УДК 517.9

©2001 р. Т.М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Досліджено властивості залежних від параметра осциляційних сум, за допомогою яких встановлена оцінка нормальної фундаментальної матриці лінійної системи із швидко осцилюючими коефіцієнтами та імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. Одержана оцінка використана для доведення асимптотичної стійкості тривіального розв'язку нелінійної імпульсної системи.

We have investigated the peculiarities of oscillating sums depending on the parameters with the help of which we have found out the estimation of the normal fundamental matrix of linear system with quickly oscillating coefficients and impulse influence at fixed moments of time.The obtained estimation is used to prove asymptotic stability of the trivial solution of the nonlinear impulse system.

Проблема стійкості розв'язків нелінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом розглядалась у праці [1], де, зокрема, була доведена теорема (критерій стійкості за першим наближенням) про асимптотичну стійкість нульового роз'язку і показано, що питання стійкості довільного розв'язку нелінійної системи з імпульсним впливом зводиться до дослідження на стійкість нульового розв'язку.

У даній статті, грунтуючись на підході, запропонованому в [1], розглядається проблема стійкості тривіального роз'язку нелінійної імпульсної системи з малим параметром, в якій моменти імпульсного впливу також залежать від малого параметра.

При доведенні використовуються рівномірні оцінки осциляційних інтегралів [2] та сум [3], методика отримання оцінки норми фундаментальної матриці лінійної системи зі швидко осцилюючими коефіцієнтами без імпульсного впливу [4], експоненціальна оцінка матриціанта лінійної системи зі швидко осцилюючими коефіцієнтами та імпульсним впливом через рівні, залежні від малого параметра, проміжки часу [5].

1.Рівномірні оцінки осциляційних сум. Нехай $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), ..., \omega_m(\tau))$ — m-вимірна вектор-функція, визначена і $p \geq m$ раз неперервно диференційовна на $[0,1]$, вронськіан функцій $\omega_1^{'}(\tau), ..., \omega_m^{'}(\tau)$ задовольняє нерівність

$$|\det(W(\omega^{'}(\tau)))| \geq c_1^{-1} > 0, \quad \tau \in [0,1], \quad (1)$$

де c_1 — стала.

Розглянемо осциляційну суму вигляду

$$S_k(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{0 \leq \tau_j < \tau} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\}, \quad (2)$$

де $\tau \in [0,1]$, $\tau = \varepsilon t$ — "повільний" час, $k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}, (0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий додатний параметр, i — уявна одиниця.

У праці [3] отримана оцінка суми (2) в припущенні, що $\tau_j \in [0,1]$ — фіксовані моменти часу, відносно яких вимагалось, щоб $\tau_{j+1} - \tau_j = 2\pi\varepsilon$, $j \in \mathbb{N}$. Для таких τ_j була встановлена оцінка

$$|S_k(\tau, \varepsilon)| \leq c_2(k) \varepsilon^{\frac{1}{m+1}} \quad \tau \in [0,1], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

зі сталою $c_2(k)$, яка не залежить від ε.

У даній статті сума (2) оцінюється в припущенні, що моменти імпульсного впливу τ_j задовольняють умову

$$\theta_1 \varepsilon \leq \tau_{j+1} - \tau_j \leq \theta_2 \varepsilon, \quad (3)$$

де θ_1, θ_2 — додатні сталі, а послідовність $\{\bar{\tau}_j = \tau_{j+1} - \tau_j\}$ збіжна.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (1) і (3), а послідовність* $\{\bar{\tau}_j\}$ *збіжна. Тоді для довільного досить малого* $\eta > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0 > 0$*, що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tau \in [0,1]$ *і* $k \neq 0$ *справджується оцінка*

$$|S_k(\tau, \varepsilon)| \leq \|k\|\eta. \tag{4}$$

Доведення. Оскільки послідовність $\{\bar{\tau}_j\}$ збіжна, то й збіжною є послідовність $\{\bar{t}_j\}$, $\varepsilon\bar{t}_j = \bar{\tau}_j$. Тому для будь-якого $\eta > 0$ існує таке не залежне від ε число j_0, що для всіх $j > j_0, l \in \mathbb{N}$, виконується нерівність

$$|\bar{t}_j - \bar{t}_{j+l}| < \xi(\eta). \tag{5}$$

Явний вигляд функції $\xi(\eta)$ буде визначений нижче.

