УДК 519.21

©2002 р. І.В. Вернигора, В.К. Ясинський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Досліджено глобальну експоненціальну p-стійкість за першим наближенням та асимптотичну стохастичну стійкість тривіального розв'язку диференціально-функціональних рівнянь з марковськими перемиканнями.

In the article the global exponential p-stability on first approximation and asymptotic stochastic stability of the trivial solution are investigated for functional differential equations with Markov switchings.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано на потоці σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq t_0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset R^n$ диференціально-функціональним рівнянням

$$dx(t) = f(t, x_t, \xi(t))dt, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

за початковими умовами

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad \tau > 0, \tag{2}$$

де $x_t = \{x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$; $\{\xi(t) \equiv \xi(t,\omega), t \geq t_0\} \subset R^n$ — стохастично-неперервний однорідний феллерівський марковський процес з неперервними справа реалізаціями на компактному фазовому просторі Y, $\hat{\mathcal{L}}$ — слабкий інфінітезімальний оператор процесу $\{\xi(t)\}$ з областю визначення $D(\hat{\mathcal{L}})$; $f : [t_0, \infty) \times C_n([-\tau, 0] \times Y \to R^n$ — неперервне відображення за аргументами.

Означення 1. *Абсолютно неперервний за змінною $t \geq t_0$ n-вимірний випадковий процес $\{x(t)\}$ називається розв'язком задачі (1), (2) на множині $[t_0, T) \subset R_+$, якщо $\forall\, T_1 \subset [t_0, T)$, $t \in [t_0 - \tau, T_1)$ з ймовірністю 1 виконується рівність*

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_0) & t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_s, \xi(s))ds & t \in [t_0, T_1). \end{cases} \tag{3}$$

Якщо довільні два розв'язки (1), (2) рівні між собою з імовірністю одиниця для довільного відрізку $t \in [t_0, T)$, то говорять, що на цій множині розв'язок єдиний. У цьому випадку за умови $\xi(t_0) = y$ розв'язок будемо позначати через $\{x(t, t_0, \varphi, y)\}$, а його частину траєкторії на відрізку часу $[t - \tau, t]$ через $x_t(t_0, \varphi, y) = \{x(t + \theta, t_0, \varphi, y), \theta \in [-\tau, 0]\}$.

Надалі будемо припускати виконання однієї з умов на праву частину рівняння (1).

L1) Глобальна умова Ліпшиця:

$$|f(t, \varphi, y) - f(t, \psi, y)| \leq L\|\varphi - \psi\|$$

для всіх $t \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$, $\|\varphi\| = \sup\limits_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$.

L2) Посилена глобальна умова Ліпшиця: існує така ймовірнісна міра ρ на σ-алгебрі борелівських підмножин відрізку $[-\tau, 0]$, що для всіх $t \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$

$$|f(t, \varphi, y) - f(t, \psi, y)| \leq$$

$$\leq L \int\limits_{t_0 - \tau}^{t_0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|\rho(d\theta) \equiv \|\varphi - \psi\|_\rho.$$

L3) Локальна умова Ліпшиця:

$$|f(t, \varphi, y) - f(t, \psi, y)| \leq L_r\|\varphi - \psi\|,$$

за умови $\forall\, t \geq 0, y \in Y, r > 0$ та $\varphi, \psi \in U_r(0) \equiv \{\varphi \in C_n([-\tau, 0]) | \|\varphi\| < r\}$.

L4) Посилена локальна умова Ліпшиця:

$$|f(t,\varphi,y)-f(t,\psi,y)|\leq L_r\|\varphi-\psi\|_\rho$$

для довільних $t\geq 0, y\in Y, r>0$ та $\varphi,\psi\in U_r^s(0)\equiv\{\varphi\in C_n([-\tau,0])|\|\varphi\|_\rho<r\}$.

