УДК 517.925.51

©2002 р. І.Є. Вітриченко

Національний технічний університет України "КПІ", Київ

ПРО ОДНУ ОЗНАКУ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ В ОДНОМУ КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Встановлено умови стійкості тривіального розв'язку неавтономної істотно нелінійної диференціальної системи, у якої серед власних чисел граничної матриці коефіцієнтів системи першого наближення є числа з нульовою дійсною частиною.

There are obtain sufficient conditions of the stability of the trivial solution of the nonautonomous essentially nonlinear differential system for which the limiting matrix of coefficients of the system of the first approximation has eigenvalues with null real parts.

1. Постановка задачі. Досліджується стійкість за Ляпуновим, коли $t \uparrow \omega$, точки спокою диференціальної системи (д.с.) вигляду

$$Y' = F(t, Y), \tag{1}$$

де $t \in \mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta} \equiv [t_0, \omega[$ або $\mathbf{\Delta} \equiv]\omega, t_0]$, $|\omega| \leq +\infty$, $F : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(Y, r_0) \mapsto \mathbf{R^n}$,

$$\mathbf{S}(Y, r_0) \equiv \{Y : \|Y\| \leq r_0; r_0 \in \mathbf{R}_+\},$$

$$F \equiv \pi P Y + \sum_{\|Q\|=2}^{m} F_Q Y^Q + R_m,\ \pi \mapsto \mathbf{R}_+,$$

$$P = \|p_{sk}\|,\ s, k = \overline{1, n},\ \|P\| \leq M,\ M \in \mathbf{R}_+,$$

$F = \mathrm{col}(F_{1Q}, \ldots, F_{nQ})$, $F_{kQ} \mapsto \mathbf{\Delta} \times \mathbf{R}, k = \overline{1, n}$, $\|Q\| = \overline{2, m}$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, $k = \overline{1, n}$, $\|Q\| = q_1 + \ldots + q_n$, $m \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $Y^Q \equiv y_1^{q_1} \cdots y_n^{q_n}$; $\mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$ - відповідно множини від'ємних дійсних, додатних дійсних, дійсних і натуральних чисел, $\mathbf{R^n}$ - n-вимірний дійсний евклідів простір, та виконуються наступні умови:

1) $\pi, p_{sk}, F_{kQ} \in \mathbf{C^r_\Delta}$, $s, k = \overline{1, k}$, $\|Q\| = \overline{2, m}$, $\|P\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $l \in \{1, \mathbf{r}\}$, $\mathbf{r} \in \mathbf{N}$, $\mathbf{C^r_\Delta}$ — множина функцій, диференційовних на $\mathbf{\Delta}$ до порядку $\mathbf{r}$ включно;

2) рівняння $\det(P_0 - \lambda E) = 0$, $P_0 = \mathrm{const}$, $\|P - P_0\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, має корені λ_s такі, що $\mathrm{Re}\,\lambda_s = 0$, $s = \overline{1, s_0}$, а решта його коренів λ_k задовольняють умову $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq -\gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}_+$, $k = \overline{s_0 + 1, n}$, $s \in \{1, n\}$;

3) $\|R_m\| \leq L\|Y\|^{m+\alpha}$, $L : \mathbf{\Delta} \mapsto \{0\} \cup \mathbf{R}_+$, $L \in \mathbf{C_\Delta}$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

Результати статті ефективно застосовуються до д.с. вигляду (1), коефіцієнти якої - повільно змінні функції (похідні таких функцій - малі величини у порівнянні з самими функціями, коли $t \uparrow \omega$). Наприклад, t^a, $(\ln t)^b$, $\sin t^c$, $a, b \in \mathbf{R}$, $c \in]0, 1[$, $\omega = +\infty$.

Автономна д.с. (1) в аналогічному критичному випадку досліджувалась О.М. Ляпуновим [1] ($\pi \equiv 1$, $n = s_0 = 2$, $\omega = +\infty$), Г.В.Каменковим [2], І.Г. Малкіним [3].

Для розв'язання поставленої проблеми застосовано методи узагальнених "зрізуючих" [4], лінійних та нелінійних "заморожених" [5] перетворень, метод функцій Ляпунова [1] у поєднанні з методом О.В. Костіна [6] дослідження асимптотичної поведінки правильних розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь (д.р.) вищих порядків.

