УДК 514.76

©2001 р. **В.І. Мироник**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ІЗОТРОПНІ ЛІНІЇ НЕЙТРАЛЬНОГО ПРОСТОРУ

У чотиривимірному нейтральному просторі будується диференціальна геометрія окремих класів ізотропних ліній.

The differential geometry of some classes of isotrope lines is built in a four-dimensioned neutral space.

1. Диференціальна геометрія ліній у просторах Мінковського розвинута в працях дослідників з геометричної школи В.Бляшке. Оригінальний підхід до інваріантних побудов у геометрії однорідних ліній псевдоевклідового простору пропонується у працях [1—5]. У термінах фундаментальних об'єктів лінії побудована теорія кривини локально однорідних часоподібних і простороподібних ліній нейтрального простору [6,7].

У цьому повідомленні розглядаються спеціальні класи локально однорідних ізотропних ліній нейтрального простору.

У чотиривимірному дійсному точковому псевдоевклідовому просторі $A_4(g)$ з інваріантним полем метричного тензора $g = \{g_{IK}\}(I, K, L, ... = \overline{1,4})$ нульової сигнатури (такий простір називається *нейтральним*) розглянемо локально однорідну неперервно диференційовну лінію (γ). Лінія (γ) буде *ізотропною* (мінімальною за термінологією В.Бляшке), якщо вона є інтегральною кривою деякого неперервно диференційовного поля ізотропних векторів на $A_4(g)$.

Умови інваріантності метричного тензора нейтрального простору $A_4(g)$ у термінах інваріантних форм нейтральної зв'язності $\{\omega^I_K\}$ еквівалентні коваріантній сталості компонент цього тензора [6]

$$dg_{IK} = g_{LK}\omega^L_I + g_{IL}\omega^L_K. \qquad (1)$$

У лінеалі V_4 нейтрального простору $A_4(g)$ метричний тензор g задає псевдоскалярний добуток векторів, який визначається способом псевдоскалярного множення векторів деякого базису $\{\vec{e}_I\}$ лінеалу V_4. Отже, $(\vec{e}_I, \vec{e}_K) = g_{IK}$. Якщо таблиця Келі для псевдоскалярного добутку має будову

$$(g_{IK}) = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & -\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

де δ_{ij} та $\delta_{\alpha\beta}$ — символи Кронекера, а $i, j, k, ... = 1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma, ... = 3, 4$, то базис $\{\vec{e}_I\}$ називається стандартним.

Відносно стандартного базису умови інваріантності (1) спрощуються і набувають такого вигляду:

$$\omega^j_i = -\omega^i_j, \quad \omega^\alpha_i = \omega^i_\alpha, \quad \omega^\beta_\alpha = -\omega^\alpha_\beta$$

або

$$\omega^1_1 = \omega^2_2 = \omega^3_3 = \omega^4_4 = 0, \quad \omega^1_2 = -\omega^2_1,$$

$$\omega^3_1 = \omega^1_3, \quad \omega^4_1 = \omega^1_4, \quad \omega^3_2 = \omega^2_3,$$

$$\omega^4_2 = \omega^2_4, \quad \omega^3_4 = -\omega^4_3. \qquad (2)$$

Векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \Lambda^I \underset{xI}{\vec{e}}$, $x \in A_4(g)$ буде ізотропним, якщо компоненти фундаментального об'єкта першого порядку лінії (γ) (інтегральної кривої цього векторного поля) набувають значень

$$\Lambda^1 = \Lambda^3 = 1, \quad \Lambda^2 = \Lambda^4 = 0. \qquad (3)$$

Справді, за умов (3), $\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \underset{x1}{\vec{e}} + \underset{x3}{\vec{e}}$ і тому

$$g(\underset{x}{\vec{\Lambda}}, \underset{x}{\vec{\Lambda}}) = \| \underset{x}{\vec{\Lambda}} \|^2 = g(\underset{x1}{\vec{e}} + \underset{x3}{\vec{e}}, \underset{x1}{\vec{e}} + \underset{x3}{\vec{e}}) =$$

$$= g(\underset{x1}{\vec{e}}, \underset{x1}{\vec{e}}) + g(\underset{x3}{\vec{e}}, \underset{x3}{\vec{e}}) = 0.$$

Інваріантні форми нейтральної зв'язності зв'язані з диференціалами компонент фундаментального об'єкта порядку $(m+1)$ локально однорідної неперервно диференційовної лінії співвідношеннями

$$d\Lambda^I + \Lambda^K \omega_K^I = \Lambda_1^I \theta,$$

$$d\Lambda_1^I + \Lambda_1^K \omega_K^I = \Lambda_{11}^I \theta,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d\Lambda_{(m)}^I + \Lambda_{(m)}^K \omega_K^I = \Lambda_{(m+1)}^I \theta, \tag{4}$$

де θ — параметрична форма лінії. За умов (3) система зовнішніх диференціальних рівнянь (4) набуває вигляду

$$\omega_1^3 = \Lambda_1^1 \theta, \ \omega_1^2 = -\omega_2^3 + \Lambda_1^2 \theta, \ \omega_1^4 = -\omega_3^4 + \Lambda_1^4 \theta,$$

