delta_n\}.$$

Нехай $E = \{p_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$. Зауважимо, що $E \subseteq \mathbb{R} \times (0,1)$ і $pr_1(E)$ всюди щільна в $\mathbb{R}$. Крім того, система квадратів $Q_{m,n}$ диз'юнктна і локально скінченна на множині $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}))$.

Розглянемо нескінченно диференційовну функцію

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\frac{t^2}{t^2-1}} & , \quad |t| < 1, \\ 0 & , \quad |t| \geq 1 \end{cases}$$

і нарізно нескінченно диференційовну функцію

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ясно, що $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ і $0 \leq g(x,y) \leq 1$ для всіх $t, x, y \in \mathbb{R}$ і $D(g) = \{(0,0)\}$. Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$f_{n,k}(x,y) = e^{-1/\delta_n} g(x - a_{n,k}, y - b_n) \times$$

$$\times \varphi(\frac{x - a_{n,k}}{\delta_n}) \varphi(\frac{y - b_n}{\delta_n}).$$

Зрозуміло, що функція $f_{n,k}$ нарізно нескінченно диференційовна, $D(f_{n,k}) = \{p_{n,k}\}$, $f_{n,k}(x,y) = 0$ на доповненні до $Q_{n,k}$ і $0 \leq f_{n,k}(x,y) \leq e^{1/\delta_n}$ на $\mathbb{R}^2$. Оскільки різні квадрати $Q_{n,k}$ не перетинаються, то формулою

$$f(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}} f_{n,k}(x,y)$$

коректно визначається функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Доведемо, що функція f нескінченно диференційовна відносно першої змінної, диференційовна відносно другої змінної і $D(f) = E$.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ і $y_0 \neq 0$. Існує відкритий окіл W точки p_0 такий, що перетинається щонайбільше з одним квадратом $Q_{n,k}$. Тоді звуження $f|_W$ або дорівнює нулю, або збігається зі звуженням $f_{n,k}|_W$ для деяких n і k. Отже, f нарізно нескінченно диференційовна в точці p_0, неперервна в точці p_0, якщо $p_0 \notin E$, і розривна в цій точці, якщо $p_0 \in E$.

Нехай тепер $p_0 = (x_0, 0)$. Оскільки $f(x,0) = 0$ на $\mathbb{R}$, то f – нескінченно диференційовна відносно першої змінної в точці p_0. Неперервність f в точці p_0 випливає з того, що на смузі $\mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$ має місце оцінка $0 \leq f(x,y) \leq e^{-1/\delta_n} = e^{-2^{n+2}}$. Залишилося довести диференційовність f в точці p_0 відносно другої змінної. Нехай $y > 0$ і

$$\psi(y) = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} = \frac{f(x_0, y)}{y}.$$

Якщо (x_0, y) лежить поза квадратами $Q_{n,k}$, то $\psi(y) = 0$. Якщо ж $(x_0, y) \in Q_{n,k}$, то

$$0 \leq \psi(y) \leq \frac{e^{-2^{n+2}}}{1/2^n - 1/2^{n+2}} = \frac{2^{n+2}}{3 \cdot e^{2^{n+2}}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ і $n \to \infty$ при $y \to 0$, то $\psi(y) \to 0$ при $y \to 0$. Звідси випливає, що $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$.

Зауважимо, що множина E не є локально проективно ніде не щільною. Таким чином, множина E не може бути множиною точок розриву нарізно неперервно диференційовної функції.

7. На завершення розглянемо обернену задачу. Як і у Р.Кешнера [4] відповідні побудови будемо здійснювати в просторі $\mathbb{R}^n$.

Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ покладемо $q_i(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Кажуть [1], що множина $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *локально проективно ніде не щільна*, якщо кожна точка $x \in \mathbb{R}^n$ має такий окіл U_x, що проекція $q_i(U_x \cap E)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^{n-1}$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Якщо ж $q_i(E)$ ніде не щільні в $\mathbb{R}^{n-1}$ для кожного $i = 1, \ldots, n$, то E називається *проективно ніде не щільною.*

Теорема 5. *Нехай E – локально проективно ніде не щільна F_σ- множина в просторі $\mathbb{R}^n$. Тоді існує нарізно нескінченно диференційовна функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, така, що $D(f) = E$.*

Доведення. Р.Кешнер в [4] для кожної проективно ніде не щільної F_σ – множини E_0 в кубі $[0,1]^n$ побудував нарізно нескінченно диференційовну функцію $f_0 : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, яка має такі властивості:

1) $0 \leq f_0(x) \leq 1$ на $[0,1]^n$;

2) $\frac{\partial^m}{\partial x_i^m} f_0(x) = 0$ на межі куба $[0,1]^n$ для будь-яких $m = 1, 2, \ldots$ та $i = 1, \ldots, n$;

3) $D(f_0) = E_0$;

4) $E_0 \subseteq f_0^{-1}(0)$.

Зрозуміло, що таку ж функцію можна визначити і для довільного куба $K = [a,b]^n$ і будь-якої проективно ніде не щільної F_σ-множини $E_K \subseteq K$. Позначимо її через g_K і покладемо $f_K(x) = g_K(x)$ при $x \in K$ і $f_K(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Функція $f_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ нарізно нескінченно диференційовна, напівнеперервна знизу, причому $D(f_K) = E_K$.

Оскільки множина E локально проективно ніде не щільна, то кожна точка $x \in \mathbb{R}^n$ має такий відкритий окіл U_x, що множина $U_x \cap E$ проективно ніде не щільна. Згідно з теоремою Стоуна [7, с.292] у відкрите покриття $\mathcal{U} = \{U_x : x \in \mathbb{R}^n\}$ простору $\mathbb{R}^n$ можна вписати локально скінченне відкрите покриття $\mathcal{V}$. Кожну множину $V \in \mathcal{V}$ можна подати у вигляді об'єднання деякої локально скінченної системи $\mathcal{K}_V$ замкнених кубів у просторі $\mathbb{R}^n$. Покладемо $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{K}_{\mathcal{V}}$. Зрозуміло, що система $\mathcal{K}$ замкнених кубів локально скінченна, $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} K$ і для кожного $K \in \mathcal{K}$ множина $E_K = E \cap K$ проективно ніде не щільна і типу F_σ. Тому для кожного куба $K \in \mathcal{K}$ можна побудувати відповідну кешнерову функцію $f_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для якої $D(f_K) = E_K$. Оскільки система $\mathcal{K}$ локально скінчена і $f_K(x) = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus K$ для кожного $K \in \mathcal{K}$, то формулою

$$f(x) = \sum_{K \in \mathcal{K}} f_K(x)$$

визначається нарізно нескінченно диференційовна функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. З того, що функції f_K напівнеперервні знизу легко вивести [1, лема 2], що $D(f) = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} D(f_K)$. Але

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} D(f_K) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} (E \cap K) =$$

$$= E \cap \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = E \cap \mathbb{R}^n = E,$$

отже, $D(f) = E$.

З наслідку 3 і теореми 3 ми одержуємо опис множин точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій двох змінних.

Теорема 6. *Нехай $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Для того, щоб існувала така нарізно неперервно диференційовна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що $D(f) = E$, необхідно і досить, щоб E була локально проективно ніде не щільною F_σ-множиною.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн.— **52**, 6.— С.740—747.

2. *Bögel K.* Über partiell differenziebare Funktionen // Math. Z.— 1926.— **25**.— S.490—495.

3. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... докт.фіз.-мат.наук.— Чернівці, 1999.— 345 с.

4. *Keshner R.* The continuity of function of many variables // Trans. Amer. Math. Soc.— 1943.— **53**, 1.— P.83—106.

5. *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К.* Розриви нарізно диференційовних функцій // Диф. рівняння і нелінійні коливання. Тези доповідей Міжнародної конференції.— Київ, 2001.— С.35—36.

6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Елементы теории функций и функционального анализа.— М: Наука, 1989.— 624 с.

7. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.2001