Запровадимо наступні означення та позначення:

Означення 1. *Д.с. (1) має властивість St, коли $t \uparrow \omega$, якщо для кожного досить малого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існують $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \mathbf{\Delta}$ такі, що будь-який розв'язок $Y = Y(t; T_\varepsilon, Y_0)$ д.с. (1) з початковою умовою $\|Y_0\| \leq \delta_\varepsilon$, $\|Y(T_\varepsilon; T_\varepsilon, Y_0)\| \equiv \|Y_0\|$, задовольняє нерівність $\|Y(t; T_\varepsilon, Y_0)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ (або для всіх $t \in]\omega, T_\varepsilon]$) (так звана локальна стійкість).*

Для $|\omega| = +\infty$ аналогічне означення дано в [7, с.168].

Означення 2. *Якщо в означенні 1 T_ε не залежить від ε, тобто $T_\varepsilon = t_0$, то д.с. (1) має властивість $G_{\mathbf{\Delta}}St$, коли $t \uparrow \omega$ (глобальна стійкість).*

Означення 3. *Д.с. (1) має властивість $AsSt$, коли $t \uparrow \omega$, якщо виконується означення 1 і $\|Y(t; T_\varepsilon, Y_0)\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$ (локально асимптотична стійкість).*

Означення 4. *Якщо в означенні 3 T_ε не залежить від ε, тобто $T_\varepsilon = t_0$, то д.с. (1) має властивість $G_{\mathbf{\Delta}}AsSt$, коли $t \uparrow \omega$ (глобальна асимптотична стійкість).*

Нехай E_k, H_k - відповідно матриці одинична та зсуву розміру $k \times k$; $\overline{0} \equiv \mathrm{col}(0, \ldots, 0)$,

Y_k - вектор-стовпець вимірності k;

$$Y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n) \equiv \mathrm{col}(Y_{n_1}, \ldots, Y_{n_{k_0}});$$

$$\|Y\|^2 \equiv \sum_{s=1}^{n} |y_s|^2; \quad Y^{-1} \equiv \mathrm{col}(y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1});$$

$$X = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n);\ XY \equiv \mathrm{col}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n);$$

$$\|A\| \equiv \sum_{s,k=1}^{n} |a_{sk}|, \text{ якщо } A = \|a_{sk}\|,\ s, k = \overline{1, n};$$

$$\mathrm{grad}\, V(t, X) \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right);$$

$$\langle X, Y \rangle \equiv \sum_{s=1}^{n} x_s y_s;$$

$$\Lambda \equiv \max\{f_s : \mathbf{\Delta} \mapsto \mathbf{R}; s = \overline{1, n}\}, \text{ якщо}$$

$$\Lambda : \mathbf{\Delta} \mapsto \mathbf{R}_+,\ \Lambda^{-1} f_s = c_s + o(1),\ t \uparrow \omega,$$

$$|c_1| + \ldots + |c_n| > 0; \ \bullet \text{ - кінець доведення.}$$

Далі $X, Y, \overline{0}$ розглядаються і як точки $\mathbf{R^n}$.

2. Допоміжні результати. Наступні леми про стійкість у кільцеподібній області, що охоплює початок координат, та обмеженість розв'язків д.с. мають самостійне значення.

Означення 5. *Як і Ляпунов [1] вважатимемо, що функція $V(t, X)$ має нескінченно малу вищу границю, якщо для будь-якого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ існує $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ таке, що для всіх $t \in \mathbf{\Delta}$, $X \in \mathbf{S}(X, \delta_\varepsilon)$ виконується нерівність $|V(t, X)| \le \varepsilon$.*

Означення 6. *Функція $V = V(t, X)$ називається додатно визначеною, якщо існують $T \in \mathbf{\Delta}$, $\rho_0 \in]0, r_0[$, $W(X) : \mathbf{S}(X, \rho_0) \mapsto \mathbf{R}_+$ такі, що для всіх $t \in [T, \omega[$ (або для всіх $t \in]\omega, T]$), $X \in \mathbf{S}(X, \rho_0)$ виконується нерівність $V(t, X) \ge W(X)$.*

Означення 7. *Якщо $S_k(Y) \in \mathbf{C}_{\mathbf{S}(Y, r_0)}$, $\mathbf{S}(Y, r_0) \mapsto \mathbf{R}_+$, $S_k(\overline{0}) = 0$, $c_k \in \mathbf{R}_+$, $k = 1, 2$, то кільцеподібною областю, що охоплює початок координат, називається*

$$\mathbf{S}[S_1(Y) = c_1, S_2(Y) = c_2] \equiv \{Y : Y \in \mathbf{S}(y, r_0),$$

$$\prod_{k=1}^{2} [S_k(Y) - c_k] \le 0, S_1(Y) - S_2(Y) \ne c_1 - c_2\}.$$

Лема 1. *Нехай для д.с. вигляду*

$$X' = U(t, X), \tag{2}$$

де $t \in \mathbf{\Delta}$, $X \in \mathbf{S}(X, r_0)$, $U(t, \overline{0}) \not\equiv \overline{0}$, справджуються припущення:

