

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

## ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ КОЛИВНІСТЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ВІДПОВІДНИХ ЇМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Встановлено умови коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, якщо розв'язки їх різницевих аналогів є коливними.

We establish conditions for oscillations of the solutions of linear second order differential equations provided that the solutions of the corresponding difference equations oscillate.

### Вступ

Дана робота присвячена вивченню зв'язку між якісними властивостями розв'язків диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь, коли крок  $h$  різницевого рівняння прямує до нуля. А саме, встановлені умови збереження коливних властивостей розв'язків.

Добре відомо, (наприклад, [3, стр.114]), що на скінченних часових інтервалах поведінка розв'язків диференціальних рівнянь мало відрізняється від поведінки відповідних їм розв'язків різницевих рівнянь. Оцінка різниці між ними в вузлових точках пропорційна  $h$  – кроку різницевого рівняння. Однак, дана оцінка не гарантує збереження коливності у одного з рівнянь при умові, що таку властивість має інше.

Питанням зв'язку між коливністю розв'язків лінійних різницевих і відповідних їм диференціальних рівнянь другого порядку присвячені роботи [1,10]. Так, в [10] встановлено коливність розв'язків лінійних різницевих рівнянь з достатньо малим кроком  $h$  при умові, що таку властивість мають розв'язки відповідного диференціального рівняння. В [1] отримано обернений результат, коли з коливності розв'язків різницевих рівнянь при достатньо малому кроці  $h$  випливає коливність розв'язків відповідного диференціального рівняння.

Але в цих роботах вивчається коливність фіксованого розв'язку задачі Коші. При цьому крок  $h$  вибирається свій для ко-

жних початкових даних, що не є зручним з точки зору застосувань.

Виникає питання про існування універсального кроку  $h$ , який гарантує збереження коливності для всіх розв'язків (для всіх початкових даних).

В роботі [11] встановлено існування універсального кроку  $h$ , що гарантує збереження коливності розв'язків різницевих рівнянь при умові, що таку властивість мають розв'язки диференціального рівняння. При цьому крок  $h$  можна вибрати єдиним чином для всіх початкових даних.

В даній роботі розв'язана обернена задача. А саме встановлено існування такого кроку  $h$  різницевого рівняння (єдиного для всіх розв'язків), що гарантує коливність розв'язку диференціального рівняння, якщо таку властивість має відповідний розв'язок різницевого рівняння.

Відзначимо, що коливні властивості розв'язків різницевих рівнянь вивчалися в роботах багатьох авторів (див, наприклад [4,7,8]).

Для більш загальних рівнянь на часових шкалах поняття узагальненого нуля розв'язку та коливність досліджувались в роботах [2,6].

Робота складається зі вступу та двох частин. В першій частині дана постановка та приведено кілька необхідних в подальшому допоміжних тверджень, які на думку автора мають і самостійний інтерес. Основний результат роботи отримано в другій части-

ні.

### 1. Постановка задачі та допоміжні твердження

Розглянемо на відрізку  $[0, a]$  лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{z} + f(t)\dot{z} + q(t)z = 0, \quad (1)$$

де  $f, q \in C([0, a])$  і будемо вивчати коливність його розв'язків на  $[0, a]$ .

Добре відомо, (див. наприклад [9]), що у випадку гладкості на  $[0, a]$  коефіцієнта  $f(t)$ , рівняння (1) лінійною заміною  $z = \varphi(t)x$  приводяться до вигляду

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad (2)$$

при цьому нулі розв'язків  $z(t)$  рівняння (1) і відповідних їм розв'язків  $x(t)$  рівняння (2) співпадають. Тому в подальшому обмежимося вивченням коливності розв'язків рівняння (2). Оскільки при  $p(t) \leq 0$  всі нетривіальні розв'язки рівняння (2) неколиві на  $[0, a]$  ([9, стр.207]), то в подальшому від функції  $p(t)$  будемо вимагати виконання наступних умов:

$$p(t) \geq 0, \quad t \in [0, a]; \quad (3)$$

$$p(t) \text{ ліпшицева на } [0, a]. \quad (4)$$

Поряд з рівнянням (2) розглянемо відповідне йому різницеve рівняння

$$\Delta_k^2 x + h^2 p(kh)x(kh) = 0. \quad (5)$$

Тут  $h \geq 0$  – крок різницевого рівняння  $[0, a]$ ,  $\Delta_k x = x((k+1)h) - x(kh)$ ,  $\Delta_k^2 x = \Delta_k(\Delta_k x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

В подальшому будемо використовувати позначення  $x_k^h = x(kh)$  and  $t_k = kh$ .

