УДК 517.928

©2001 р. **Я.Р. Петришин**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ НА ПІВОСІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Встановлено оцінки похибки методу усереднення на півосі для багаточастотних коливних систем з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. Доведено аналог теореми Банфі-Філатова.

The estimations of averaging method are established on half-axle for multifrequency oscillating systems with impulse influence in fixed points of time. The analogue of Bunfy-Filatov theorem is proved.

Метод усереднення, строге математичне обгрунтування якого для систем стандартного вигляду вперше дано М.М.Боголюбовим [1], одержав розповсюдження на диференціальні рівняння в різних функціональних просторах, у тому числі на рівняння з імпульсним впливом [2—4]. Застосування цього методу до дослідження нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами викликає значні труднощі через появу резонансних співвідношень між компонентами вектора частот [5], а наявність імпульсного впливу ще більше ускладнює їх вивчення [6,7]. У цій статті встановлено достатні умови ефективного використання методу усереднення на півосі для таких систем у випадку майже періодичних правих частин рівнянь та функцій, що визначають величину стрибка.

Нехай задана нелінійна коливна система з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau),\ \ \tau \neq \tau_j^{(k)},$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = \varepsilon f_k(x,\varphi),$$

$$\Delta \varphi|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = \varepsilon g_k(x,\varphi), \qquad (1)$$

в якій $(x,\varphi,\tau) \in D\times\mathbb{R}^m\times\bar{\mathbb{R}}_+ \equiv G$, $(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\tau = \varepsilon t$ — "повільний час", $0 < \tau_1^{(1)} < \tau_1^{(2)} < ... < \tau_1^{(p)} \leq 2\pi\varepsilon$, $\tau_{j+1}^{(k)} = \tau_j^{(k)} + 2\pi\varepsilon$ для всіх $j \geq 1$ і $k = \overline{1,p}$, $\mathbb{R}^n \supset D$ — обмежена область, $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty)$. Такого вигляду системи виникають при переході до амплітудно-фазових змінних при дослідженні системи слабко зв'язаних осциляторів з повільно змінними частотами $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau),...,\omega_m(\tau))$ та імпульсним впливом у фіксовані моменти часу $t_j^{(k)} = \tau_j^{(k)}\varepsilon^{-1}$ [7].

Припустимо, що:

1) для деякого $l \geq m$ функції $\dfrac{d^r\omega_s(\tau)}{d\tau^r}$, $r = \overline{0,l}$, $s = \overline{1,m}$, — рівномірно неперервні на $\bar{\mathbb{R}}_+$ і

$$\|(\Gamma_l^*(\tau)\Gamma_l(\tau))^{-1}\Gamma_l^*(\tau)\| \leq \sigma_1 = \text{const}, \tau \in \bar{\mathbb{R}}_+,$$

де $\Gamma_l(\tau)$ і $\Gamma_l^*(\tau)$ позначають відповідно матрицю

$$\left(\frac{d^r}{d\tau^r}\omega_s(\tau)\right)_{r,s=1}^{l,m}$$

і транспоновану до неї, а під нормою матриці розуміємо суму модулів її елементів;

2) функції a, b, f_k, g_k мають неперервні обмежені сталою σ_1 частинні похідні першого порядку в G, майже періодичні по φ_s, $s = \overline{1,m}$, причому

$$(a(x,\varphi,\tau); b(x,\varphi,\tau)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu(x,\tau); b_\nu(x,\tau))e^{i(\lambda_\nu,\varphi)},$$

$$(f_k(x,\varphi); g_k(x,\varphi)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (f_{k,\nu}(x); g_{k,\nu}(x)) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)},$$

де $k = \overline{1,p}$, $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_\nu \neq 0$ при $\nu \geq 1$, i — уявна одиниця, (λ_ν, φ) — скалярний добуток векторів $\lambda_\nu = (\lambda_\nu^{(1)}, ..., \lambda_\nu^{(m)})$ і $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$;

3) функції $c_\nu = (a_\nu; b_\nu)$ та $d_{k,\nu} = (f_{k,\nu}; g_{k,\nu})$ справджують нерівності