1) для будь-яких $T^* \in \mathbf{\Delta}$, $X^* \in \mathbf{S}(X, r_0)$ існує розв'язок $X = X(t; T^*, X^*)$ задачі Коші;

2) існують функції $S = S_k(X)$, $S_k : \mathbf{S} \mapsto \mathbf{R}_+$, $S_k \in \mathbf{C}_{\mathbf{S}(X, r_0)}$, $k = 1, 2$, такі, що для $\varepsilon \in]0, r_0[$

$$\mathbf{S}_\varepsilon(X) \in \mathbf{S}(X, \varepsilon),$$

$$\mathbf{S}_\varepsilon(X) \equiv \mathbf{S}[S_1(X) = c_1(\varepsilon), S_2(X) = c_2(\varepsilon)];$$

3) існує додатно визначена, що має нескінченно малу вищу границю, функція Ляпунова $V = V(t, X)$, $V(t, \overline{0}) \equiv 0$, $V(t, X) \in \mathbf{C^1}_{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(X, r_0)}$, така, що

$$\inf_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_2(X) = c_2(\varepsilon)} V(t, X) >$$

$$> \sup_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_1(X) = c_1(\varepsilon)} V(t, X)$$

$(S_2(X) = c_2(\varepsilon)$ *- зовнішня границя області* $\mathbf{S}_\varepsilon(X))$*;*

4) існує функція $G_0 : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(X, r_0) \mapsto \mathbf{R}_-$*,* $X \neq \overline{0}$*,* $G_0(t, \overline{0}) \equiv 0$*, така, що*

$$\frac{\partial V(t,X)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V(t,X), U(t,X) \rangle \equiv$$

$$\equiv G_0(t,X)[1 + G_1(t,X)],\ t \in \mathbf{\Delta},\ X \in \mathbf{S}(X, r_0),$$

$$G_1(t,X) = o(1),\ t \uparrow \omega,\ X \in \mathbf{S}_\varepsilon(X).$$

Тоді існують $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$*,* $T_\varepsilon \in \mathbf{\Delta}$ *такі, що кожний розв'язок* $X = X(t; T_\varepsilon, X_0)$ *д.с. (2) з початковою умовою* $\|X_0\| \leq \delta_\varepsilon$ *має властивість* $\|X(t; T_\varepsilon, X_0)\| < \varepsilon$ *для всіх* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$*.*

Доведення. Нехай $\mathbf{\Delta} = [t_0, \omega[$, і $M_0 \in \mathbf{R}_+$. Оскільки за умовою *3)* функція $V = V(t,X)$ має нескінченно малу вищу границю, то задамо довільне досить мале $\varepsilon \in]0, r_0[$ так, щоб для всіх $t \in \mathbf{\Delta}$ та всіх $X \in \mathbf{S}(X, \varepsilon)$ виконувалась нерівність

$$V(t,X) \leq M_0. \tag{3}$$

За умовою *2)* поверхня $S_1(X) = c_1(\varepsilon)$ належить кулі $\mathbf{S}(X, \varepsilon)$. Тому (3) вірна також для всіх $t \in \mathbf{\Delta}$ та всіх $X \in S_1(X) = c_1(\varepsilon)$. Тоді існує

$$\sup_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_1(X) = c_1(\varepsilon)} V(t,X) \equiv L_\varepsilon, \quad L_\varepsilon > 0.$$

Розглянемо поверхню $S_2(X) = c_2(\varepsilon)$. За умовою *3)* функція $V = V(t,X)$ – додатно визначена. Це означає, що існує функція $W = W(X)$, $W(\overline{0}) = 0$, така, що для всіх $t \in \mathbf{\Delta}$ та всіх $X \in \mathbf{S}(X, r_0) \setminus \{\overline{0}\}$ виконується нерівність

$$V(t,X) \geq W(X) > 0. \tag{4}$$

Поверхня $S_2(X) = c_2(\varepsilon)$ не проходить через початок координат $(S_2(\overline{0}) = 0 < c_2(\varepsilon))$. Тому для всіх $X \in S_2(X) = c_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $W(X) > 0$, тобто для зазначених X функція $W = W(X)$ обмежена знизу нулем. Це означає, що існує

$$\inf_{X \in S_2 = c_2(\varepsilon)} \equiv w_\varepsilon, \quad w_\varepsilon > 0.$$

Тоді з (4) випливає існування

$$\inf_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_2 = c_2(\varepsilon)} V(t,X) \equiv l_\varepsilon, \quad l_\varepsilon > 0,$$

де $l_\varepsilon > L_\varepsilon$ (за умовою *3)*).