**Означення 1.** [10] Скажемо, що розв'язок  $x_k^h$  рівняння (5) має в точці  $t_k$  зміну знаку, якщо виконується одні з умов:

1)  $x_k^h x_{k+1}^h < 0$ ;

2)  $x_k^h = 0$ ,  $x_{k-1}^h x_{k+1}^h < 0$ .

**Означення 2.** [10] Якщо на деякому інтервалі розв'язок  $x_k^h$  рівняння (5) має не менше двох змін знаків, то його будемо називати коливним на цьому інтервалі.

Будемо вивчати умови, при яких із коливності розв'язків різницевого рівняння (5)

на  $[0, a]$  випливає коливність розв'язків рівняння (2).

Приведемо тепер кілька необхідних в подальшому тверджень.

Розглянемо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (6)$$

$t \geq 0$ ,  $x \in D$ , де область  $D \subset \mathbb{R}^d$  (можливо замкнута), та відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \quad (7)$$

де  $h > 0$  – крок,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$x_k^h = x^h(t_0 + kh)$ ,  $t_0$  – фіксоване число.

При цьому через  $|\cdot|$  будемо позначати евклідову норму вектора в  $\mathbb{R}^d$ , а через  $\|\cdot\|$  – норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

**Означення 3.** Розв'язки  $x(t)$  і  $x_k^h$  систем (6) і (7) назвемо відповідними, якщо  $x(t_0) = x_0^h = x_0 \in D$ .

Очевидно, що розв'язки системи (7) однозначно продовжуються вправо за допомогою початкових даних  $x_0^h = x_0$  при  $k > 0$  до тих пір, поки  $x_{k-1}^h \in D$ .

Для відповідних розв'язків рівнянь (6) і (7) справедлива оцінка їх близькості у вузлових точках  $t_0 + kh$ .

**Лема 1.** Нехай функція  $X(t, x)$  визначена та неперервна за сукупністю змінних у своїй області визначення  $t \in [0, a]$ ,  $x \in D$  та задовольняє умови:

1) існує  $M > 0$ , що  $|X(t, x)| \leq M$ ,  $t \in [0, a]$ ,  $x \in D$ ;

2) існує  $L > 0$ , що для довільних  $t_1, t_2 \in [0, a]$ ,  $x_1, x_2 \in D$ :

$$|X(t_1, x_1) - X(t_2, x_2)| \leq L(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|).$$

Тоді, якщо відповідні розв'язки систем (6) і (7) визначені на відрізку  $[t_0, t_0 + T]$ , то справедлива оцінка

$$|x(t_0 + kh) - x_k^h| \leq C \cdot h, \quad (8)$$

тут стала  $C$  залежить лише від  $M$ ,  $L$  і  $T$ .

**Доведення.** Доведення даної леми отримується легкою модифікацією схеми доведення леми 5.1.2 ([3], стр.114), з урахуванням пропозиції 5.2.2.

Наступна лема стосується лінійних систем типу (6) і (7), а саме систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (9)$$

і

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hA(t_0 + kh)x_k^h. \quad (10)$$

Якщо матриця  $A(t)$  неперервна при  $t \geq 0$ , то всі розв'язки систем (9) і (10) необмежено продовжуються вправо. Будемо розглядати їх розв'язки з початковими даними

$$t_0 \in [0, \bar{h}], \quad |x_0| = 1, \quad (11)$$

тут  $\bar{h}$  – фіксоване і таке, що  $0 < \bar{h} < a$ .

Позначимо  $M(T) = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} \|A(t)\|$ , де  $T > 0$  – фіксоване.

**Лема 2.** Для всіх розв'язків задач Коші систем (9) і (10) з початковими даними (11) існують додатні сталі  $R_1$  і  $R_2$ , залежні лише від  $T$  і  $M(T)$ , що при  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,  $t_0 + kh \in [t_0, t_0 + T]$  справедливі нерівності

$$|x(t)| \leq R_1, \quad |x_k^h| \leq R_2, \quad (12)$$

причому число  $R_2$  не залежить від  $h$  в другій нерівності.