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|}\right) \sup \|c_\nu\| + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sup \left\| \frac{\partial c_\nu}{\partial x} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial c_\nu}{\partial \tau} \right\| \right) \right] \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(\|\lambda_\nu\|^2 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \right) \sup \|d_{k,\nu}\| + \right.$$

$$\left. + \left(\|\lambda_\nu\| + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \right) \sup \left\| \frac{\partial d_{k,\nu}}{\partial x} \right\| \right] \leq \sigma_1,$$

в яких супремум береться по всіх $x \in D$ і $\tau \in \bar{\mathbb{R}}_+$.

Запишемо відповідну системі (1) усереднену за всіма швидкими змінними $\varphi_s, s = \overline{1,m}$, систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a_0(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} f_{k,0}(\bar{x}), \qquad (2)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b_0(\bar{x}, \bar{\tau}) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} g_{k,0}(\bar{x}) \qquad (3)$$

і позначимо через $(x(\tau, \bar{\tau}, x^0, \varphi^0, \varepsilon);\ \varphi(\tau, \bar{\tau}, x^0, \varphi^0, \varepsilon))$ і $(\bar{x}(\tau, \bar{\tau}, x^0); \bar{\varphi}(\tau, \bar{\tau}, x^0, \varphi^0, \varepsilon))$ ті розв'язки систем відповідно (1) і (2), (3), які при $\tau = \bar{\tau} \in \bar{\mathbb{R}}_+$ набувають значення $(x^0; \varphi^0)$.

Нехай $z : \bar{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}^N$ — неперервно диференційовна функція. Припущення 1) гарантує виконання рівномірної оцінки [5]

$$\|J_\lambda(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \leq \sigma_0 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda\|}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \max_{[\bar{\tau}, \bar{\tau}+L]} \|z(\tau)\| + \frac{1}{\|\lambda\|} \max_{[\bar{\tau}, \bar{\tau}+L]} \left\| \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right\| \right]$$

осциляційного інтеграла

$$J_\lambda(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) =$$

$$= \int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}+\tau} z(t) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{t}}^{t} (\lambda, \omega(z)) dz \right\} dt$$

для всіх $\lambda \neq 0$, $\bar{\tau} \in \bar{\mathbb{R}}_+$, $\bar{t} \in \bar{\mathbb{R}}_+$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ зі сталими σ_0 і ε_0, не залежними від $\lambda, \bar{\tau}, \bar{t}$, але залежними від L. Із [5—7] випливає, що на підставі умови 1) осциляційна сума

$$S_\lambda(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{\bar{\tau} \leq \tau_j^{(k)} \leq \bar{\tau}+\tau} z(\tau_j^{(k)}) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{t}}^{\tau_j^{(k)}} (\lambda, \omega(z)) dz \right\}$$

задовольняє оцінку

$$\|S_\lambda(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \leq \tilde{\sigma}_0 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} \left(\|\lambda\| + \frac{1}{\|\lambda\|} \right) \times$$

$$\times \left(\max_{[\bar{\tau}, \bar{\tau}+L]} \|z(\tau)\| + \max_{[\bar{\tau}, \bar{\tau}+L]} \left\| \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right\| \right),$$

в якій $\tilde{\sigma}_0$ і ε_0 також залежать тільки від L, але не залежать від $\lambda, \bar{\tau}, \bar{t}$.

Ці міркування дозволяють перефразувати відповідну частину теореми 1 із роботи [6] у наступному вигляді.