Далі за умовою *4)* існує $T_\varepsilon \in \mathbf{\Delta}$ таке, що для всіх $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, $X \in \mathbf{S}_\varepsilon(X)$ виконується нерівність $|G_1(t,X)| < 1$. Звідси та за умови *4)* для всіх $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, $X \in \mathbf{S}_\varepsilon(X)$ вірне співвідношення

$$\frac{dV(t,X)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial V(t,X)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V(t,X), U(t,X) \rangle \equiv$$

$$\equiv G_0(t,X)[1 + G_1(t,X)]. \tag{5}$$

Оскільки поверхня $S_1(X) = c_1(\varepsilon)$ не проходить через точку $X = \overline{0}$ $(S_1(\overline{0}) < c_1(\varepsilon))$, то існує

$$\inf_{X \in S_1(X)} = c_1(\varepsilon) = \delta_\varepsilon,$$

причому $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon$. Дійсно, якби $\delta_\varepsilon = 0$, то існувала б послідовність $\{X_n\}$ така, що

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = \overline{0} \ \ i \ \ S_1(X_n) \equiv c_1(\varepsilon), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Перейдемо в останній тотожності до границі, коли $n \to +\infty$. Внаслідок умови *2)* (неперервність функції $S = S_1(X)$) одержимо протиріччя:

$$0 = S_1(\overline{0}) = S_1(\lim_{n \to +\infty} X_n) = \lim_{n \to +\infty} S_1(X_n) \equiv$$

$$\equiv c_1(\varepsilon) > 0.$$

Розглянемо тепер довільний розв'язок $X = X(t; T_\varepsilon, X_0)$, де $\|X_0\| \leq \delta_\varepsilon$. Для цього розв'язку можливі два випадки :

а) $X(t; T_\varepsilon, X_0) \in \mathbf{S}(X, \varepsilon)$ для всіх $t \in [T_\varepsilon, \omega[$;

б) існує $\hat{T}_\varepsilon \in [T_\varepsilon, \omega[$ таке, що $X(\hat{T}_\varepsilon) \in \mathbf{S}(X, \varepsilon)$.

Якщо має місце випадок а), то лема доведена.

Якщо має місце випадок б), то необхідно існує $\tilde{T}_\varepsilon \in [T_\varepsilon, \omega[$ таке, що точка $X(\tilde{T}_\varepsilon; T_\varepsilon, X_0)$ належить поверхні $S_2(X) = c_2(\varepsilon)$.

Нехай $\tilde{t}_\varepsilon \in [T_\varepsilon, \tilde{T}_\varepsilon]$ таке, що

$$\frac{dV}{dt}[t, X(t; T_\varepsilon, X_0)] < 0, \quad t \in [\tilde{t}_\varepsilon, \tilde{T}_\varepsilon]. \qquad (6)$$

Інтегруючи (6) на проміжку $[\tilde{t}_\varepsilon, \tilde{T}_\varepsilon]$, одержимо суперечливу нерівність

$$l_\varepsilon \le V[\tilde{T}_\varepsilon, X(\tilde{T}_\varepsilon; T_\varepsilon, X_0)] = V[\tilde{t}_\varepsilon, X(\tilde{t}_\varepsilon; T_\varepsilon, X_0)] +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{t}_\varepsilon}^{\tilde{T}_\varepsilon} \frac{dV}{dt}[t, X(t; T_\varepsilon, X_0)]dt <$$

$$< V[\tilde{t}_\varepsilon, X(\tilde{t}_\varepsilon; T_\varepsilon, X_0)] \le L_\varepsilon. \ \bullet$$

Зауваження 1. Умови леми 1 легко аналізувати, коли, наприклад, $V(t, X) \equiv \|X\|^2$, $S_1(X) \equiv S_2(X) \equiv \|X\|^2$.

