УДК 517.95

©2001 р. Н.В. Пабирівська

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ КОЕФІЦІЄНТНУ ЗАДАЧУ З ТЕПЛОВИМИ МОМЕНТАМИ

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з двома невідомими коефіцієнтами, що залежать від часу, у випадку нелокальних крайових умов та інтегральних умов перевизначення.

We establish the existence and uniqueness conditions for solution of an inverse problem for a parabolic equation with two unknown time-dependent coefficients in the case of nonlocal boundary conditions and integral overdetermination conditions.

В обернених задачах з багатьма невідомими параметрами виникає проблема задання потрібної кількості незалежних додаткових умов – так званих умов перевизначення. Одним із можливих шляхів розв'язання цієї проблеми є використання моментів. Спробу розв'язати пряму задачу теплопровідності, задаючи теплові моменти замість крайових умов, було зроблено в [1]. У даній роботі теплові моменти разом з нелокальними крайовими умовами використовуються при визначенні двох залежних від часу невідомих коефіцієнтів у параболічному рівнянні, причому один з них старший. Задачі знаходження двох старших коефіцієнтів — коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності, досліджено в роботах [3, 4]. Питання єдиності розв'язку задачі визначення двох старших коефіцієнтів у нелінійному рівнянні теплопровідності розглянуто в [2].

1. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, \quad 0 < t < T\}$ розглядається рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + c(t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами a і c, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

нелокальними крайовими умовами

$$\begin{gathered} u(h,t) - u(0,t) = \nu_1(t), \\ u_x(h,t) - u_x(0,t) = \nu_2(t), \quad t \in [0,T], \end{gathered} \tag{3}$$

та умовами перевизначення у вигляді теплових моментів

$$\int_0^h x^i u(x,t)dx = \mu_{i+1}(t), \ i = 0,1, \ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Під розв'язком оберненої задачі (1)—(4) розуміється трійка функцій $(a(t),\ c(t),\ u(x,t))$ з класу $C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0, c(t) \le 0, t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2)—(4).

Теорема 1. *Задача (1)—(4) має розв'язок, якщо виконуються умови:*

1) $\nu_i(t),\ \mu_i(t) \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$; $\varphi(x) \in C^1[0,h]$, $f(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$;

2) $\mu_1(t) > 0$, $\nu_i(t) \ge 0$, $i = 1,2$, $(\mu_1'(t) - \int_0^h f(x,t)dx)/\mu_1(t) \le 0$, $(h\nu_2(t)/2 - \nu_1(t))\mu_1(t) - \mu_2(t)\nu_2(t) > 0$, $\mu_1(t)(\mu_2'(t) - \int_0^h xf(x,t)dx) - \mu_2(t)(\mu_1'(t) - \int_0^h f(x,t)dx) > 0$, $\nu_1'(t) + f(0,t) - f(h,t) \ge 0, t \in [0,T]$; $\varphi'(x) \ge 0$, $x \in [0,h]$; $f_x(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in Q_T$;

3) $\nu_1(0) = \varphi(h) - \varphi(0)$, $\nu_2(0) = \varphi'(h) - \varphi'(0)$, $\mu_1(0) = \int_0^h \varphi(x)dx$, $\mu_2(0) = \int_0^h x\varphi(x)dx$.

Доведення. Побудуємо рівняння стосовно невідомих коефіцієнтів $a(t)$ та $c(t)$. Використовуючи умови (3), (4) при інтегруванні за x від 0 до h рівняння (1) та рівняння, отриманого з (1) множенням на x, приходимо до системи рівнянь

$$\mu_1{}'(t) = a(t)\nu_2(t) + c(t)\mu_1(t) + \int\limits_0^h f(x,t)dx,$$

$$\mu_2{}'(t) = a(t)(hu_x(h,t) - \nu_1(t)) +$$

$$+c(t)\mu_2(t) + \int\limits_0^h xf(x,t)dx. \qquad (5)$$

Позначимо

$$u(0,t) = p(t), \quad t \in [0,T], \qquad (6)$$

тоді

$$u(h,t) = \nu_1(t) + p(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (7)$$

Припускаючи тимчасово відомими коефіцієнти $a(t)$ і $c(t)$, а також значення параметра $p(t)$, за допомогою функції Гріна першої крайової задачі $G_1(x,t,\xi,\tau)$ побудуємо розв'язок прямої задачі (1), (2), (6), (7):

$$u(x,t)w(t) = \int\limits_0^h \varphi(\xi)G_1(x,t,\xi,0)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t w(\tau)d\tau \int\limits_0^h f(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t a(\tau)p(\tau)w(\tau)G_{1\xi}(x,t,0,\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t a(\tau)(p(\tau)+\nu_1(\tau))w(\tau)G_{1\xi}(x,t,h,\tau)d\tau,$$

де $w(t) = \exp(-\int\limits_0^t c(\tau)d\tau)$.