**Доведення.** Перша з нерівностей (12) є простим наслідком властивостей лінійних систем диференціальних рівнянь. Друга є таким же наслідком аналогічних властивостей систем різницевих рівнянь (див, наприклад [5, стр.35]).

Розглянемо тепер рівняння (5) при  $kh \in [0, a]$ , яке перепишемо у вигляді системи

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + hy_k^h, \\ y_{k+1}^h = y_k^h - hp(kh)x_k^h. \end{cases} \quad (13)$$

Будемо вивчати її розв'язки з початковими умовами

$$x_0^h = x_0, \quad y_0^h = y_0, \quad \text{where } x_0^2 + y_0^2 = 1. \quad (14)$$

Тепер коливність розв'язку  $x_k^h$  рівняння (5) на  $[0, a]$  рівносильна коливності першої

компоненти системи (13) на цьому ж відрізку.

Нехай  $(x_k^h, y_k^h)$  коливний розв'язок системи (13) на  $[0, a]$  з початковими даними (14). Оскільки він коливний, то в силу означення 2, він має на  $[0, a]$  принаймі дві зміни знаку його першої компоненти.

Нехай точки  $t_p$  і  $t_m$  – дві послідовні точки змін знаку  $x_k^h$  ( $t_p < t_m$ ). Введемо в розгляд наступну величину

$$M_p^x(h) = \max_{k \in [p+1, m]} |x_k^h|.$$

Дану числову послідовність (скінченну) назвемо послідовністю амплітуд коливань розв'язку  $x_k^h$  на  $[0, a]$ . Відносно цієї послідовності справедлива лема.

**Лема 3.** Нехай функція  $p(t)$  неперервна на  $[0, a]$  і задовольняє умову (3).

Тоді існує  $\Delta(h) > 0$  таке, що для довільного коливного розв'язку системи (13) з початковими даними (14) має місце нерівність

$$M_p^x(h) \geq \Delta(h). \quad (15)$$

**Доведення.** Нехай (15) не виконується. Тоді існує нескінченна послідовність коливних на  $[0, a]$  розв'язків  $(x_k^h(n), y_k^h(n))$  системи (13) з початковими даними  $(x_{0n}, y_{0n})$ , що задовольняють умову (14) і таких, що для кожного  $n$  з послідовності амплітуд цих розв'язків можна вибрати таку амплітуду  $M_{p(n)}^{x_n}(h)$ , що утворена з цих чисел послідовність  $\{M_{p(n)}^{x_n}(h)\}$  задовольняє умову

$$M_{p(n)}^{x_n}(h) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тут  $M_{p(n)}^{x_n}(h) = \max_{k \in [p(n)+1, m]} |x_k^h(n)|$ .

Нехай  $t_n$  – точка із відрізка  $[(p(n) + 1)h, mh]$ , в якій даний максимум досягається. Оскільки множина початкових даних (14) компакт, то з послідовності початкових даних  $(x_{0n}, y_{0n})$  можна виділити збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що сама послідовність  $(x_{0n}, y_{0n})$  збіжна.

Отже

$$(x_{0n}, y_{0n}) \rightarrow (x_0, y_0), \quad n \rightarrow \infty \quad (17)$$

і  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ .

Можна також вважати, що всі  $M_{p(n)}^{x_n}(h) > 0$ , інакше ми б розглянули розв'язки з протилежними знаками.

Очевидно, існує точка  $k_0 h \in (0, a)$ , в якій для нескінченної кількості розв'язків з послідовності  $(x_k^h(n), y_k^h(n))$  виконується умова

$$x_{k_0}^h(n) = M_{p(n)}^{x_n}(h). \quad (18)$$

Надалі будемо розглядати саме цю підпослідовність розв'язків. Позначимо її  $(\bar{x}_k^h(m), \bar{y}_k^h(m))$ , при цьому їх початкові дані будуть  $(x_{0m}, y_{0m})$ .