Теорема 1. *Нехай: а) виконуються умови 1)—3); б) крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{\tau}, x^0)$ лежить в D разом із своїм ρ-околом для всіх $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L]$. Тоді можна вибрати такі сталі $\varepsilon_0^* = \varepsilon_0^*(\rho, L) > 0$ і $\sigma_2 = \sigma_2(\rho, L) > 0$, що при $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^*$ справджується нерівність*

$$\|x(\tau, \bar{\tau}, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{\tau}, x^0)\| +$$

$$+ \|\varphi(\tau, \bar{\tau}, x^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \bar{\tau}, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| \leq$$

$$\leq \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}$$

для будь-яких $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L]$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Вважатимемо, що існує розв'язок $\bar{x} = \xi(\tau)$ усереднених рівнянь (2) для повільних змінних, який визначений для $\tau \in \bar{\mathbb{R}}_+$ і рівномірно асимптотично стійкий [8]. Це означає, що:

а) для довільного $\alpha > 0$ існує $\beta > 0$ таке, що для кожного розв'язку $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ системи (2), для якого $\|\bar{x}(\bar{\tau}) - \xi(\bar{\tau})\| < \beta$, $\bar{\tau} \in \bar{\mathbb{R}}_+$, виконується нерівність $\|\bar{x}(\tau) - \xi(\tau)\| < \alpha$ для будь-яких $\tau \geq \bar{\tau}$;

б) для кожного $\alpha_1 > 0$ існує таке $L > 0$, не залежне від $\bar{\tau}$, що $\|\bar{x}(\tau) - \xi(\tau)\| < \alpha_1$ для будь-яких $\tau \geq \bar{\tau} + L$.

У монографії [8] доведено теорему Банфі-Філатова стосовно систем стандартного вигляду в розумінні М.М. Боголюбова. Далі ми доведемо її аналог для випадку системи (1) з імпульсним впливом.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1) — 3) та існує рівномірно асимптотично стійкий розв'язок $\bar{x} = \xi(\tau)$ рівнянь (2), який лежить в D разом із своїм ρ-околом, то для довільного $\alpha \in (0, \rho)$ існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що повільні компоненти розв'язку $(x(\tau, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon); \varphi(\tau, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon))$ системи (1) задовольняють нерівність*

$$\|x(\tau, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\tau)\| < \alpha,$$

$$\tau \in \bar{\mathbb{R}}_+, \ \varphi^0 \in \mathbb{R}^m, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{4}$$

Доведення. Зафіксуємо $\alpha \in (0, \rho)$ і за ним виберемо $\beta_1 > 0$ так, щоб

$$\|\bar{x}(\tau, \bar{\tau}, y) - \xi(\tau)\| < \frac{1}{2}\alpha, \quad \tau \in [\bar{\tau}, \infty), \tag{5}$$

при $\|y - \xi(\bar{\tau})\| < \beta_1$. За знайденим β_1 виберемо таке $L_1 > 0$, щоб

$$\|\bar{x}(\tau, \bar{\tau}, y) - \xi(\tau)\| < \frac{1}{2}\beta_1, \tau \in [\bar{\tau} + L_1, \infty). \tag{6}$$

На підставі теореми 1 маємо нерівності

$$\|x(\tau, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq$$

$$\leq \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} \leq \frac{1}{2}\alpha < \alpha$$

для всіх $\tau \in [0, L_1]$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при деякому $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L_1) > 0$. Зазначимо, що малість ε_0 визначається теоремою 1 і нерівностями $\sigma_2 \varepsilon_0^{\frac{1}{l+1}} \leq \frac{1}{2}\alpha$ та $\sigma_2 \varepsilon_0^{\frac{1}{l+1}} \leq \beta_1$. Позначимо $x^{(1)} = x(L_1, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi^{(1)} = \varphi(L_1, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$.

Використовуючи (5), (6) і теорему 1, одержимо оцінки

$$\Delta_1(\tau) \equiv \|x(\tau, L_1, x^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq$$

$$\leq \|x(\tau, L_1, x^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, L_1, x^{(1)})\| +$$

$$+ \|\bar{x}(\tau, L_1, x^{(1)}) - \xi(\tau)\| <$$

$$< \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + \frac{1}{2}\alpha \leq \alpha, \quad \tau \in [L_1, 2L_1),$$

і

$$\Delta_1(2L_1) < \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + \frac{1}{2}\beta_1 \leq \beta_1.$$

Позначимо $x^{(2)} = x(2L_1, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi^{(2)} = \varphi(2L_1, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$.