Продиференціюємо даний розв'язок за x:

$$u_x(x,t)w(t) = \int\limits_0^h \varphi'(\xi)G_2(x,t,\xi,0)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t w(\tau)d\tau \int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi -$$

$$-\int\limits_0^t (p'(\tau) - c(\tau)p(\tau) - f(0,\tau)) \times$$

$$\times w(\tau)G_2(x,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t (p'(\tau) + \nu_1{}'(\tau) - c(\tau)(p(\tau)+$$

$$+\nu_1(\tau)) - f(h,\tau))w(\tau)G_2(x,t,h,\tau)d\tau, \quad (8)$$

де $G_2(x,t,\xi,\tau)$– функція Гріна другої крайової задачі.

З другої умови (3) отримуємо співвідношення $u_x(h,t) = \frac{1}{2}(u_x(h,t) + u_x(0,t) + \nu_2(t))$, яке з урахуванням (8) матиме вигляд

$$u_x(h,t) = \frac{u_x(h,t)+u_x(0,t)}{2} + \frac{\nu_2(t)}{2} =$$

$$= w^{-1}(t)\Big[\frac{\nu_2(t)}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta(t)}}\int\limits_0^h \varphi'(\xi)\times$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\theta(t)}\Big)d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$$

$$\times \int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t ((f(0,\tau) + \nu_1{}'(\tau) - c(\tau)\nu_1(\tau) -$$

$$-f(h,\tau))w(\tau))(\theta(t)-\theta(\tau))^{-1.2}\times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)d\tau\Big], \quad (9)$$

$$\theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau.$$

Це означає, що при відомих коефіцієнтах $a(t)$ і $c(t)$ значення $u_x(h,t)$ теж відоме. Визначаючи тоді з (3) $u_x(0,t)$, розв'язок прямої задачі (1)—(3) знаходимо за вказаними значеннями $u_x(0,t)$, $u_x(h,t)$.

Враховуючи (9), надамо системі (5) такого вигляду:

$$a(t)=\frac{F_1(t)}{F_2(t)+h\mu_1(t)Q(t)w^{-1}(t)},$$

$$-c(t)=\frac{1}{\mu_1(t)}(F_3(t)+a(t)\nu_2(t)), \qquad (10)$$

де

$$Q(t)=\frac{u_x(h,t)+u_x(0,t)}{2}w(t),$$

$$\theta(t)=\int\limits_0^t a(\tau)d\tau, \quad F_1(t)=\mu_1(t)(\mu_2'(t)-$$

$$-\int\limits_0^h xf(x,t)dx)-\mu_2(t)(\mu_1'(t)-\int\limits_0^h f(x,t)dx),$$

$$F_2(t)=(h\nu_2(t)/2-\nu_1(t))\mu_1(t)-\mu_2(t)\nu_2(t),$$

$$F_3(t)=\int\limits_0^h f(x,t)dx-\mu_1'(t).$$

Зауважимо, що з системи (10) та умови 2) теореми 1 випливає додатність коефіцієнта $a(t)$ і недодатність коефіцієнта $c(t)$.

Покажемо, що задача (1)—(4) еквівалентна системі (10) в тому розумінні, що коли $(a(t),c(t),u(x,t))$ з класу $C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t)>0, c(t)\leq 0, t\in[0,T]$, — розв'язок задачі (1)—(4), то $(a(t),c(t))$ з класу $C[0,T]\times C[0,T]$, $a(t)>0, c(t)\leq 0, t\in[0,T]$, є розв'язком системи (10), і, навпаки, якщо $(a(t),c(t))$ з класу $C[0,T]\times C[0,T]$, $a(t)>0, c(t)\leq 0, t\in[0,T]$, — розв'язок системи (10), то, підставляючи його в рівняння (1) і знаходячи $u(x,t)$ як розв'язок задачі (1)—(3), отримуємо розв'язок $(a(t),c(t),u(x,t))$ задачі (1)—(4) з класу $C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Дійсно, із способу отримання системи (10) очевидно, що коли $(a(t),c(t),u(x,t))$ – розв'язок задачі (1)—(4), то неперервні функції $(a(t),c(t))$ будуть задовольняти систему рівнянь (10).