Оцінимо окремо суми для $j = \overline{1, j_0 - 1}$ і $j \geq j_0$:

$$|S_k(\tau,\varepsilon)| \leq \varepsilon \Bigl| \sum_{0 \leq \tau_j < \tau_{j_0}} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}\Bigr| +$$

$$+\varepsilon \Bigl| \sum_{\tau_{j_0} \leq \tau_j < \tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}\Bigr| \leq$$

$$\leq \varepsilon j_0 + |\bar{S}_k(\tau,\varepsilon)|, \tag{6}$$

де $\bar{S}_k(\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon \sum\limits_{\tau_{j_0} \leq \tau_j < \tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}$.

З умови (1) випливає існування такої сталої c_3, для якої на проміжку $[0,1]$ виконується нерівність

$$|\omega^{(r)}(\tau)| \leq c_3, \quad r = \overline{0, m}. \tag{7}$$

Для оцінки суми $\bar{S}_k(\tau,\varepsilon)$ скористаємось методом, запропонованим у [3] при встановленні оцінки суми (2) для випадку, коли $\tau_{j+1} - \tau_j = 2\pi\varepsilon$, $j \in \mathbb{N}$.

Подамо відрізок $[\tau_{j_0}, \tau]$ у вигляді об'єднання відрізків

$$[\tau_{j_0}, \tau] = \bigcup_{q=0}^{l-1}[2\delta q, 2\delta(q+1)] \cup [2\delta l, \tau],$$

де δ — стала, яка не залежить від ε і k, l — ціла частина числа $(\tau - \tau_{j_0})/2\delta$.

Запишемо суму $\bar{S}_k(\tau,\varepsilon)$ у вигляді

$$\bar{S}_k(\tau,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \sum_{q=0}^{l-1} \sum_{2\delta q \leq \tau_j < 2\delta(q+1)} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\} +$$

$$+\varepsilon \sum_{2\delta q \leq \tau_j < \tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}. \tag{8}$$

Розіб'ємо інтервал $[2\delta q, 2\delta(q+1))$ на "резонансну" A і "нерезонансну" B множини [3], які не перетинаються. Як і в [3] , віднесемо до множини A відрізки довжиною $2\mu + \theta_2\varepsilon$, на яких функція $(k, \omega(\tau))$ набуває значення 0 і значень, близьких до 0. Кількість цих відрізків не перевищує $d_1 \leq 2^{m-1} - 1$. Поза ними виконується нерівність

$$|(\lambda, \omega'(\tau))| \geq c_4\mu^{m-1}, \tag{9}$$

де

$$\lambda = \frac{k}{\|k\|}, \qquad 0 < \mu < \delta, \quad c_4 \equiv \frac{1}{2m!mc_1c_3^{m-1}}.$$

Визначимо функцію $g(\tau)$ на проміжку [0,1] наступним чином: якщо $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, то вона набуває значення $\bar{\tau}_j/(2\pi\varepsilon)$.

З очевидної нерівності

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}\min_{n \in Z}|x - \pi n|$$

і теореми про середнє значення випливає, що

$$|\sin\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(k,\omega(z))dz| \geq$$

$$\geq 2\min_{n \in Z}|g(\tau_j^*)(k,\omega(\tau_j^*)) - n|. \tag{10}$$

Тут τ_j^* — деяка точка з $[\tau_j, \tau_{j+1})$.

Віднесемо до множини A такі відрізки, на яких функція $G_k(\tau) \equiv g(\tau)(k,\omega(\tau))$ набуває цілочислових значень і близьких до них. Оскільки $|G_k(\tau)| \leq \theta_2/(2\pi)c_3\|k\ \|$, то існує тільки $d_2 < (\theta_2/\pi)c_3\|k\| + 1$ цілих значень функції $G_k(\tau)$.

Нехай в точці τ' функція $G_k(\tau)$ набуває цілого значення n_1, а в точці τ'' відрізняється від n_1 на $\zeta < c_4\mu^m$, тобто

$$G_k(\tau') = n_1, \quad |G_k(\tau'') - n_1| = \zeta.$$

Звідси маємо $|G_k(\tau'') - G_k(\tau')| = \zeta$. Не втрачаючи загальності, припустимо, що під знаком модуля — додатне число. Тоді, враховуючи (7) і (9) , маємо

$$g(\tau'')((k, \omega(\tau'')) - (k, \omega(\tau')))+$$

$$+(k, \omega(\tau''))(g(\tau'') - g(\tau')) = \zeta,$$

$$|\tau'' - \tau'| \leq \frac{|g(\tau'') - g(\tau')| \|k\| c_3}{\theta_1 c_4 \|k\| \mu^{m-1}} +$$

$$+\frac{c_4\mu^m}{\theta_1 c_4 \|k\| \mu^{m-1}}.$$

З означення функції $g(\tau)$ і нерівності (5) випливає

$$|g(\tau'') - g(\tau')| \leq \frac{\xi(\eta)}{2\pi}.$$

Тому

$$|\tau'' - \tau'| \leq \frac{c_3}{2\pi c_4 \theta_1} \frac{\xi(\eta)}{\mu^{m-1}} + \frac{\mu}{\theta_1 \|k\|}.$$