Лема 2. *Нехай д.с. (2) така, що*

1) для будь-яких $T^* \in \mathbf{\Delta}$, $X^* \in \mathbf{S}(X, r_0)$ існує розв'язок $X = X(t; T^*, X^*)$ задачі Коші;

2) існує кільцеподібна область

$$\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \equiv \mathbf{S}[S_1(X) = c_1, S_2(X) = c_2],$$

що охоплює початок координат, така, що $\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \in \mathbf{S}(X, r_0)$;

3) існує додатно визначена, що має нескінченно малу вищу границю, функція Ляпунова $V = V(t, X)$, $V(t, \overline{0}) \equiv 0$, $V(t, X) \in \mathbf{C^1}_{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(X, r_0)}$, така, що

$$\inf_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_2(X) = c_2(\varepsilon)} V(t, X) >$$

$$> \sup_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_1(X) = c_1(\varepsilon)} V(t, X)$$

($S_2(X) = c_2(\varepsilon)$ - зовнішня границя області $\mathbf{S}_\varepsilon(X)$);

4) існує функція $G_0 : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(X, r_0) \mapsto \mathbf{R}_-$, $X \ne \overline{0}$, $G_0(t, \overline{0}) \equiv 0$, така, що

$$\frac{\partial V(t, X)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V(t, X), U(t, X) \rangle \equiv$$

$$\equiv G_0(t, X)[1 + G_1(t, X)], \ t \in \mathbf{\Delta}, \ X \in \mathbf{S}(X, r_0),$$

$$G_1(t, X) = o(1), \ t \uparrow \omega, \ X \in \mathbf{S}(X, c_1, c_2).$$

Тоді існує $T_0 \in \mathbf{\Delta}$ таке, що кожний розв'язок $X = X(t; T_\varepsilon, X_0)$ д.с. (2) з початковою умовою

$$\|X_0\| \le \inf_{X \in S_1(X) = c_1} \|X\|$$

має властивість

$$\|X(t; T_0, X_0)\| \le \sup_{X \in S_2(X) = c_2} \|X\|$$

для всіх $t \in [T_0, \omega[$.

Доведення подібне доведенню леми 1. $\bullet$

Лема 3. *Нехай д.с. (2) така, що*

1) для будь-яких $T^* \in \mathbf{\Delta}$, $X^* \in \mathbf{S}(X, r_0)$ існує розв'язок $X = X(t; T^*, X^*)$ задачі Коші;

2) існує кільцеподібна область

$$\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \equiv \mathbf{S}[S_1(X) = c_1, S_2(X) = c_2],$$

що охоплює початок координат, така, що $\mathbf{S}(X, c_1, c_2) \in \mathbf{S}(X, r_0)$;

3) існує додатно визначена, що має нескінченно малу вищу границю, функція Ляпунова $V = V(t, X)$, $V(t, \overline{0}) \equiv 0$, $V(t, X) \in \mathbf{C^1}_{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(X, r_0)}$, така, що

$$\inf_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_2(X) = c_2(\varepsilon)} V(t, X) >$$

$$> \sup_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S_1(X) = c_1(\varepsilon)} V(t, X)$$

($S_2(X) = c_2(\varepsilon)$ - зовнішня границя області $\mathbf{S}_\varepsilon(X)$);

4) існує функція $G_0 : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}(X, r_0) \mapsto \mathbf{R}_-$, $X \ne \overline{0}$, $G_0(t, \overline{0}) \equiv 0$, така, що

$$\frac{\partial V(t, X)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V(t, X), U(t, X) \rangle \equiv$$

$$\equiv G_0(t, X)[1 + G_1(t, X)], \ t \in \mathbf{\Delta}, \ X \in \mathbf{S}(X, r_0),$$

$$\sup_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in S(X, c_1, c_2)} |G_1(t, X)| < 1.$$

Тоді кожний розв'язок $X = X(t; t_0, X_0)$ д.с. (2) з початковою умовою

$$\|X_0\| \le \inf_{X \in S_1(X) = c_1} \|X\|$$

має властивість

$$\|X(t;t_0,X_0)\| \le \sup_{X\in S_2(X)=c_2} \|X\|$$

для всіх $t\in\mathbf{\Delta}$.

Доведення подібне доведенню леми 1.

Зауваження 2. За умови

$$S_1(X)\equiv S_2(X)=\text{const}>0,$$

леми 2, 3 узагальнюють лему [8].