За обмеженнями типу L3, L4, як правило, використовується обмеження, так званого підлінійного зростання

$$|f(t,\varphi,y)|\leq K(\|\varphi\|+\alpha), \qquad (4)$$

або

$$|f(t,\varphi,y)|\leq K(\|\varphi\|_\rho+\alpha) \qquad (5)$$

для всіх $t\geq 0, y\in Y$ та $\varphi,\psi\in C_n([-\tau,0])$.

Зрозуміло, що з глобальних умов L1) або L2) та умови

$$\sup_{t\geq 0}|f(t,0,y)|=\alpha<\infty \qquad (6)$$

випливають умови (4), (5).

Підставляючи у праву частину диференціального рівняння (1) реалізації марковського процесу $\{\xi(t)\}$ та використовуючи результати праці [1], легко переконатися у тому, що глобальна умова Ліпшиця L1) та умова (6) (або локальна умова L3) та умова (6)) гарантують існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2) на $[t_0,\infty)$ для довільних $t_0\geq 0$ і $\omega\in\Omega$ [2].

Уведемо поняття стійкості тривіального розв'язку $x(t)\equiv 0$ задачі (1), (2), як це зроблено в працях [3]—[6], причому природно покласти $\alpha=0$ в умові (6), тобто

$$f(t,0,y)\equiv 0, \qquad (7)$$

а також вважати, що існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) на будь-якому півінтервалі $[t_0,\infty)$, $t_0\geq 0$.

Означення 2. *Тривіальний розв'язок $x(t)\equiv 0$ задачі (1), (2) назвемо:*

— стохастично стійким, якщо $\forall\ \varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ існує таке $\delta>0$, що з нерівності $\|\varphi\|<\delta$ випливає $\forall\ t_0\geq 0$, $y\in Y$ нерівність

$$P\{\omega:\ \sup_{t\geq t_0}|x(t,t_0,\varphi,y)|\geq\varepsilon_1\}<\varepsilon_2; \qquad (8)$$

— асимптотично стохастично стійким, якщо виконується (8) та існує таке $\delta_1>0$, що для $\forall\ t_0\geq 0$, $y\in Y$ та $\varphi\in U_{\delta_1}(0)$

$$P\{\omega:\ \lim_{t\to\infty}|x(t,t_0,\varphi,y)|=0\}=1; \qquad (9)$$

— локально асиптотично стохастично стійким, якщо він стохастично стійкий та існують такі $\delta_1>0$ і $\delta_2>0$, що

$$\lim_{t\to\infty}|x(t,t_0,\varphi,y)|=0,$$

$$\forall\ t_0\geq 0, y\in Y, \varphi\in U_{\delta_1}(0),$$

як тільки $\sup\limits_{t\geq t_0}|x(t,t_0,\varphi,y)|<\delta_2$.

Означення 3. *Тривіальний розв'язок $x(t)\equiv 0$ задачі (1), (2) назвемо*

— експоненціально p-стійким, якщо існують такі $\delta>0$, $M>0$ та $\gamma>0$, що для довільних $t\geq t_0\geq 0$, $y\in Y$ та $\varphi\in U_\delta(0)$

$$E\{|x(t,t_0,\varphi,y)|^p\}\leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\|\varphi\|^p; \qquad (10)$$

— глобально експоненціально p-стійким, якщо (10) виконано для всіх $t\geq t_0\geq 0$, $y\in Y$ та $\varphi\in C_n([-\tau,0])$;

— сильно експоненціально p-стійким, якщо існують такі $\delta>0$, $M>0$ та $\gamma>0$, що для всіх $t\geq t_0\geq 0$, $y\in Y$ та $\varphi\in U_\delta(0)$

$$E\{\|x_t(t_0,\varphi,y)\|^p\}\leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\|\varphi\|^p; \qquad (11)$$

— сильно глобально експоненціально p-стійким, якщо нерівність (11) виконується для всіх $t\geq t_0\geq 0$, $y\in Y$ та $\forall\ \varphi\in C_n([-\tau,0])$.