Отже, існує d_2 відрізків довжиною $\dfrac{c_3}{\pi c_4 \theta_1} \dfrac{\xi(\eta)}{\mu^{m-1}} + 2\dfrac{\mu}{\theta_1 \|k\|} + 2\theta_2\varepsilon$, на яких функція $G_k(\tau)$ набуває цілих і близьких до цілих значень, а поза ними (на множині B) виконується нерівність

$$\min_{n \in Z} |G_k(\tau) - n| \geq c_4\mu^m. \tag{11}$$

Оцінимо тепер кожний доданок суми (8) окремо, враховуючи умову (3):

$$\varepsilon \left| \sum_{2q\delta \leq \tau_j \leq 2(q+1)\delta} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\} \right| \leq$$

$$\leq \frac{d_1}{\theta_1}(2\mu + 2\theta_2\varepsilon)+$$

$$+\frac{d_2}{\theta_1}\left(\frac{c_3}{\pi c_4\theta_1}\frac{\xi(\eta)}{\mu^{m-1}} + 2\frac{\mu}{\theta_1\|k\|} + 2\theta_2\varepsilon\right)+$$

$$+\varepsilon \sum_{\nu=1}^{d_3} \left| \sum_{\alpha_\nu \leq \tau_j \leq \beta_\nu} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\} \right|. \tag{12}$$

Тут $d_3 < d_1 + d_2 + 1$ — кількість відрізків множини B, а $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ —її складовий відрізок.

Оскільки на проміжках множини B виконується нерівність (11), то, враховуючи (10), маємо

$$\varepsilon \left| \sum_{\alpha_\nu \leq \tau_j \leq \beta_\nu} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2c_4\mu^m} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_\nu - 2} \left\{ \left| \int_{\tau_{j+1}}^{\tau_{j+2}} (k, \omega(z)) dz - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (k, \omega(z)) dz \right| \times \right.$$

$$\times \left[4 \left| \sin \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_{j+1}}^{\tau_{j+2}} (k, \omega(z)) dz \right| \right]^{-1} \times$$

$$\left. \times \left[\left| \sin \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (k, \omega(z)) dz \right| \right]^{-1} \right\} \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2c_4\mu^m} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_\nu - 2} \frac{|\bar{\tau}_{j+1}(k, \omega(\tau^*_{j+1})) - \bar{\tau}_j(k, \omega(\tau^*_j))|}{16c_4^2\mu^{2m}}$$

$$\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2c_4\mu^m} + \sum_{j=1}^{n_\nu - 2} \left[\frac{|\bar{\tau}_{j+1} - \bar{\tau}_j| |(k, \omega(\tau^*_{j+1}))|}{16c_4^2\mu^{2m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{\tau}_j |(k, \omega(\tau^*_{j+1})) - (k, \omega(\tau^*_j))|}{16c_4^2\mu^{2m}} \right] \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2c_4\mu^m} +$$

$$+\left(\|k\| c_3 \frac{\xi(\eta)}{\mu^{2m}} + 2\|k\|\theta_2 c_3 \frac{\varepsilon}{\mu^{2m}} \right) \frac{(\beta_\nu - \alpha_\nu)}{16c_4^2\theta_1}. \tag{13}$$

Тут n_ν — кількість імпульсів на відрізку $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, τ^*_j, τ^*_{j+1} — деякі точки відрізків $[\tau_j, \tau_{j+1}], [\tau_{j+1}, \tau_{j+2}]$ відповідно.

Об'єднуючи (6), (12) і (13), маємо

$$|S_k(\tau,\varepsilon)| \le c_5\mu + c_6\|k\|\varepsilon + c_7\|k\|\varepsilon\mu^{-m}+$$
$$+c_8\|k\|\varepsilon\mu^{-2m} + c_9\|k\|\xi(\eta)\mu^{-m+1}+$$
$$+c_{10}\|k\|\xi(\eta)\mu^{-2m} \le c_{11}\|k\|(\varepsilon+\varepsilon\mu^{-m}+$$
$$+\xi(\eta)\mu^{-m+1} + \xi(\mu)\mu^{-2m} + \varepsilon\mu^{-2m}) + c_5\mu.$$

Тут $c_5, c_6, ..., c_{10}$ – сталі, які легко виражаються в явному вигляді через дані досліджуваної задачі, а $c_{11} = \max\{c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}\}$.

