УДК 517.51

©2001р. О.В.Собчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ І ПРОСТОРИ ЛЕБЕҐА

У зв'язку з берівською класифікацією нарізно неперервних відображень та їх аналогів уведено відповідне поняття простору Лебеґа. Доведено, що топологічний векторний простір, який подається як об'єднання зростаючої послідовності метризовних підпросторів, і σ-метризовний паракомпакт є просторами Лебеґа.

In connection with Baire classification of separately continuous mappings and its analogs it is introduced the corresponding notion of Lebesgue space. It is proved that topological vector space which is union of increasing sequence of metrizable subspaces and σ-metrizable paracompactum are Lebesque spaces.

У даній замітці продовжуються дослідження берівської класифікації векторнозначних відображень, що проводились у [1—3].

1. Означення, позначення і допоміжні твердження. Для топологічних просторів X, Y і Z позначимо через $CB_\alpha(X \times Y, Z)$ клас усіх відображень $f : X \times Y \to Z$, неперервних відносно першої змінної і берівського класу α відносно другої, і через $B_\alpha(X \times Y, Z)$ — клас усіх відображень берівського класу α на $X \times Y$.

Нагадаємо, що топологічний простір називається σ-метризовним, якщо він зображується у вигляді зліченного об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів. Якщо в кожне відкрите покриття гаусдорфового простору можна вписати локально скінченне відкрите підпокриття, то такий простір називається паракомпактом. Сім'я $(h_i : i \in I)$ непервних функцій $h_i : X \to [0,1]$ утворює на X розбиття одиниці, якщо $\sum\limits_{i \in I} h_i(x) = 1$ для кожного $x \in X$. Розбиття одиниці $(h_i : i \in I)$ підпорядковане покриттю $\mathcal{U}$ топологічного простору X, якщо для кожного $i \in I$ прообраз $h_i^{-1}((0,1]) \subseteq U$ для деякого $U \in \mathcal{U}$. Воно називається локально скінченним, якщо для кожної точки $x \in X$ існує її окіл V, такий, що множина $\{i \in I : h_i^{-1}((0,1]) \bigcap V \neq \emptyset\}$ є скінченною. Існування локально скінченного підпорядкованого відкритому покриттю розбиття одиниці є характеристичною умовою паракомпактності [4, с.447].

Топологічний простір X називатимемо *простором Лебеґа*, якщо для довільного топологічного простору Y, локально опуклого простору Z і довільного порядкового числа $\alpha < \omega_1$ правильне включення $CB_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$.

Якщо попереднє включення має місце для довільного топологічного векторного простору Z, то простір X називатимемо *сильним простором Лебеґа.*

При доведенні основних результатів використовуватимемо наступні твердження.

Лема. *Нехай X, Y – топологічні простори, Z – топологічний векторий простір, $(h_i)_{i \in I}$ – локально скінченне розбиття одиниці на X, $(f_i)_{i \in I}$ – сім'я відображень $f_i : Y \to Z$ берівського класу α на Y. Тоді відображення $f(x,y) = \sum\limits_{i \in I} h_i(x) f_i(y)$ є берівського класу α на $X \times Y$.*

Доведення цієї леми для $Z = \mathbb{R}$ можна знайти в [2]. У загальному випадку вона доводиться цілком аналогічно.

Теорема (Гаусдорф [4, с.439]). *Нехай X_0 — замкнений підпростір метризовного простору X. Тоді кожну метрику на X_0 можна неперервно продовжити до метрики на весь простір X.*

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, такий, що існує послідовність $((h_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ локально скінченних розбиттів одиниці на X, а також існує послідовність сімей $((x_{i,n} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ точок з X, що задовольняє умову:*

(i) для кожної точки $x \in X$ і довільного її околу U існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ і всіх $i \in I_n$ з того, що $x \in \mathrm{supp} h_{i,n}$, випливає, що $x_{i,n} \in U$.

Тоді X – простір Лебеґа.

Якщо до того ж виконується умова

(ii) $\forall x \in X \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} :$ $|\{i \in I_n : h_{i,n}(x) \neq 0\}| \leq M$, то X – сильний простір Лебеґа.