Разом з рівнянням (1) розглянемо диференціальне рівняння [8]

$$d\tilde{x}(t)=f(t,\tilde{x}_t,\xi(t))+f_1(t,\tilde{x}_t,\xi(t)), \qquad (12)$$

$$\tilde{x}(t_0+\theta)=\varphi(\theta),\quad \theta\in[-\tau,0],\quad \tau>0, \qquad (13)$$

де $f(t,0,\xi(t))\equiv 0$, $f_1(t,0,\xi(t))\equiv 0$ з імовірністю 1.

Теорема 1. *Нехай:*

1) для відображення $f:R_+\times C_n([-\tau,0])\times Y\to R^n$ виконана глобальна умова Ліпшиця L1);

2) відображення $f_1:R_+\times C_n([-\tau,0])\times Y\to R^n$ неперервне за сукупністю аргументів та задовольняє глобальну умову Ліпшиця

$$|f_1(t,\varphi,y)-f_1(t,\psi,y)|\leq L_1\|\varphi-\psi\| \qquad (14)$$

для всіх $t \geq 0, y \in Y$ та $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$;

3) тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) сильно глобально експоненціально p-стійкий.

Тоді тривіальний розв'язок $\{\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}(t,\omega)\} \subset R^n$ задачі (12), (13) сильно глобально експоненціально p-стійкий при досить малому $L_1 > 0$.

Доведення. Оцінимо модуль різниці розв'язків рівнянь (1), (12) за початковими умовами (2), (13) для всіх $t \geq 0$

$$|\tilde{x}(t+s,s,\varphi,y) - x(t+s,s,\varphi,y)| \leq$$
$$\leq \int_0^t |f(s+u, \tilde{x}_{s+u}(s,\varphi,y), \xi(u)) -$$
$$-f(s+u, x_{s+u}(s,\varphi,y), \xi(u))|du +$$
$$+\int_0^t |f_1(s+u, \tilde{x}_{s+u}(s,\varphi,y), \xi(u)) -$$
$$-f_1(s+u, x_{s+u}(s,\varphi,y), \xi(u))|du.$$

Оскільки обидва розв'язки задовольняють початкові умови (2), то для $v(t) \equiv \sup\limits_{-\tau \leq \theta \leq t} |x(\theta+s,s,\varphi,y) - \tilde{x}(\theta+s,\varphi,y)|$ з попередньої нерівності з урахуванням умови (13) теореми 1 легко одержати оцінку

$$v(t) \leq L\int_0^t v(s)ds + L_1\int_0^t \|\tilde{x}_{s+s_1}(s,\varphi,y)\|ds_1. \tag{15}$$

Нехай $L_1 \leq L$, тоді права частина рівняння (12) задовольняє умову Ліпшиця з константою $2L$, а значить

$$\sup_{-\tau \leq t \leq \tau} |\tilde{x}(s+t,\varphi,y)| \leq \|\varphi\| e^{2LT} \tag{16}$$

для довільних $T \geq 0$, $s \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$.

За лемою Гроноулла з нерівностей (15) та (16) випливає для всіх $t \in [0,T]$ оцінка

$$v(t) \leq L_1 T e^{3LT} \|\varphi\|. \tag{17}$$

Надалі оцінимо $E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\}$, використавши очевидні нерівності:

$$(E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\})^{1/p} \leq$$
$$\leq (E\{\|x_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\})^{1/p} +$$
$$+(E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y) - x_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\})^{1/p} \tag{18}$$

для $p \geq 1$ та для $p \in (0,1)$

$$E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\} \leq E\{\|x_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\} +$$
$$+E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y) - x_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\}. \tag{19}$$

Виберемо $T > 0$ настільки великим, щоб виконувалася нерівність

$$E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\} \leq \begin{cases} \frac{1}{4^p}\|\varphi\|^p, & \forall p \geq 1, \\ \frac{1}{4}\|\varphi\|^p, & \forall p \in (0,1) \end{cases} \tag{20}$$

для всіх $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, $s \geq 0$ та $y \in Y$.