Для довільного додатного $\eta \le 1$ задамо функцію $\xi(\eta)$ та величини μ і ε_0 у такий спосіб:

$$\xi(\eta) = \frac{\eta^{2m+1}}{10c_{11}}, \quad \mu = \frac{\eta}{2c_5}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\eta^{2m+1}}{10c_{11}}.$$

Тоді

$$|S_k(\tau,\varepsilon)| \le \|k\|(\eta^{2m+1}+\eta^{m+1}+\eta^{m+2}+2\eta)/10+$$
$$+\eta/2 \le \|k\|\eta.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо $\|W^{-1}(\omega'(\tau)\|$ і функції $\omega_\nu(\tau), \omega'_\nu(\tau)$ обмежені деякою сталою, функції $\omega_\nu^{(r)}(\tau)$, $\nu = \overline{1,m}, r = \overline{1,m}$, рівномірно неперервні в $I = [t,\infty)$, послідовність $\{\bar\tau_j\}$ збіжна і задовольняє умову (3), то для суми вигляду*

$$S_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \sum_{\bar t \le \tau_j < \bar t+\tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\},$$

де $\bar t \ge t$, $\bar\tau \ge t$, $\tau \in [0,T]$, T — додатна стала, правильне твердження: для довільного $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, і $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ виконується нерівність

$$|S_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon)| \le c_{12}\|k\|\eta \qquad (14)$$

зі сталою c_{12}, яка не залежить від $\bar t, \bar\tau, k, \varepsilon, \eta$, але залежить від T.

Надалі вважатимемо, що в точках імпульсного впливу стрибки функцій мають вигляд $\Delta x|_{\tau=\tau_j} = x(\tau_j+0) - x(\tau_j-0)$, а самі функції в цих точках неперервні зліва, тобто $x(\tau_j) = x(\tau_j - 0)$.

Теорема 2. *Нехай:*

1) функції $\omega_\nu^{(r)}(\tau)$, $\nu = \overline{1,m}, r = \overline{1,m}$, рівномірно неперервні в $I = [t,\infty)$;

2) $\|W^{-1}(\omega'(\tau)\|$ і функції $\omega_\nu(\tau), \omega'_\nu(\tau)$ обмежені деякою сталою;

3) послідовність $\{\bar\tau_j\}$ збіжна і задовольняє умову (3);

4) для кожного фіксованого ε функція $f(y,\varepsilon)$ неперервно диференційовна за y в I, крім точок імпульсного впливу, а величина стрибка Δf в точках τ_j задовольняє нерівність

$$\|\Delta f|_{y=\tau_j}\| \le \varepsilon c \sup_{y\in I}\|f(y,\varepsilon)\|,$$

де c — деяка додатна стала і

$$\sup_{y\in I}\|f(y,\varepsilon)\| + \sup_{\substack{y\in I\\ y\ne\tau_j}}\left\|\frac{\partial f(y,\varepsilon)}{\partial y}\right\| < \infty.$$

Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для осциляційної суми

$$\bar S_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \sum_{\bar t \le t_j < \bar t+\tau} f(\tau_j,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\},$$

де $\bar t \ge t, \bar\tau \ge t, \tau \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $k \ne 0$, справджується оцінка

$$\|\bar S_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon)\| \le c_{13}\|k\|\eta\Bigg(\sup_{y\in I}\|f(y,\varepsilon)\|+$$
$$+\sup_{\substack{y\in I\\ y\ne\tau_j}}\left\|\frac{\partial f(y,\varepsilon)}{\partial y}\right\|\Bigg). \qquad (15)$$

Тут стала c_{13} не залежить від $\bar t, \bar\tau, k, \varepsilon, \eta$, але залежить від T.

Доведення. Скористаємось тотожністю

$$\sum_{j=1}^{l} u_j v_j = u_l \sum_{j=1}^{l} v_j - \sum_{j=1}^{l-1}(u_{j+1}-u_j)\sum_{\nu=1}^{j} v_\nu.$$

Нехай $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_q$ — моменти імпульсного впливу на $[\bar t, \bar t+\tau)$.