Розглянемо тепер розв'язок системи (13)  $(\bar{x}_k^h, \bar{y}_k^h)$  з початковими даними  $(x_0, y_0)$  з умови (17). Очевидно, що він нетривіальний.

З неперервної залежності розв'язків системи (13) від початкових даних та єдиності розв'язку

$$\bar{x}_{k_0}^h = 0, \quad \bar{x}_{k_0-1}^h < 0, \quad \bar{x}_{k_0+1}^h < 0. \quad (19)$$

Відзначимо, що в силу означення 1, точка  $k_0 h \in$  внутрішньою точкою відрізка  $[0, a]$ .

Із системи (13) випливають рівності

$$\begin{cases} \bar{x}_{k_0}^h - \bar{x}_{k_0-1}^h = h y_{k_0-1}^h, \\ \bar{y}_{k_0}^h - \bar{y}_{k_0-1}^h = -h p(k_0 h) \bar{x}_{k_0-1}^h. \end{cases} \quad (20)$$

Із (19) і (20) маємо, що  $y_{k_0-1}^h > 0$ . Аналогічно маємо  $\bar{x}_{k_0+1}^h - \bar{x}_{k_0}^h = h y_{k_0}^h$ . Звідки отримуємо  $y_{k_0}^h < 0$ . Це приводить до протиріччя з другою рівністю (20), оскільки ліва її частина від'ємна, а права невід'ємна.

Лема 3 стверджує, що число  $\Delta(h)$  може залежати від  $h$ . Наступна лема стверджує, що таке число можна вибрати незалежним від  $h$ .

**Лема 4.** *Нехай функція  $p(t)$  задовольняє умови (3) і (4). Тоді існують числа  $h_0 > 0$  і  $B_0 > 0$  такі, що при всіх  $0 < h \leq h_0$  має місце нерівність*

$$\Delta_0(h) \geq B_0. \quad (21)$$

**Доведення.** Нехай твердження лемми не виконане. Тоді існує послідовність кроків  $\{h_n\}$ ,  $h_n > 0$ ,  $h_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  і при цьому

$$\Delta_0(h_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Тоді з (22) випливає існування для кожного  $h_n$  коливного на  $[0, a]$  розв'язку  $(x_k^{h_n}, y_k^{h_n})$  системи (13) (з даним  $h_n$ ) із початковими даними  $(x_{0n}, y_{0n})$ , що задовольняють умову (14) і який має наступну властивість. Для кожного  $n$  з послідовності амплітуд розв'язку  $(x_k^{h_n}, y_k^{h_n})$  можна вибрати таку амплітуду  $M_{p(n)}^{x_n}(h_n)$ , що утворена з чисел послідовність  $\{M_{p(n)}^{x_n}(h_n)\}$  задовольняє умову

$$M_{p(n)}^{x_n}(h_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Знову послідовність  $(x_{0n}, y_{0n})$  можна вважати збіжною. Отже

$$(x_{0n}, y_{0n}) \rightarrow (x_0, y_0), \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Позначимо через  $t_n \in [0, a]$ ,  $t_n = k_n h_n$  – аргумент, при якому амплітуда з властивістю (23) досягається. Маємо

$$x_{k_n}^{h_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

З послідовності  $\{t_n\}$  також можна виділити збіжну підпослідовність. Знову будемо вважати, що сама  $\{t_n\}$  збіжна. Отже,  $t_n \rightarrow t_0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \in [0, a]$ .

Використовуючи лему 2, з послідовності  $\{y_{k_n}^{h_n}\}$  також можна виділити збіжну підпослідовність. Знову будемо вважати, що сама  $\{y_{k_n}^{h_n}\}$  збіжна. Отже

$$y_{k_n}^{h_n} \rightarrow y_0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

З побудови послідовності  $t_n$  маємо, що  $t_{n-1} = t_n - h_n$ ,  $t_{n+1} = t_n + h_n$ . В силу означення 1 точки  $t_{n-1}$  і  $t_n \in [0, a]$ . Звідси випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0. \quad (27)$$

З побудови послідовності  $t_n$  випливають нерівності

$$x_{k_n-1}^{h_n} \leq x_{k_n}^{h_n}, \quad x_{k_n}^{h_n} \geq x_{k_n+1}^{h_n}. \quad (28)$$