Припустимо, що

$$\Delta_{s-1}(\tau) \equiv$$

$$\equiv \|x(\tau, (s-1)L_1, x^{(s-1)}, \varphi^{(s-1)}, \varepsilon) - \xi(\tau)\| < \alpha,$$

$$\tau \in [(s-1)L_1, sL_1],$$

і

$$\Delta_{s-1}(sL_1) < \beta_1.$$

Тоді на підставі нерівностей (5), (6) та теореми 1 маємо

$$\Delta_s(\tau) \equiv \|x(\tau, sL_1, x^{(s)}, \varphi^{(s)}, \varepsilon) - \xi(\tau)\| <$$

$$< \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + \frac{1}{2}\alpha \leq \alpha, \tau \in [sL_1, (s+1)L_1),$$

$$\Delta_s((s+1)L_1) < \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + \frac{1}{2}\beta_1 \leq \beta_1,$$

де $x^{(s)} = x(sL_1, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$, $\varphi^{(s)} = \varphi(sL_1, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$.

Оскільки $x(\tau, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon) = x(\tau, sL_1, x^{(s)}, \varphi^{(s)}, \varepsilon)$ при $\tau \in [sL_1, (s+1)L_1]$, то за допомогою методу математичної індукції підтвердимо правильність оцінки (4) для всіх $\tau \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Теорему доведено.

Для одержання кількісної залежності оцінки (4) від величини малого параметра потрібно накласти додаткові обмеження на усереднені рівняння (2). Достатні умови цього визначає наступне твердження, в якому

$$A(x,\tau) = a_0(x,\tau) + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} f_{k,0}(x),$$

$$\tilde{D}_1 = \{y:\ y\in\mathbb{R}^n,\ \|y-\xi(\tau)\| \le \frac{1}{2}\rho, \tau\in\bar{\mathbb{R}}_+\}.$$

Теорема 3. *Нехай: а) виконуються умови 1) — 3); б) існує розв'язок* $\bar{x} = \xi(\tau)$ *системи (2), який лежить у* D *разом із своїм* ρ*-околом для всіх* $\tau\in\bar{\mathbb{R}}_+$*, причому матрицант* $Q(\tau,t)$ *системи у варіаціях* $\dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}A(\xi(\tau),\tau)z$ *задовольняє нерівність*

$$\|Q(\tau,\bar{\tau})\| \le Ke^{-\gamma(\tau-\bar{\tau})}, \quad \tau\ge\bar{\tau}\in\bar{\mathbb{R}}_+$$

зі сталими $K\ge 1$ *і* $\gamma>0$*; в) функція* $\dfrac{\partial}{\partial x}a_0(x,\tau)$ *рівномірно неперервна на множині* $\tilde{D}\times\bar{\mathbb{R}}_+$*. Тоді можна вибрати такі додатні сталі* σ_3 *і* $\tilde{\varepsilon}_0$*, що*

$$\|x(\tau,0,\xi(0),\varphi^0,\varepsilon)-\xi(\tau)\| \le \sigma_3\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}$$

для будь-яких $\tau\in\bar{\mathbb{R}}_+$*,* $\varphi^0\in\mathbb{R}^m$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *при* $\varepsilon_0\le\tilde{\varepsilon}_0$*.*

Доведення. З умови в) випливає існування такого числа $\beta_2>0$, що

$$\|\frac{\partial}{\partial x}A(x+y,\tau) - \frac{\partial}{\partial x}A(x,\tau)\| < \frac{\gamma}{2K}$$