З теореми 1 випливає, що для довільного досить малого $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується оцінка (14).Тому

$$\|\bar{S}_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\|f(\tau_q, \varepsilon\| \left\| \sum_{j=1}^{q} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{\tau_j} (k, \omega(z)) dz \right\} \right\| + \right.$$

$$+ \left\| \sum_{j=1}^{q-1} (f(\tau_{j+1}, \varepsilon) - f(\tau_j, \varepsilon)) \right.$$

$$\left. \left. \sum_{\nu=1}^{j} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{\tau}}^{\tau_\nu} (k, \omega(z)) dz \right\} \right\| \right) \leq$$

$$\leq c_{12} \|k\| \eta \sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+\tau)} \|f(y, \varepsilon)\| +$$

$$+ \sup_{\substack{y \in [\bar{t}, \bar{t}+\tau) \\ y \neq \tau_j}} \left\| \frac{\partial f(y, \varepsilon)}{\partial y} \right\| \varepsilon \theta_2 \frac{1}{\varepsilon \theta_1} c_{12} \|k\| \eta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-1} \|\Delta f(\tau_j)\| c_{12} \|k\| \eta \leq$$

$$\leq c_{12} \|k\| \eta \left(\sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+\tau)} \|f(y, \varepsilon)\| + \right.$$

$$+ \frac{\theta_2}{\theta_1} \sup_{\substack{y \in [\bar{t}, \bar{t}+\tau) \\ y \neq \tau_j}} \left\| \frac{\partial f(y, \varepsilon)}{\partial y} \right\| +$$

$$\left. + c\varepsilon \frac{1}{\theta_1 \varepsilon} \sup_{y \in [\bar{t}, \bar{t}+\tau)} \|f(y, \varepsilon)\| \right) \leq$$

$$\leq c_{13} \|k\| \eta \left(\sup_{y \in I} \|f(y, \varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + \sup_{\substack{y \in I \\ y \neq \tau_j}} \left\| \frac{\partial f(y, \varepsilon)}{\partial y} \right\| \right),$$

що й доводить теорему зі сталою

$$c_{13} = c_{12} \max\left\{ 1 + \frac{c}{\theta_1}, \frac{\theta_2}{\theta_1} \right\}. \tag{16}$$

2.Оцінка норми матриціанта лінійної системи. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{d\tau} = (A(\tau) + \tilde{A}(\varphi, \tau))x, \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon(B_j + B(\varphi, \tau_j))x, \tag{17}$$

в якій $\tau \in I = [t, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $j \in \mathbb{N}$, послідовність $\{\bar{\tau}_j\}$ збіжна і задовольняє умову (3), $\tau_1 > t$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, матриці B_j сталі , матриці $A(\tau)$, $\tilde{A}(\varphi, \tau)$, $\partial\tilde{A}(\varphi, \tau)/\partial\tau$, $B(\varphi, \tau)$ і $\partial B(\varphi, \tau)/\partial\tau$ неперервні в $\mathbb{R}^{m+1}$ і 2π-періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, вектора φ, причому

$$\sup_I \|A(\tau)\| + \sum_{k \neq 0} \left[\sup_I \|A_k(\tau)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|k\|} \sup_I \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} A_k(\tau) \right\| \right] \leq \sigma_1 < \infty,$$

$$\sup_j \|B_j\| + \sum_k \left[\sup_I \|B_k(\tau)\| \|k\|^2 + \right.$$

$$\left. + \sup_I \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} B_k(\tau) \right\| \|k\|) \right] \leq \sigma_1, \tag{18}$$

$$\sup_I \|A_0(\tau)\| \leq \alpha, \sup_I \|B_0(\tau)\| \leq \beta,$$

для всіх $\tau \in I$. Тут $A_k(\tau), B_k(\tau)$ — коефіцієнти Фур'є при гармоніках $e^{i(k,\varphi)}$ матриць $\tilde{A}(\varphi, \tau)$ і $B(\varphi, \tau)$, $(k, \varphi) = k_1\varphi_1 + ... + k_m\varphi_m$ — скалярний добуток векторів, $\|k\| = \sqrt{(k, k)}$, норма матриці узгоджена з евклідовою нормою вектора,числа α і β досить малі.

Припустимо, що $\varphi = \varphi_t^\tau(\psi, \varepsilon)$ є розв'язком імпульсної задачі Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon\Phi_j(\varphi), \quad \varphi|_{\tau=t} = \psi, \tag{19}$$

де $\psi \in \mathbb{R}^m, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, функції $b, \partial b(\varphi, \tau)/\partial\varphi$ та Φ_j неперервні в $\mathbb{R}^{m+1}$ і обмежені сталою σ_1, частоти $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), ..., \omega_m(\tau))$ та їх похідні до деякого порядку $p \geq m$ рівномірно неперервні на I і [2,3]

$$\|(W_p^*(\tau)W_p(\tau))^{-1}W_p^*(\tau)\| \leq \sigma_1 \quad \tau \in I. \tag{20}$$

Тут через $W_p(\tau)$ і $W_p^*(\tau)$ позначено відповідно $p \times m$-матрицю

$$W_p(\tau) = \left(\frac{d^r}{d\tau^r} \omega_\nu(\tau) \right)_{r,\nu=1}^{p,m}$$

і транспоновану до неї. Припустимо також, що частоти та їх похідні першого порядку обмежені сталою σ_1.