Доведення. Нехай $f \in CB_\alpha(X \times Y, Z)$, де Y – топологічний простір, Z – локально опуклий простір і $\alpha < \omega_1$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $f_n(x, y) = \sum\limits_{i \in I_n} h_{i,n}(x) f(x_{i,n}, y)$. Згідно з лемою, $f_n \in B_\alpha(X \times Y, Z)$. Залишається перевірити, що $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x, y) = f(x, y)$ для кожної точки $(x, y) \in X \times Y$.

Нехай $(x_0, y_0) \in X \times Y$ і W – абсолютно опуклий окіл нуля в Z. Оскільки функція $f(\cdot, y_0)$ неперервна на X, то існує окіл U точки x_0, такий, що $f(x_0, y_0) - f(x, y_0) \in W$ для всіх $x \in U$. Тоді, згідно з умовою (i) існує номер n_0, такий, що $f(x_0, y_0) - f(x_{i,n}, y_0) \in W$ для всіх $n \geq n_0$ та $i \in I_n$, таких, що $x_0 \in \mathrm{supp} h_{i,n}$. Отже,

$$f(x_0, y_0) - f_n(x_0, y_0) =$$

$$= \sum_{i \in I_n} h_{i,n}(x_0)(f(x_0, y_0) - f(x_{i,n}, y_0)) \in W,$$

бо сума насправді скінченна.

У випадку, коли Z – довільний топологічний векторний простір, то для заокругленого околу нуля W в Z слід вибрати такий заокруглений окіл нуля $\tilde{W}$, що $\underbrace{\tilde{W} + \cdots + \tilde{W}}_{M\text{-раз}} \subseteq W$, де M з умови (ii).

Теорема 2. *Нехай $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ – топологічний простір, де (X_n) – зростаюча послідовність підпросторів простору X і d – метрика на X, яка на підпросторах X_n породжує вихідну топологію. Тоді:*

(а) якщо топологія на X, що породжується метрикою d, слабша за вихідну, то X – простір Лебеґа;

(б) якщо X – паракомпакт, то X – простір Лебеґа.

Доведення. (а) Нехай $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відкритих покриттів простору X d-відкритими кулями радіуса $1/2n$. Згідно з теоремою Стоуна [4, с.414], простір (X, d) є паракомпактним, тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує підпорядковане покриттю $\mathcal{B}_n$ розбиття одиниці $(h_{i,n} : i \in I_n)$ на X. Оскільки метризовна топологія на X слабша за вихідну, то $(h_{i,n})$ буде локально скінченним розбиттям одиниці на просторі X з вихідною топологією.

Точки $x_{i,n}$ виберемо так: $x_{i,n} \in \mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_k$, де k – той найменший номер, що $\mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_k \neq \emptyset$. Покажемо, що в цьому випадку виконується умова (i) теореми 1.

Нехай $x_0 \in X$ і U – окіл точки x_0 у вихідній топології. Існує номер $m \in \mathbb{N}$, такий, що $x_0 \in X_m$, та існує $\delta > 0$, таке, що куля B з центром у точці x_0 радіуса δ в просторі X_m міститься в $U_m = X_m \bigcap U$. Покладемо $n_0 = \max\{m, [1/\delta] + 1\}$. Нехай $n \geq n_0$, $i \in I_n$ і $x_0 \in \mathrm{supp} h_{i,n}$. Тоді $\mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_m \neq \emptyset$ і той номер k, що фігурує при виборі точок $x_{i,n}$, не перевищує m, отже, $x_{i,n} \in X_m$. Оскільки діаметр $\mathrm{supp} h_{i,n}$ не перевищує $\frac{1}{n}$, то $d(x_{i,n}, x_0) < \delta$. Отже, $x_{i,n} \in B \subseteq U_m \subseteq U$. Таким чином, умова (i) теореми 1 виконується і X – простір Лебеґа.

(б) Нехай $n \in \mathbb{N}$ і для всіх $m \geq n$ через $\mathcal{B}_n^m$ позначимо покриття простору X_m кулями радіуса $1/2n$. Для кожного $B \in \mathcal{B}_n^m$ існує відкрита в X множина V, така, що $V \bigcap X_m = B$. Сукупність усіх таких множин позначимо через $\mathcal{V}_n^m$. Далі покладемо $\mathcal{U}_n = \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} \mathcal{V}_n^m$. Зрозуміло, що $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – відкрите покриття простору X. Оскільки X – паракомпакт, то для кожного n існує підпорядковане покриттю $\mathcal{U}_n$ локально скінченне розбиття одиниці $(h_{i,n} : i \in I_n)$ на X. Вибір точок $x_{i,n}$ здійснимо так, як і раніше: $x_{i,n} \in \mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_k$, де k – найменший номер такий, що $\mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_k \neq \emptyset$. Залишається перевірити виконання умови (i).