Припускаючи тепер, що $(a(t),c(t))$ з класу $C[0,T]\times C[0,T]$, $a(t)>0,\quad c(t)\leq 0,\quad t\in[0,T]$, — розв'язок системи (10), підставимо його в рівняння (1) і знайдемо $u(x,t)$ — розв'язок прямої задачі (1)—(3). Трійка функцій $(a(t),c(t),u(x,t))$ буде розв'язком задачі (1)—(4), якщо виконуватимуться умови (4). Нехай $u(x,t)$ не задовольняє дані умови, зокрема, першу з них, тобто

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx=\chi(t), \qquad (11)$$

$$\chi(t)\not\equiv\mu_i(t), \quad t\in[0,T].$$

Враховуючи (3), з першого рівняння системи (5) маємо

$${\mu_1}'(t)-c(t)\mu_1(t)=$$

$$=\int\limits_0^h(a(t)u_{xx}(x,t)+f(x,t))dx.$$

З іншого боку, з рівняння (1) та припущення (11) знаходимо

$$\chi'(t)-c(t)\chi(t)=$$

$$=\int\limits_0^h(a(t)u_{xx}(x,t)+f(x,t))dx.$$

Вводячи позначення $q(t)=\chi(t)-\mu_1(t)$, з двох останніх рівнянь отримуємо

$$q'(t)-c(t)q(t)=0. \qquad (12)$$

З умов 3) теореми 1 випливає, що

$$q(0)=\int\limits_0^h u(x,0)dx-\mu_1(0)=$$

$$=\int\limits_0^h\varphi(x)dx-\mu_1(0)=0. \qquad (13)$$

Задача (12), (13) має єдиний розв'язок $q(t)\equiv 0$, тобто перша умова з (4) виконується. Виконання другої умови доводиться аналогічно.

Отже, задача (1)—(4) і система (10) еквівалентні.

Встановимо оцінки розв'язків системи (10). Легко бачити, що

$$a(t) \le \max_{[0,T]} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} \equiv A_1, \tag{14}$$

$$-c(t) \le \max_{[0,T]} \frac{F_3(t)}{\mu_1(t)} + $$
$$+A_1 \max_{[0,T]} \frac{\nu_2(t)}{\mu_1(t)} \equiv C_1. \tag{15}$$

Для оцінки $a(t)$ знизу спочатку оцінимо окремо $w(t)$ і $Q(t)$. З вигляду функції $w(t)$ випливає, що

$$1 \le w(t) \le C_2. \tag{16}$$

Враховуючи (9), оцінимо $Q(t)$ зверху:

$$Q(t) \le \frac{1}{2} \max_{[0,h]} \varphi'(x) + \frac{1}{2} T C_2 \max_{Q_T} f_x(x,t) +$$

$$+\frac{C_2}{2\sqrt{\pi}}\Big(2C_3 + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\Big)\times \tag{17}$$

$$\times \max_{[0,T]}(f(0,t) + {\nu_1}'(t) + +C_1\nu_1(t) - f(h,t)),$$

де $C_3 > 0$ — додатна стала, яка обмежує суму ряду

$$\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big).$$

Враховуючи нерівності (16), (17), з першого рівняння системи (10) отримуємо

$$\min_{[0,T]} a(t) \ge \frac{C_4}{C_5 + C_6(\min\limits_{[0,T]} a(t))^{-1/2}}.$$

Розв'язавши останню нерівність відносно $(\min\limits_{[0,T]} a(t))^{-1/2}$, матимемо

$$a(t) \ge A_0 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Отже, оцінки розв'язків системи (10) встановлено (про виконання нерівності $-c(t) \ge 0$ зазначено вище).