Вважатимемо, що матрицант $Q(\tau, t, \varepsilon)$, $Q(t, t, \varepsilon) = E$, лінійної імпульсної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x, \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon B_j x$$

задовольняє нерівність

$$\|Q(\tau, t, \varepsilon)\| \leq K e^{-\gamma(\tau - t)}, \tau \geq t, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1], \tag{22}$$

з деякими додатними сталими K і γ, не залежними від ε.

У праці [5] отримана оцінка норми матрицанта системи (17)

$$\|\Omega_t^\tau(\psi, \varepsilon)\| \leq \bar{K}_1 e^{-\bar{\gamma}_1(\tau - t)},$$

$$\tau \geq t,\ \psi \in R^m,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

з додатними сталими $\bar{K}_1 > K$ і $\bar{\gamma}_1 < \gamma$ за умови, що $\tau_{j+1} - \tau_j = \varepsilon\theta$, а α і β досить малі. В даній статті ставиться задача про одержання аналогічної оцінки, коли моменти імпульсної дії задовольняють умову (3) і послідовність $\{\bar{\tau}_j\}$ збіжна.

Для довільного $\tau > t$ запишемо зображення [1]

$$\Omega_t^\tau = Q(\tau, t, \varepsilon) + \int\limits_t^\tau Q(\tau, \xi, \varepsilon)\tilde{A}(\varphi_t^\xi, \xi)\Omega_t^\xi d\xi +$$

$$+\varepsilon \sum_{t<\tau_j<\tau} Q(\tau, \tau_j, \varepsilon) B(\varphi_t^{\tau_j}, \tau_j)\Omega_t^{\tau_j}. \tag{23}$$

Для оцінки другого доданка правої частини (23) використовується схема, запропонована в [4] при встановленні оцінки норми фундаментальної матриці зі швидко осцилюючими коефіцієнтами без імпульсного впливу. Для оцінки третього доданка правої частини (23) розкладемо функцію $B(\varphi, \tau)$ в ряд Фур'є.

Нехай q — ціла частина $\tau - t - 1$. Тоді

$$[t, \tau) = \bigcup_{s=0}^{q-1}[t + s, t + s + 1] \cup [t + q, \tau)$$

і при $\tau > t + 1$

$$\left\|\varepsilon \sum_{t<\tau_j<\tau} Q(\tau, \tau_j, \varepsilon) B(\varphi_t^{\tau_j}, \tau_j)\Omega_t^{\tau_j}\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k\neq 0}\left[\sum_{s=0}^{q-1}\left\|\varepsilon \sum_{t+s\leq\tau_j<t+s+1} F_k(\tau, \tau_j, t, \varepsilon)\times\right.\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_t^{\tau_j}(k, \omega(z))dz\right\}\right\| +$$

$$+\left\|\varepsilon \sum_{t+q\leq\tau_j<\tau} F_k(\tau, \tau_j, t, \varepsilon)\times\right.$$

$$\left.\left.\times \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_t^{\tau_j}(k, \omega(z))dz\right\}\right\|\right],$$

де

$$F_k(\tau, \tau_j, t, \varepsilon) = Q(\tau, \tau_j, \varepsilon) B_k(\tau_j)\times$$

$$\times \exp\{i(k, \theta_t^{\tau_j})\}\Omega_t^{\tau_j},$$

$$\theta_t^\xi = \varphi_t^\xi - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^\xi \omega(z)dz.$$

Згідно із зробленими припущеннями

$$\|\Delta F_k|_{\xi=\tau_j}\| \leq \varepsilon(2+\|k\|)(\sigma_1+\beta) \sup_{[t+s,t+s+1]}\|F_k\|.$$

Тому з теореми 2 випливає, що для довільного досить малого $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon]$ з деякою сталою $\bar{c}_{13}$ виконується оцінка

$$\left\|\varepsilon \sum_{t+s\leq\tau_j<t+s+1} F_k(\tau, \tau_j, t, \varepsilon)\times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_t^{\tau_j}(k, \omega(z))dz\right\}\right\| \leq$$

$$\leq \eta\bar{c}_{13}(\|k\|^2(2 + 2\alpha + 2\sigma_1)\sup_I\|B_k(\tau)\| +$$

$$+\|k\|\sup_I\|\frac{\partial}{\partial\tau}B_k(\tau)\|)\times$$

$$\times \sup_{[t+s,t+s+1]} \|Q(\tau,\tau_j,\varepsilon)\| \sup_{[t+s,t+s+1]} \|\Omega_t^{\tau_j}\|.$$