Далі вимагатимемо, щоб L_1 задовольняло нерівність

$$L_1 \leq \begin{cases} (4Te^{3LT})^{-1}, & \forall p \geq 1, \\ (4^{\frac{1}{p}}Te^{3LT})^{-1}, & \forall p \in (0,1). \end{cases}$$

Отже, з (17)—(20) можна одержати оцінку

$$E\{\|\tilde{x}_{T+s}(s,\varphi,y)\|^p\} \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^p \tag{21}$$

для всіх $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, $p > 0$, $s \geq 0$ та $y \in Y$.

Якщо для $t \in [T, 2T]$ подати розв'язок (12), (13) у вигляді

$$\tilde{x}_{t+s}(s,\varphi,y) = \tilde{x}_{t+s}(s+T, \tilde{x}_{s+T}(s,\varphi,y), \xi(T)),$$

ввести перехідну ймовірність $P(s,\varphi,y,t,d\psi,dz)$ для марковського процесу у фазовому просторі $C_n([-\tau,0]) \times Y$, то з (21) випливатимуть нерівності

$$E\{\|\tilde{x}_{s+2T}(s,\varphi,y)\|^p\} =$$
$$= E\{\|\tilde{x}_{s+2T}(s+T, x_{s+T}(s,\varphi,y), \xi(T))\|^p\} =$$
$$= \int\limits_{C_n((E-\tau,0])\times Y} E\{\|\tilde{x}_{s+2T}(s+T,$$
$$\psi, z)\|^p\} P(s,\varphi,y,T+s,d\psi,dz) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{C_n((E-\tau,0])\times Y} \|\psi\|^p P(s,\varphi,y,T+s,d\psi,dz) =$$

$$= \frac{1}{2}E\{\|\tilde{x}_{s+T}(s,\varphi,y)\|^p\} \le \frac{1}{4}\|\varphi\|^p. \qquad (22)$$

Далі з (16) можна одержати оцінку

$$E\{\sup_{mT\le t\le(m+1)T}|\tilde{x}(s+t,\varphi,y)|^p\} \le$$

$$\le e^{2pLT}\cdot E\{\|\tilde{x}_{s+mT}(s,\varphi,y)\|^p\}. \qquad (23)$$

для всіх $m \in N$, а за індукцією з (22) випливає

$$E\{\|\tilde{x}_{s+mT}(s,\varphi,y)\|^p\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}E\{\left\|\tilde{x}_{s+(m-1)T}(s,\varphi,y)\right\|^p\}$$

для всіх $m \ge 2$ і тому

$$E\{\|\tilde{x}_{s+mT}(s,\varphi,y)\|^p\} \le \frac{1}{2^m}\|\varphi)\|^p$$

для всіх $m \in N$. З останьої нерівності з урахуванням оцінки (23) матимемо нерівності

$$E\{\sup_{mT\le t\le(m+1)T}|\tilde{x}(s+t,\varphi,y)|^p\} \le$$

$$\le e^{2pLT-m\ln 2}\|\varphi\|^p$$

для всіх $m \in N$, які гарантують сильну глобальну експоненціальну p-стійкість.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконується посилена умова Ліпшиця L2);

2) $f(s,0,y) \equiv 0$;

3) тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (1) експоненціально p-стійкий для $p \ge 1$.

Тоді цей розв'язок сильно глобально експоненціально p-стійкий для $p \ge 1$.

Доведення. Для всіх $t \ge s+2\tau$ за умови L2) легко одержати оцінку

$$\|x_{s+t}(s,\varphi,y)\| \le |x(t+s-\tau,s,\varphi,y)| +$$

$$+L\int_{t-\tau}^{t}\int_{-\tau}^{0}|x(s+s_1+\theta,s,\varphi,y)|\,\rho(d\theta)ds_1.$$