3. Основні результати. За допомогою узагальнених "зрізуючих" [4], лінійних та нелінійних "заморожених" [5] перетворень можна вказати за певних умов неособливу заміну

$$Y=\sum_{\|Q\|=1}^{m} g_Q(t)X^Q \equiv G(t,X), \qquad (7)$$

яка зводить д.с. (1) до д.с. вигляду

$$\begin{cases} X'_{n_1}=\pi_1 P_{n_1}X_{n_1}+\sum\limits_{\|Q_{n_1}\|}^{m} h_{n_1,Q_{n_1}}\times \\ \times X_{n_1}^{Q_{n_1}}+\Phi_{n_1},\quad n_1\le s_0, \\ X'_{n_s}=\pi_s(\mu_s E_{n_s}+H_{n_s})X_{n_s}+ \\ +X_{n_s}\sum\limits_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} h_{n_s,Q_{n_1}}X_{n_1}^{Q_{n_1}}+\Phi_{n_s}, \\ s=\overline{2,s_0},\quad \sum\limits_{s=1}^{k_0} n_s=n-n_1, \end{cases} \qquad (8)$$

для якої $\pi_s:\mathbf{\Delta}\mapsto\mathbf{R}_+$, $h_{n_s,Q_{n_1}}$, $s=\overline{1,k_0}$, $\|Q_{n_1}\|=\overline{1,m}$, $\mu_s\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $s=\overline{2,k_0}$, - відомі величини; $P_{n_1}\equiv\|0\|$, або $P_{n_1}\equiv H_{n_1}$, або

$$P_{n_1}\equiv\{\mu_{n_1,1}E_{p_1}+H_{p_1},\ldots,\mu_{n_1,l}E_{n_l}+H_{n_l}\},$$

$\mu_{n_1,k}\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $k=\overline{1,l}$, $\sum\limits_{k=1}^{l}p_k=n_1$, а величини Φ_s, $s=\overline{1,k_0}$, - малі у деякому розумінні.

Вилучимо з д.с. (8) д.с. вигляду

$$X'_{n_1}=\pi_1 P_{n_1}X_{n_1}+\sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{n_1,Q_{n_1}}X_{n_1}^{Q_{n_1}}. \qquad (9)$$

Припустимо, що д.с. (9) можна звести до еквівалентного їй д.р. n_1-го порядку стосовно однієї з компонент вектора X_{n_1}. Тоді методом О.В. Костіна [6] можна знайти асимптотичні зображення <u>всіх</u> так званих правильних розв'язків одержаного д.р. Позначимо через $\Psi_{n_1}=\Psi_{n_1}(t)$ вектор-стовбець асимптотичного зображення розв'язку д.с. (9), який відповідає одному з правильних розв'язків отриманого д.р. n_1-го порядку.

Теорема 1. *Нехай д.с. (1) така, що*

1) існує перетворення (7) $Y=G(t,X)$, *що зводить її до д.с. (8), де* $\mu_s\in\mathbf{R}_-$, $s=\overline{2,k_0}$;

2) для будь-яких $T^*\in\mathbf{\Delta}$, $X^*\in\mathbf{S}(X,r_0)$ *існує розв'язок* $X=X(t;T^*,X^*)$ *задачі Коші д.с. (8);*

3) існує вектор-стовбець асимптотичного зображення одного з правильних розв'язків д.с. (9) $\Psi_{n_1}=\Psi_{n_1}(t)$ *такий, що* $\|\Psi_{n_1}\|=o(1)$, $\pi_1^{-1}\|\Psi_{n_1}\Psi_{n-1}^{-1}\|=O(1)$, $t\uparrow\omega$;

4) існує функція

$$\Lambda\equiv\max\{\pi_1\|P_{n_1}-\pi_1^{-1}\Psi'_{n_1}\Psi_{n_1}^{-1}E_{n_1}\|,$$

$$h_{n_1,Q_{n_1}}\Psi_{n_1}^{-1}\Psi_{n_1}^{Q_{n_1}};\quad \|Q_{n_1}\|=\overline{2,m}\}$$

така, що $(\Lambda+\pi_s)^{-1}h_{n_s,Q_{n_1}}\Psi_{n_1}^{Q_{n_1}}=o(1)$, $t\uparrow\omega$, $s=\overline{2,k_0}$, $\|Q_{n_1}\|=\overline{1,m-1}$;

5) існує додатно визначена функція Ляпунова $V=V_{n_1}(X_{n_1})$ *така, що для кожного* $t\in\mathbf{\Delta}$ *і всіх точок* $(X_{n_1},\overline{0})\in\mathbf{S}(X,r_0)$

$$\Big\langle \operatorname{grad}V_{n_1}(X_{n_1}),\pi_1^{-1}(P_{n_1}-\Psi'_{n_1}\Psi_{n_1}^{-1}E_{n_1})+$$

$$+\Psi_{n_1}^{-1}\sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{n_1,Q_{n_1}}\Psi_{n_1}^{Q_{n_1}}X_{n_1}^{Q_{n_1}}\Big\rangle\equiv$$