Нехай $x_0 \in X$ і U – окіл точки x_0. Існує номер $l \in \mathbb{N}$, такий, що $x_0 \in X_l$ і число $\delta > 0$, таке, що куля B з центром в точці x_0 радіуса δ в просторі X_l міститься в $U_l = X_l \bigcap U$. Покладемо $n_0 = \max\{l, \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1\}$. Нехай тепер $n \geq n_0$, $i \in I_n$ і $x_0 \in \mathrm{supp} h_{i,n}$. Тоді $\mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_l \neq \emptyset$ і $k \leq l$, отже, $x_{i,n} \in X_l$. Оскільки діаметр $\mathrm{supp} h_{i,n} \bigcap X_l$ не перевищує $1/n$, то $d(x_{i,n}, x_0) < \delta$. Отже, $x_{i,n} \in B \subseteq U_l \subseteq U$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо топологічний векторний простір X є об'єднанням зростаючої послідовності своїх метризовних підпросторів X_n, то X – простір Лебеґа.*

Доведення. Досить довести, що на X існує слабша за вихідну метризовна топологія, яка на підпросторах X_n породжує вихідну топологію. Тоді, згідно з частиною (a) теореми 2, X буде простором Лебеґа.

Для $\delta > 0$ через B_δ^n позначимо відкриту кулю з центром у нулі радіуса δ в просторі X_n. Нехай U_1 — такий відкритий заокруглений окіл нуля в X, що $U_1 \bigcap X_1 \subseteq B_1^1$. Далі, нехай U_2 – заокруглений відкритий окіл нуля в X, такий, що $U_2 \bigcap X_1 \subseteq B_{1/2}^1$, $U_2 \bigcap X_2 \subseteq B_{1/2}^2$ і $U_2 + U_2 \subseteq U_1$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо послідовність $(U_n)_{n=1}^\infty$ заокруглених відкритих околів нуля, таких, що $U_n \bigcap X_k \subseteq B_{\frac{1}{n}}^k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і $U_n + U_n \subseteq U_{n-1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Неважко переконатися, що система множин $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ є достатньою в просторі X. Тому на X існує лінійна топологія τ, для якої $\mathcal{U}$ є базою околів нуля. За побудовою вихідна топологія на X сильніша за τ-топологію, адже кожний τ-окіл нуля в X є околом нуля у вихідній топології. Крім того, топологія τ на X_n породжує топологію, що збігається з вихідною, оскільки $\{U_k \bigcap X_n : k \in \mathbb{N}\}$ – база околів нуля в X_n з вихідною топологією. Оскільки $\mathcal{U}$ – зліченна база, то τ – метризовна топологія [5, с.42].

Наслідок 2. *Якщо X – σ-метризовний паракомпакт, то X – простір Лебеґа.*

Доведення. Оскільки X – σ-метризовний простір, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, де (X_n) – зростаюча послідовність замкнених метризовних підпросторів простору X. Згідно з частиною (б) теореми 2, досить на X визначити метрику, яка на підпросторах X_n породжувала б вихідну топологію.

Нехай d_1 – метрика, яка на просторі X_1 породжує його топологію. Оскільки X_1 замкнений підпростір метризовного простору X_2, то, згідно з теоремою Гаусдорфа, метрику d_1 можна неперервно продовжити до метрики d_2 на весь простір X_2. Далі, оскільки X_2 є замкненим підпростором метризовного простору X_3, то метрику d_2 можна неперервно продовжити до метрики d_3 на весь простір X_3. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримаємо узгоджену послідовність метрик (d_n). Тоді метрику на просторі X визначимо так: $d(x, y) = d_k(x, y)$, де k – той номер, що $x \in X_k$ і $y \in X_k$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and applications, Part B. Edited by L.Nachbin. Adv. in Math. supplem. studies 7B. Academic Press.— 1981.— P.741—747.

2. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії.— 1993.— Вип.3.— С.95—102.

3. *Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Берівська класифікація векторнозначних відображень для простору фінітних послідовностей // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика.— Чернівці: Рута, 2000.— С.80—81.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 751 с.

5. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.— 360 с.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.2000