Оскільки  $(x_k^{h_n}, y_k^{h_n})$  для кожного  $h_n \in$  розв'язками системи (13), то маємо рівності

$$\begin{cases} x_{k_n+1}^{h_n} - x_{k_n}^{h_n} = h_n y_{k_n}^{h_n}, \\ y_{k_n+1}^{h_n} - y_{k_n}^{h_n} = -h_n p(k_n h_n) x_{k_n}^{h_n} \end{cases} \quad (29)$$

та

$$\begin{cases} x_{k_n}^{h_n} - x_{k_n-1}^{h_n} = h_n y_{k_n-1}^{h_n}, \\ y_{k_n}^{h_n} - y_{k_n-1}^{h_n} = -h_n p((k_n - 1)h_n) x_{k_n-1}^{h_n}. \end{cases} \quad (30)$$

Внаслідок леми 2, їх праві частини прямують до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

Отже, згідно з (25) маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n+1}^{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n-1}^{h_n} = 0. \quad (31)$$

А згідно з (26)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n+1}^{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n-1}^{h_n} = y^0. \quad (32)$$

При цьому, внаслідок нерівностей (28), із першої рівності (30) маємо, що

$$y_{k_n-1}^{h_n} \geq 0, \quad (33)$$

а з першої рівності (29) маємо, що

$$y_{k_n}^{h_n} \leq 0. \quad (34)$$

Тоді з (26), (32), (33), (34) отримуємо, що

$$y^0 = 0. \quad (35)$$

Розглянемо тепер розв'язок диференціального рівняння (2) з початковими даними (24). Очевидно, що він нетривіальний. Позначимо його  $x(t, x_0, y_0)$ . Через  $x(t, x_{0n}, y_{0n})$  позначимо розв'язок рівняння (2) з початковими даними  $(x_{0n}, y_{0n})$ .

Очевидно, що

$$x(t_n, x_0, y_0) \rightarrow x(t_0, x_0, y_0), \quad n \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Із неперервної залежності розв'язків задачі Коші від початкових даних випливає також, що

$$|x(t_n, x_{0n}, y_{0n}) - x(t_n, x_0, y_0)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

З леми 2 випливає, що всі розв'язки задач Коші для рівняння (2) та різницевої системи (13) з початковими даними (14) рівномірно обмежені на відрізку  $[0, a]$ . Тоді з леми 1 випливає для відповідних розв'язків цих рівнянь справедлива рівномірна оцінка (8) у вузлових точках. Рівномірність тут означає, що сталі  $C$ ,  $R_1$  і  $R_2$  в лемах 1 і 2 можна

вибрати залежними лише від  $a$  і максимуму функції  $|p(t)|$  на  $[0, a]$ .

Отже

$$|x(t_n, x_{0n}, y_{0n}) - x_{k_n}^{h_n}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Тому з (25), (36) - (38) випливає, що

$$x(t_0, x_0, y_0) = 0. \quad (39)$$

Аналогічно переконуємося в тому, що

$$\dot{x}(t_0, x_0, y_0) = 0. \quad (40)$$

Співвідношення (39), (40) протирічать нетривіальності розв'язку  $x(t, x_0, y_0)$ .

## 2. Основний результат

Перейдемо тепер до основного результату роботи.

**Теорема 1.** *Нехай функція  $p(t)$  задовольняє умови (3) і (4). Тоді існує  $h_0$  таке, що при всіх  $0 < h \leq h_0$  справедливе твердження:*

*якщо розв'язок рівняння (5)  $x_k^h$  має на відрізку  $[0, a]$  принаймні три зміни знаку, то відповідний йому розв'язок диференціального рівняння (2) коливний на  $[0, a]$ .*

**Доведення.** Перепишемо рівняння (2) у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -p(t)x. \end{cases} \quad (41)$$

При доведенні леми 4 відзначалось, що для розв'язків задач Коші систем (13) і (41) з початковими даними  $(x_0, y_0)$ , в нулі, що  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ , справедлива рівномірна оцінка типу (8) у вузлових точках. При цьому сталу  $C$  можна вибрати залежною лише від  $a$  і максимуму функції  $|p(t)|$  на  $[0, a]$ .