$$\equiv\Lambda[W_0(X_{n_1})+W_1(t,X_{n_1})],$$

$$W_0(\overline{0})=0,\ W_0(X_{n_1})<0,\ X_{n_1}\ne\overline{0},$$

$$W_1(t,X_{n_1})=o(1),\ t\uparrow\omega;$$

6) існують функції $\nu_s:\mathbf{\Delta}\mapsto\mathbf{R}_+$, $\nu_s\in\mathbf{C}^1_{\mathbf{\Delta}}$, *такі, що* $\nu_s=o(1)$, $\nu'_s\nu_s^{-1}(\Lambda+\pi_s)^{-1}=o(1)$, $t\uparrow\omega$, $s=\overline{2,k_0}$ *і для кожного* $\rho\in]0,r_0[$ *та всіх* $X\in\mathbf{S}[\|X\|+\rho,\|X\|=r_0]$

$$\left[\Lambda W_0(X_{n_1})-\sum_{s=2}^{k_0}\pi_s\|X_{n_s}\|^2\right]^{-1}\times$$

$$\times\Big[\|\Psi_{n_1}^{-1}\Phi_{n_1}(t,\Psi_{n_1}X_{n_1},\nu_2X_{n_2},\ldots,\nu_{k_0}X_{n_{k_0}})\|+$$

$$+\sum_{s=2}^{k_0}\nu_s^{-1}\|\Phi_{n_s}(t,\Psi_{n_1}X_{n_1},\nu_2X_{n_2},...,\nu_{k_0}X_{n_{k_0}})\|\Big]=$$

$$=o(1),\ t\uparrow\omega;$$

7) для всіх $X\in\mathbf{S}(X,r_0)$

$$\|G(t,\Psi_{n_1}X_{n_1},\nu_2X_{n_2},\ldots,\nu_{k_0}X_{n_{k_0}})\|=o(1),$$

$$t\uparrow\omega.$$

Тоді вона має властивість $AsSt$, *коли* $t\uparrow\omega$.

Доведення. До д.с. (1) застосуємо перетворення

$$Y=G(t,\Psi_{n_1}X_{n_1},\nu_2X_{n_2},\ldots,\nu_{k_0}X_{n_{k_0}}).$$

Покажемо, що для одержаної стосовно $X=\mathrm{col}(X_{n_1},\ldots,X_{n_{k_0}})$ д.с. можна побудувати функцію Ляпунова та кільцеподібну область, що охоплює початок координат, які задовольняють умови леми 2. Нехай

$$V(t,X)\equiv V(X)\equiv\sum_{s=1}^{k_0}V_{n_s}(X_{n_s}),$$

де $V=Vn_s(X_{n_s})$, $s=\overline{2,k_0}$, - розв'язок рівняння вигляду

$$\Big\langle\mathrm{grad}\,V_{n_s}(X_{n_s}),(\mu_sE_{n_s}+H_{n_s})X_{n_s}\Big\rangle=$$

$$=-\|X_{n_s}\|^2,\quad s=\overline{2,k_0}.\qquad(10)$$

З [9, с.67] та умови 1) випливає, що розв'язок рівняння (10) існує, єдиний і є додатно визначеною квадратичною формою зі сталими коефіцієнтами. Тоді функція $V=V(X)$ - додатно визначена і допускає нескінченно малу вищу границю. Нехай

$$\mathbf{S}(X,\rho_0,r_0)\equiv\mathbf{S}[\|X\|=\rho_0,\|X\|=r_0]$$

- кільцеподібна область (кільце), що охоплює початок координат, у якій вибір ρ_0 з $]0,r_0[$ вказано нижче.

Оскільки $V=V(X)$ - додатно визначена функція зі сталими коефіцієнтами, і на поверхні $\|X\|=r_0$ - обмежена знизу нулем, то існує

$$\inf_{X\in\|X\|=r_0}\equiv l^*,$$

причому $l^*>0$.

Далі функція $V=V(X)$ має нескінченно малу вищу границю. Це означає, що, наприклад, для числа $0,5l^*$ завжди можна вказати $\rho_0\in]0,r_0[$ таке, щоб для всіх $X\in\mathbf{S}(X,\rho_0)$ виконувалась нерівність $V(X)\le 0,5l^*$. Зрозуміло, що ця ж нерівність справедлива і для всіх $X\in\|X\|=\rho_0$. Тоді існує

$$\sup_{X\in\|X\|=\rho_0}\equiv L^*,$$

причому $L^*\le 0,5l^*<l^*$.