Оскільки $p \ge 1$, то після піднесення обох частин одержаної нерівності до степеня $p > 0$ за нерівністю Йєнсена матимемо

$$\|x_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p \le (|x(t+s-\tau,s,\varphi,y)| +$$

$$+L^p\tau^{p-1}\int_{t-\tau}^{t}\int_{-\tau}^{0}|x(s+s_1+$$

$$+\theta,s,\varphi,y)|^p\rho(d\theta)ds_1)2^{p-1}$$

Застосувавши операцію $E\{\circ\}$ до обох частин цієї нерівності, для довільних $t \ge s+2\tau$ одержимо нерівність

$$E\{\|\tilde{x}_{s+t}(s,\varphi,y)\|^p\} \le 2^{p-1}(1+L\tau^p)\times$$

$$\times \sup_{-2\tau\le\theta\le 0}E\{|x(s+t+\theta,s,\varphi,y)|^p\}.$$

Якщо скористатися означенням 3 експоненціальної p-стійкості та оцінкою $\sup_{0\le t\le 2\tau}\{\|x_{s+t}(s,\varphi,y)\| \le \|\varphi\|e^{2L\tau}$, то одержимо твердження теореми 2.

Теорема 3. *Якщо $f(s,0,y) \equiv 0$, виконуються локальна умова Ліпшиця L3) та (4), то з сильної експоненціальної p-стійкості тривіального розв'язку рівняння (1) випливає його асимптотична стохастична стійкість.*

Доведення. Нехай $\delta_1 > 0$ — число з означення сильної експоненціальної - стійкості та $\varphi \in U_{\delta_1}(0)$.

Тоді

$$P\{\omega:\ \sup_{t\ge T}|x(t+s,s,\varphi,y| \ge \varepsilon\} \le$$

$$\le P\{\omega:\ \sup_{t\ge\tau[\frac{T}{\tau}]}|x(t+s,s,\varphi,y| \ge \varepsilon\} \le$$

$$\le \sum_{k=[\frac{T}{\tau}]}P\{\omega:\ \|x_{s+k\tau}(s,\varphi,y)\|^p \ge \varepsilon^p\} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^p}\sum_{k=[\frac{T}{\tau}]}E\{\|x_{s+k\tau}(s,\varphi,y)\|^p\} \le$$

$$\le \frac{M}{\varepsilon^p}\|\varphi\|^p\,\frac{\exp\{-\gamma\tau(\left[\frac{T}{\tau}\right]+1)\}}{1-\exp\{-\gamma\tau\}}$$

для всіх $\varphi \in U_{\delta_1}(0)$, $T > 0$, $s \ge 0$, $\varepsilon \ge 0$ та $y \in Y$.

Якщо перейти до границі для $T \to \infty$, то матимемо твердження теореми 3.

Теорема 4. *Нехай:*

1) виконуються всі умови теореми 1, а нерівність (13) виконується у кожній кулі $U_r(0)$ зі сталою L_r;

2) $\lim\limits_{r\to 0} L_r = 0$;

3) тривіальний розв'язок задачі (1), (2) сильно глобально експоненціально p-стійкий.

Тоді тривіальний розв'язок $\tilde{x}(t) \equiv 0$ задачі (12), (13) локально стохастично асимптотично стійкий.

Доведення. Уведемо функцію

$$g_r(\alpha) = \begin{cases} 1, & \forall\, \alpha \in [0, r), \\ \frac{2r-\alpha}{r}, & \forall\, \alpha \in [r, 2r), \\ 0, & \forall\, \alpha \geq 2r. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $|g_r(\alpha_1) - g_r(\alpha_2)| \leq \dfrac{1}{r}|\alpha_2 - \alpha_1|$ для всіх $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ та $r > 0$. Разом з (12) розглянемо так зване "урізане"рівняння

$$dx^{(r)}(t) = f(t, x_t^{(r)}, \xi(t))dt +$$
$$+ g_r(\left\|x_t^{(r)}\right\|) f_1(t, x_t^{(r)}, \xi(t))dt. \qquad (24)$$