Використавши рівномірні оцінки осциляційних інтегралів [2] , методику з праці [3] і лему 2.1 з [1, с.16], отримаємо оцінку

$$\|\Omega_t^\tau(\psi,\varepsilon)\| \le 2Ke^{(-\gamma+\alpha K+\beta K\theta_1^{-1}+c_{14}\eta)(\tau-t)},$$

$$\tau > t+1, \psi \in \mathbb{R}^m,$$

з деякою сталою c_{14}.

Звідси випливає, що для довільного додатного $\gamma_1 < \gamma - (\alpha + \beta\theta_1^{-1})K$ і $\eta \in (0,\eta_0]$, виконується нерівність

$$\|\Omega_t^\tau(\psi,\varepsilon)\| \le K_1 e^{-\gamma_1(\tau-t)}$$

при

$$\eta_0 < (\gamma - K(\alpha+\beta\theta_1^{-1}))c_{14}, \quad K_1 = 2K.$$

Для $\tau \in [t,t+1]$ з (23) випливає

$$\|\Omega_t^\tau(\psi,\varepsilon)\| \le K_1 e^{-\gamma_1} \le K_1 e^{-\gamma_1(\tau-t)},$$

де

$$K_1 = 2Ke^{\gamma_1 + K[\sigma_1+\alpha+2\theta_1^{-1}(\sigma_1+\beta)]} > 2K.$$

Таким чином, для довільного додатного $\eta < \eta_0$ існує $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \eta^{2m+1}/(10c_{11})\}$, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, справджується оцінка

$$\|\Omega_t^\tau(\psi,\varepsilon)\| \le K_1 e^{-\gamma_1(\tau-t)}. \qquad (24)$$

Отже, доведена така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови (20), (3), (18), (22) і послідовність $\{\bar\tau_j\}$ збіжна, то для довільного додатного $\gamma_1 < \gamma - (\alpha+\beta\theta_1^{-1})K$ існують таке досить мале $\varepsilon_0 > 0$ і досить велике $K_1 > 0$, що виконується оцінка (24) для довільних $\tau > t, \psi \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.*

3. Асимптотична стійкість розв'язків нелінійної системи. Тепер розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{d\tau} = (A(\tau)+\tilde A(\varphi,\tau))x + g(x,\varphi,\tau), \quad \tau \ne \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon(B_j + B(\varphi,\tau_j))x + I_j(x,\varphi), \quad (25)$$

в якій , як і раніше,$\tau \in I = [t,\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $j \in \mathbb{N}$, послідовність $\{\bar\tau_j\}$ збіжна і задовольняє умову (3), $\tau_1 > t$, $(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, матриці B_j сталі , матриці $A(\tau)$, $\tilde A(\varphi,\tau)$, $\partial\tilde A(\varphi,\tau)/\partial\tau$, $B(\varphi,\tau)$ і $\partial B(\varphi,\tau)/\partial\tau$ неперервні $\mathbb{R}^{m+1}$ і 2π-періодичні по кожній із координат φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, вектора φ і задовольняють умову (18).

Нехай $\varphi = \varphi_t^\tau(\psi,\varepsilon)$ — розв'язок імпульсної задачі Коші (19), $Q(\tau,t,\varepsilon)$ — матрицант системи (21), система (25) має тривіальний розв'язок, тобто

$$g(0,\varphi,\tau) = 0, \quad I_j(0,\varphi) = 0,$$

$$\tau \in I, \quad \varphi \in \mathbb{R}^m, j \in \mathbb{N}.$$

Будемо досліджувати стійкість цього розв'язку. Така задача для систем без малого параметра за умови $\tau_{j+1} - \tau_j \ge \theta$, $j \in \mathbb{N}$, розв'язана в [1, с.115].

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, а функції $g(x,\varphi,\tau)$, $I_j(x,\varphi)$ задовольняють нерівності*

$$\|g(x,\varphi,\tau)\| \le a\|x\|, \quad \|I_j(x,\varphi)\| \le a\|x\|, \qquad (26)$$

$$\tau \in I, \varphi \in \mathbb{R}^m, j \in \mathbb{N}, \|x\| \le h, h > 0.$$

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ при досить малих a тривіальний розв'язок системи (25) асимптотично стійкий.