Повну похідну по t від функції $V=V(X)$ внаслідок рівнянь д.с. стосовно X (див. (5)) можна подати у вигляді

$$\frac{dV}{dt}\equiv G_0(t,X)[1+G_1(t,X)],$$

де в позначеннях леми 2

$$G_0(t,X)\equiv\Lambda W_0(X_{n_1})-\sum_{s=2}^{k_0}\pi_s\|X_{n_s}\|^2,$$

причому $G_0(t,X)<0$ (за умовою 5)), і

$$G_1(t,X)\equiv$$

$$\equiv G_0^{-1}(t,X)\Big\{\sum_{s=2}^{k_0}(\Lambda+\pi_s)\Big\langle\mathrm{grad}\,V_{n_s}(X_{n_s}),$$

$$X_{n_s}\sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m-1}(\Lambda+\pi_s)^{-1}h_{n_s,Q_{n_s}}\Psi^{Q_{n_1}}X_{n_s}^{Q_{n_1}}\Big\rangle-$$

$$-\sum_{s=2}^{k_0}(\Lambda+\pi_s)\Big\langle\mathrm{grad}\,V_{n_s}(X_{n_s}),$$

$$(\Lambda+\pi_s)^{-1}\nu_s'\nu_s^{-1}X_{n_s}\Big\rangle+$$

$$+\Lambda W_1(t,X_{n_1})+\Big\langle\mathrm{grad}\,V_{n_1}(X_{n_1}),$$

$$\Psi_{n_1}^{-1}\Phi_{n_1}[t,\Psi_{n_1}X_{n_1},\nu_2X_{n_2},\ldots,\nu_{k_0}X_{n_{k_0}}]\Big\rangle+$$

$$+\sum_{s=2}^{k_0}\Big\langle\mathrm{grad}\,V_{n_s}(X_{n_s}),$$

$$\nu_s^{-1}\Phi_{n_s}[t,\Psi_{n_1}X_{n_1},\nu_2X_{n_2},\ldots,v_{k_0}X_{n_{k_0}}]\Big\rangle\},$$

причому для будь-якого $\rho \in]0, r_0[$ і кожного $X \in \mathbf{S}[\|X\| = \rho, \|X\| = r_0]$ за умовою *6)* маємо $G_1(t, X) = o(1)$, $t \uparrow \omega$.

Тоді за лемою 2 кожний розв'язок $X = X(t; T_0, X_0)$ д.с стосовно X з T_0, X_0 досить близькими відповідно до ω та $X = \overline{0}$, є обмеженим.

За умовою 7) кожний розв'язок д.с. (1) з тими ж властивостями спадає до нуля, коли $t \uparrow \omega$. •

Теорема 2. *Нехай д.с. (1) така, що виконані умови 1)-5), 7) теореми 1 і в позначеннях теореми 1*

$$\sup_{t \in \mathbf{\Delta}, X \in \mathbf{S}[\|X\| = \rho_0, \|X\| = r_0]} |G_1(t, X)| < 1,$$

де $\rho_0 \in]0, r_0[$ *таке, що*

$$\sup_{X \in \|X\| = \rho_0} \sum_{s=1}^{k_0} V_{n_s}(X_{n_s}) < \inf_{X \in \|X\| = r_0} \sum_{s=1}^{k_0} V_{n_s}(X_{n_s}),$$

$V_{n_s}(X_{n_s})$, $s = \overline{2, k_0}$ *- розв'язок рівняння (10).*

Тоді вона має властивість $G_{\mathbf{\Delta}} AsSt$, *коли* $t \uparrow \omega$.

Доведення таке ж, як для теореми 1 з посиланням на лему 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения и другие работы по теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.— 473 с.

2. *Каменков Г.В.* Об устойчивости движения // Сб. науч. трудов Казан. авиац. ин-та.— 1939.— N 9.— С.3—137.

3. *Малкин И.Г.* Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова // Сб. науч. трудов Казан. авиац. ин-та.— 1937.— N 7.— С.3—103.

4. *Витриченко И.Е., Никоненко В.В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc.of A. Razmadze Math.İnstitute.— 1994.— **110**.— P. 59—67.

5. *Костин А.В., Витриченко И.Е.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл.АН СССР.— 1982.— **264**, N 4.— С. 819—822.

6. *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных диффернциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, N 3.— С. 522—526.

7. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.-Л.: Гостехиздат, 1949.— 551 с.

8. *Витриченко И.Е.* К устойчивости неавтономной существенно нелинейной системы в одном критическом случае // Доп. НАН України.— 1997.— N 8.— С. 25—28.

9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.— 532 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.2001