для всіх $x\in\tilde{D}$, $(x+y)\in\tilde{D}$, $\tau\in\bar{\mathbb{R}}_+$ при $\|y\|<\beta_2$. Якщо в рівняннях (2) покласти $y=\bar{x}-\xi(\tau)$, то дістанемо співвідношення

$$y(\tau) = Q(\tau,\bar{\tau})y^0 + \int_{\bar{\tau}}^{\tau} Q(\tau,t)[A(y(t)+\xi(t),t) -$$

$$-A(\xi(t),t) - \frac{\partial}{\partial x}A(\xi(t),t)y(t)]dt,$$

в якому $y^0 = y(\bar{\tau})$. Звідси за допомогою леми Гронуолла -Беллмана [8] доводимо нерівність

$$\|y(\tau)\| \le K\|y^0\|e^{-\frac{\gamma}{2}(\tau-\bar{\tau})} \tag{7}$$

при $\tau\ge\bar{\tau}$ для кожного $y^0\in\mathbb{R}^n$, що задовольняє умову $\|y^0\|<\beta_2K^{-1}$. Із (7) випливає оцінка

$$\|y(\bar{\tau}+L_2)\| \le \frac{1}{2}\|y^0\|, \tag{8}$$

де $L_2 = \dfrac{2}{\gamma}\ln(2K)$.

Далі покладемо $\sigma_3 = \sigma_2(2K+1)$ і скористаємось схемою доведення теореми 2. На підставі теореми 1

$$\|x(\tau,0,\xi(0),\varphi^0,\varepsilon)-\xi(\tau)\| \le$$
$$\le \sigma_2\varepsilon^{1/(l+1)} < \sigma_3\varepsilon^{1/(l+1)}$$

для будь-яких $\tau\in[0,L_2]$, $\varphi^0\in\mathbb{R}^m$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, де малість ε_0 визначається можливістю використання теореми 1 і обмеженням $\sigma_3\varepsilon_0^{\frac{1}{l+1}} \le \frac{1}{2}\rho$. Використовуючи нерівності (7), (8), одержимо

$$\tilde{\Delta}_1(\tau) \equiv \|x(\tau,L_2,\tilde{x}^{(1)},\tilde{\varphi}^{(1)},\varepsilon)-\xi(\tau)\| \le$$
$$\le \sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + K\|\tilde{x}^{(1)}-\xi(L_2)\| \le$$
$$\le \sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + K\sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{l+1}} <$$
$$< \sigma_3\varepsilon^{\frac{1}{l+1}} \quad \forall\,\tau\in[L_2,2L_2)$$

і

$$\tilde{\Delta}_1(2L_2) \le \sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{l+1}} +$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{l+1}} < 2\sigma_2\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}$$

при $2\sigma_2\varepsilon_0^{\frac{1}{l+1}} < \beta_2K^{-1}$. Тут $\tilde{x}^{(1)} = x(L_2,0,\xi(0),\varphi^0,\varepsilon)$, $\tilde{\varphi}^{(1)} = \varphi(L_2,0,\xi(0),\varphi^0,\varepsilon)$.

Аналогічно

$$\tilde{\Delta}_2(\tau) \equiv \|x(\tau, 2L_2, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{\varphi}^{(2)}, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq$$

$$\leq \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + K\|\tilde{x}^{(2)} - \xi(2L_2)\| \leq$$

$$\leq \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} + K \cdot 2\sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} =$$

$$= \sigma_3 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}, \quad \tau \in [2L_2, 3L_2),$$

$$\tilde{\Delta}_2(3L_2) \leq \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\|\tilde{x}^{(2)} - \xi(2L_2)\| \leq 2\sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}},$$

де $\tilde{x}^{(2)} = x(2L_2, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$, $\tilde{\varphi}^{(2)} = \varphi(2L_2, 0, \xi(0), \varphi^0, \varepsilon)$.

Завершується доведення теореми використанням методу математичної індукції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища шк., 1987.— 288 с.

3. *Самойленко А.М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика.— 1971.— **9**.— С.101—117.

4. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления.— Киев — Одесса: Лыбидь, 1992.— 188 с.

5. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340с.

6. *Петришин Я.Р.* Усереднення багатоточкової задачі з параметрами для коливної системи з імпульсною дією // Укр. мат. журн.— 2000.— **52**, N 3.— С.419—423.

7. *Астафьева М.Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 — К., 1989.— 103 с.

8. *Филатов А.Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент: ФАН, 1971.— 280 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.2000