Виберемо тепер  $h_1$  так, щоб

$$Ch_1 \leq \frac{B_0}{2}, \quad (42)$$

де  $B_0$  – стала, що фігурує в лемі 4.

Тоді для всіх

$$0 < h \leq \min\{h_0, h_1\} \quad (43)$$

справедлива оцінка (42) і твердження леми 4. Тут  $h_0$  – стала з леми 4.

Виберемо довільне  $h$ , що задовольняє (43) і зафіксуємо його.

Нехай  $(x_k^h, y_k^h)$  – довільний нетривіальний розв’язок системи (13) при даному  $h$  такий, що його перша компонента  $x_k^h$  має принаймі три зміни знаку на  $[0, a]$ . Нехай  $(x_0, y_0)$  його початкові дані, тобто  $x_0^h = x_0, y_0^h = y_0$ .

Покажемо, що розв’язок рівняння (2) з початковими даними  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$  коливний на  $[0, a]$ .

Введемо величину  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Очевидно, що  $r_0 \neq 0$ . Внаслідок лінійності систем (13) і (41), функції  $\frac{1}{r_0}(x(t), \dot{x}(t)) = (z(t), \xi(t))$  і  $\frac{1}{r_0}(x_k^h, y_k^h) = (z_k^h, \xi_k^h)$  також є їх розв’язками. При цьому компонента  $z(t)$  має ті ж самі нулі, що і  $x(t)$ , а  $z_k^h$  має ті ж самі зміни знаку, що і  $x_k^h$ . Початкові ж дані розв’язків  $(z(t), \xi(t))$  і  $(z_k^h, \xi_k^h)$  задовольняють умову (14).

Оточимо розв’язок  $(z_k^h, \xi_k^h)$   $\rho$ -околом при  $kh \in [0, a]$ , де  $\rho \leq \frac{B_0}{2}$ . Оскільки  $z_k^h$  має принаймі три зміни знаку, то  $z_k^h$  має принаймі дві амплітуди коливань. Нехай  $k_0h$  і  $p_0h$  – точки, в яких ці амплітуди досягаються. При цьому  $z_{k_0}^h$  і  $z_{p_0}^h$  мають різні знаки.

Тоді з нерівностей (8), (42) та леми 4 випливає, що функція  $z(t)$  в точках  $t = 0, t = k_0h, t = p_0h$  зберігає знак функції  $z_k^h$ , а, отже, має як мінімум два нулі на  $[0, a]$ . Значить і  $x(t)$  має принаймі два нулі на  $[0, a]$ , а отже є коливним.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Атейві А.М. Коливні властивості розв’язків диференціальних рівнянь і їх стійкість. // Дис.канд.фіз.-мат. наук: 01.01.02. –К. –1997, –С.76.
2. Карпенко О.В., Кравець В.І., Станжичук О.М. Коливність розв’язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь другого порядку // Укр.мат.журн. –2013. –**65**,N2. –С.226-235.
3. Мартинюк Д.І. Лекции по качественной теории разностных уравнений. // К.:Наукова думка, –1972, –247с.
4. Скалкина М.А. О колебаниях решений уравнений в конечных разностях. // Изв. высших учебн.завед. Матем. –1959. –С.138-144.
5. Bohner M., Peterson. A. Dynamical equations on time scales. An introduction with applications. // Birkhäuser. Boston. Basel. Berlin. –2001.
6. Grüne. L. Asymptotic behavior of dynamical and control systems perturbation and discretization. // Springer-Verlag, Berlin. – 2002. –231 p.

7. Ladas. G. Explicit conditions for the oscillation of difference equations. // J.Math.Anal.Appl. –1990. **153**, –p. 276-287.

8. Messer. K. A second-order self adjoint dynamic equation on time scale. // Dynam.Systems Appl. –2002. –8,N5. –p.451-460.

9. Öcalan. Ö. Linearized oscillation of nonlinear difference equations with advanced arguments. // Archivum math. Brno. –2009. –**45**. –p.203-212.

10. Öcalan. Ö. Oscillation of nonlinear difference equations with several coefficients. // Commun. Math Anal. –2008. –**4**,N1. –p.35-44.

11. Samoilenko A. M., Perestyuk M. O., Parasjuk I. O. Differential equations. // Textbook. – 2012. Almaty. –464p.