Нехай тепер для визначеності $\|\psi\| \geq \|\varphi\|$. Оскільки $g_r(\|\varphi\|) = 0$ для $\varphi \bar{\in} U_{2r}(0)$, а для $\varphi \in U_{2r}(0)$ матимемо

$$|g_r(\|\varphi\|) f_1(t, \varphi, y) - g_r(\|\psi\|) f_1(t, \psi, y)| \leq$$
$$\leq |g_r(\|\varphi\|) - g_r(\|\psi\|)|\, |f_1(t, \varphi, y)| +$$
$$+ g_r(\|\psi\|)\, |f_1(t, \varphi, y) - f_1(t, \psi, y)| \leq$$
$$\leq 2rK_{2r} \cdot \frac{1}{r} \|\varphi - \psi\| + K_{2r} \|\varphi - \psi\| =$$
$$= 3K_{2r} \|\varphi - \psi\|.$$

Тоді збурення $g_r(\|\varphi\|) f_1(t, \varphi, y)$ у рівнянні (24) задовольняє глобальну умову Ліпшиця L1) зі сталою $3K_{2r}$, яку можна перетворити в малу величину за рахунок вибору $r > 0$. Отже, за теоремою 1 тривіальний розв'язок (24) сильно експоненціально p-стійкий, а за теоремою 3 — асимптотично стохастично стійкий. Тоді для досить малого $r > 0$, $\forall\, \varepsilon_2 > 0$ та $\varepsilon_1 \in (0, \gamma) \subset (0, r)$ можна записати нерівність $P\{\omega : \sup\limits_{t\geq 0} \left|x^{(r)}(t+s, s, \varphi, y)\right| \geq \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$, а також рівність $P\{\omega : \lim\limits_{t\to\infty} |x^{(r)}(t+s, s, \varphi, y)| = 0\} = 1$, якщо $\varphi \in U_\delta(0)$, а $\delta > 0$ досить мале.

Нехай τ_r — перша мить виходу розв'язку (12) з кулі $U_\delta(0)$. Зрозуміло, що $x(s + \tau_\gamma(t), s, \varphi, y) = x^{(r)}(s + \tau_r(t), s, \varphi, y)$ для всіх $\varphi \in U_\delta(0)$, $\delta \in (0, \gamma)$ $\forall t \geq 0$, $s \geq 0$ та $y \in Y$. Тому виконується нерівність $P\{\omega : \sup\limits_{t\geq 0} |x(t+s, s, \varphi, y)| \geq \varepsilon_1\} = 1 - P\{\omega : \sup\limits_{t\geq 0} |x(t+s, s, \varphi, y)| < \varepsilon_1\} = 1 - P\{\omega : \sup\limits_{t\geq 0} \left|x^{(r)}(t+s, s, \varphi, y)\right| < \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Звідси випливає стохастична стійкість тривіального розв'язку (12). Далі, якщо траєкторія рівняння (12) для $\varphi \in U_\delta(0)$, $\delta < \gamma$ не вийшла з кулі $U_\delta(0)$, то ця траєкторія задовольняє співвідношення (8) з означення 2, тобто $P\{\omega : \lim\limits_{t\to\infty} |x(t+s, s, \varphi, y)|\,|_{\tau_\gamma = \infty} = 0v\} = P\{\omega : \lim\limits_{t\to\infty} \left|x^{(z)}(t+s, s, \varphi, y)\right| = 0|_{\tau_\gamma=\infty}\} = 1$ для всіх $\varphi \in U_\delta(0)$, $s \geq 0$, $y \in Y$ та досить малого $\delta \in (0, \gamma) \subset (0, r)$.

Теорема 4 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Царьков Е.Ф.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами // ДАН УССР. Сер. А.— 1987.— N 3.— С.19—21.

2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 231 с.

3. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.: Наука, 1969.— 367 с.

4. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 431 с.

5. *Царьков Е.Ф., Ясинский В.К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 321 с.

6. *Свердан М.Л., Царьков Е.Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем.— Рига: РТУ, 1994.— 300 с.

7. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы.— М.: Физматиз, 1963.— 859 с.

8. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайными запаздываниями // Прикладная математика и механика.— 1967.— Т.1, N 3.— С.257—268.

Стаття надійшла до редколегії 11.11.2001