Доведення. Довільний роз'язок системи (25) можна подати у вигляді [1]

$$x(x_0,\varphi,\tau) = \Omega_t^\tau x_0 +$$

$$+ \int_t^\tau \Omega_t^\xi g(x(x_0,\varphi,\xi),\varphi,\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{t<\tau_j<\tau} \Omega_t^{\tau_j} I_j(x(x_0,\varphi,\xi),\varphi), \tau > t,$$

де Ω_t^τ — матрицант системи (17). Із теореми 3 випливає, що існують таке досить мале $\varepsilon_0 > 0$ і досить велике $K_1 > 0$, що для матрицанта Ω_t^τ виконується оцінка (24). Тому, враховуючи умову (26), маємо

$$\|x(x_0,\varphi,\tau)\| \le K_1 e^{-\gamma_1(\tau-t)}\|x_0\| +$$

$$+\int_t^\tau K_1 e^{-\gamma_1(\tau-\xi)} a\|x(x_0,\varphi,\xi)\|d\xi+$$

$$+\sum_{t<\tau_j<\tau} K_1 e^{-\gamma_1(\tau-\tau_j)} a\|x(x_0,\varphi,\tau_j)\|.$$

Виберемо x_0 так, щоб $\|x_0\| < h/K_1$. Використовуючи лему 2.1 з [1, с.16], отримуємо

$$\|x(x_0,\varphi,\tau)\| \le he^{-\gamma_2(\tau-t)}$$

для довільних додатного $\gamma_2 < \gamma_1 - K_1 a - \theta_1^{-1}\ln(1+K_1 a)$, $\tau > t$ і $\varphi \in \mathbb{R}^m$, що й доводить теорему.

Тепер розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = (A(\tau)+\tilde{A}(\varphi,\tau))x+g(x,\varphi,\tau), \quad \tau \ne \tau_j(x),$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j(x)} = \varepsilon(B_j+B(\varphi,\tau_j))x+I_j(x,\varphi), \quad (27)$$

в якій $\tau, x, \varphi, j, \varepsilon, B_j, A(\tau), \tilde{A}(\varphi,\tau)$, і $B(\varphi,\tau)$ такі ж, як і в системі (25).

Нехай $\varphi = \varphi_t^\tau(\psi,\varepsilon)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(\varphi,\tau), \quad \varphi|_{\tau=t} = \psi,$$

де ψ, b — такі ж, як у (19).

Поряд з системою (27) розглянемо систему

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x, \quad \tau \ne \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon B_j x, \quad (28)$$

в якій $|\tau_j(0) - \tau_j| \le \Delta$, $j \in \mathbb{N}$, де $\Delta = \Delta(h)$ — додатна стала, $\Delta(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Теорема 5. *Нехай:*

1) виконуються умови (18),(20);

2) матрицант системи (28) задовольняє нерівність (22) ;

3) система (27) має тривіальний роз'язок;

4) для функцій $g(x,\varphi,\tau)$, $I_j(x,\varphi)$ виконуються нерівності (26);

5) функції $\tau_j(x)$ задовольняють умову Ліпшиця і

$$\theta_1\varepsilon \le \min_{\|x\|\le h} \tau_{j+1}(x) - \max_{\|x\|\le h} \tau_j(x) \le \theta_2\varepsilon,$$

$$\tau_j(x) \ge \tau_j(x+\varepsilon(B_j+B(\varphi,\tau_j(x))x))$$

$$\tau \in I, \varphi \in \mathbb{R}^m, j \in \mathbb{N}, \|x\| \le h, h > 0,$$

а послідовність $\{\bar\tau_j(x)\}$ збіжна для кожного $\|x\| \le h$ ($\bar\tau_j(x) = \tau_{j+1}(x) - \tau_j(x)$).

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ при досить малих a тривіальний розв'язок системи (27) асимптотично стійкий.

При доведенні використовується схема доведення теореми 17.1 з [1] та оцінка (24).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища шк., 1987.— 288 с.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.

3. *Астафьева М.Н.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, N8.— С.1124—1126.

4. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Про фундаментальну матрицю лінійної системи із швидко осцилюючими коефіцієнтами // Нелінійні коливання.— 2000.— **3**, N4.— С.497—504.

5. *Петришин Р.І., Сопронюк Т. М.* Властивості фундаментальної матриці лінійної системи з імпульсним впливом зі швидко осцилюючими коефіцієнтами // Диференціальні та інтегральні рівняння : Тези доп. міжнар. конф. (12—14 вересня 2000 р.).— Одеса: Астропринт, 2000.— С.216.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2000