Перепишемо систему (10) в такому вигляді:

$$\overline{b}(t) = \overline{P}(\overline{b}(t)),$$

де

$$\overline{P} = (P_1(a,c)(t), P_2(a,c)(t)),$$
$$\overline{b}(t) = (a(t), c(t)).$$

Для дослідження цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Множина $\Phi = \{(a(t), c(t))\colon a(t), c(t) \in C[0,T],\ A_0 \le a(t) \le A_1,\ 0 \le -c(t) \le C_1\}$ – опукла і обмежена в просторі $C[0,T] \times C[0,T]$. У [6] показано, що оператор $\overline{P}\ :\ \Phi \to \Phi$ цілком неперервний. Отже, існує розв'язок рівняння $\overline{b}(t) = \overline{P}(\overline{b}(t))$, а значить, і задачі (1)—(4). Теорему доведено.

Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) встановлює наступна теорема.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1)—(4) єдиний за умови*

$$\mu_1(t)\Big(\mu_2'(t) - \int\limits_0^h x f(x,t)dx\Big) - \mu_2(t)\Big(\mu_1'(t) -$$

$$-\int\limits_0^h f(x,t)dx\Big) \ne 0, \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки задачі (1)—(4) $(a_i(t), c_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2$. Для їх різниці $b(t) = a_1(t) - a_2(t), d(t) = c_1(t) - c_2(t), v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримуємо задачу про знаходження невідомого джерела

$$v_t = a_1(t)v_{xx} + c_1(t)v + b(t)u_{2xx}(x,t) +$$
$$+d(t)u_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{20}$$

$$v(h,t) - v(0,t) = 0,$$
$$v_x(h,t) - v_x(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{21}$$

$$\int\limits_0^h x^i v(x,t)dx = 0,\ i = 0,1,\ t \in [0,T]. \tag{22}$$

Інтегруючи за x від 0 до h рівняння (19) та рівняння, отримане з (19) множенням на x, і враховуючи умови (21), (22), приходимо до системи рівнянь

$$b(t)\int_0^h u_{2xx}(x,t)dx + d(t)\int_0^h u_2(x,t)dx = 0,$$

$$b(t)\int_0^h xu_{2xx}(x,t)dx+ \tag{23}$$

$$+d(t)\int_0^h xu_2(x,t)dx = -a_1(t)v_x(h,t),$$

де $v(x,t)$–розв'язок прямої задачі (19)—(21), який шукаємо аналогічно тому, як при доведенні теореми 1.

Якщо виконується умова

$$\int_0^h u_{2xx}dx\int_0^h xu_2dx- \tag{24}$$

$$-\int_0^h u_2dx\int_0^h xu_{2xx}dx \neq 0,\ t\in[0,T],$$

то система рівнянь (23) зводиться до нормального вигляду. Перетворимо співвідношення (24) за допомогою рівняння (1) та умов (4):

$$\frac{\mu_2(t)}{a_2(t)}\int_0^h (u_{2t}(x,t)-c_2(t)u_2(x,t)-f(x,t))dx-$$

$$-\frac{\mu_1(t)}{a_2(t)}\int_0^h x(u_{2t}(x,t)-c_2(t)u_2(x,t)-f(x,t))dx$$

$$=\frac{\mu_2(t)}{a_2(t)}({\mu_1}'(t)-c_2(t)\mu_1(t)-\int_0^h f(x,t)dx)-$$

$$-\frac{\mu_1(t)}{a_2(t)}({\mu_2}'(t)-c_2(t)\mu_2(t)-\int_0^h xf(x,t)dx)\neq 0.$$

Правильність даного співвідношення випливає з умови (18). Отже, при виконанні умови (18) задача (19)—(22) еквівалентна системі однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Розв'язок цієї системи єдиний $b(t) = d(t) \equiv 0, t\in[0,T]$, тоді $v(x,t)\equiv 0, (x,t)\in\overline{Q_T}$. Теорема доведена.

Слід зауважити, що умови єдиності розв'язку задачі (1)—(4) істотно слабші від умов існування, причому умова (18) міститься в умовах 2) теореми 1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України.— 1994.— N 8.— С.57—60.

2. *Музылев Н.В.* О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объёмной теплоёмкости // Журн. вычисл. мат. и мат. физики.— 1983.— **23**, N 1.— С.102—108.

3. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн.— 1994.— **35**, N 3.— С.612—621.

4. *Ковальчук С.М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатошаровому середовищі // Мат. методи і фіз.-мех. поля.— 1997.— **40**, N 2.— С.153—159.

5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.

6. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн.— 1998.— **39**, N 3.— С.539—550.

Стаття надійшла до редколегії 16.10.2000