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_1^3, \ d\Lambda_1^1 + \Lambda_1^2 \omega_2^3 - \Lambda_1^4 \omega_3^4 =$$

$$= (\Lambda_{11}^1 + (\Lambda_1^2)^2 - (\Lambda_1^1)^2 - (\Lambda_1^4)^2)\theta,$$

$$d\Lambda_1^2 + \Lambda_1^4 \omega_2^4 = (\Lambda_{11}^2 - \Lambda_1^1 \Lambda_1^2)\theta,$$

$$d\Lambda_1^4 + \Lambda_1^2 \omega_2^4 = (\Lambda_{11}^4 - \Lambda_1^1 \Lambda_1^4)\theta,$$

$$\Lambda_{11}^3 = \Lambda_{11}^1 + (\Lambda_1^2)^2 - (\Lambda_1^4)^2. \tag{5}$$

Використовуючи (5), отримуємо

$$d(\Lambda_1^2 - \Lambda_1^4) - (\Lambda_1^2 - \Lambda_1^4)\omega_2^4 =$$

$$= (\Lambda_{11}^2 - \Lambda_{11}^4 - \Lambda_1^1(\Lambda_1^2 - \Lambda_1^4))\theta.$$

Отже, величини $a := \Lambda_1^2 - \Lambda_1^4$ утворюють лінійний однорідний геометричний об'єкт для кожної ізотропної лінії нейтрального простору.

Локально однорідні ізотропні лінії з нульовим тензором a назвемо *ізотропними лініями* (γ_0). Оскільки вздовж ліній (γ_0) $\Lambda_1^2 = \Lambda_1^4$, то

$$\Lambda_{11}^2 = \Lambda_{11}^4, \ \Lambda_1^3 = \Lambda_1^1, \ \Lambda_{11}^3 = \Lambda_{11}^1,$$

$$d\Lambda_1^2 + \Lambda_1^2 \omega_2^4 = (\Lambda_{11}^2 - \Lambda_1^1 \Lambda_1^2)\theta,$$

$$\omega_1^3 = \Lambda_1^1 \theta, \ \omega_1^2 + \omega_2^3 = \Lambda_1^2 \theta, \ \omega_1^4 + \omega_3^4 = \Lambda_1^2 \theta,$$

$$d\Lambda_1^1 + \Lambda_1^2(\omega_2^3 - \omega_3^4) = (\Lambda_{11}^1 - (\Lambda_1^1)^2)\theta,$$

$$d\Lambda_{11}^I + \Lambda_{11}^K \omega_K^I = \Lambda_{(3)}^I \theta, \dots . \tag{6}$$

Для ліній (γ_0) функція Λ_1^2 є тензором.

Теорема 1. *Ізотропні лінії* (γ_0) *з нульовим тензором* Λ_1^2 *мають першу кривину* $k_1 = \Lambda_1^1$.

Справді, для ізотропних ліній (γ_0) з нульовим тензором Λ_1^2 функція Λ_1^1 стає відносним інваріантом, оскільки $d\Lambda_1^1 = (\Lambda_{11}^1 - (\Lambda_1^1)^2)\theta$. Цей відносний інваріант обираємо за *першу кривину лінії* (γ_0).

Для ізотропних ліній (γ_0) з нульовим тензором Λ_1^2 маємо $\Lambda_{11}^4 = \Lambda_{11}^2 = 0$, $\omega_1^3 = k_1\theta$, $\omega_1^2 = -\omega_2^3$, $\omega_1^4 = -\omega_3^4$, а $\Lambda_{11}^3 = \Lambda_{11}^1, \Lambda_{111}^3 = \Lambda_{111}^1, \dots$ — функції, які задовольняють систему рівнянь

$$dk_1 = (\Lambda_{11}^1 - k_1^2)\theta, \quad d\Lambda_{11}^1 = (\Lambda_{111}^1 - \Lambda_{11}^1 k_1)\theta, \dots .$$

Наслідок. *Ізотропні лінії* (γ_0) *з нульовим тензором* Λ_1^2 *та з нульовою першою кривиною є ізотропними прямими.*

Оскільки $k_1 = \Lambda_1^1 = 0$, то отримуємо $\Lambda_{11}^1 = 0$, $\Lambda_{111}^1 = 0$ і т.д. Отже, $d\underset{x}{\vec\Lambda} = \vec 0$ для кожної точки $x \in (\gamma_0)$ і тому $\underset{x}{\vec\Lambda} = \overrightarrow{\text{const}} \neq \vec 0$ є напрямним вектором ізотропної прямої (γ_0).

Якщо вздовж ізотропної лінії (γ_0) з нульовим тензором Λ_1^2 перша кривина $k_1 = \text{const} \neq 0$, то $\Lambda_{11}^1 = k_1^2$, $\Lambda_{111}^1 = k_1^3$, ..., $\Lambda_{(m)}^1 = k_1^m$.

Теорема 2. *Ізотропні лінії* (γ_0) *з нульовим тензором* Λ_1^2 *і сталою ненульовою першою кривиною — це ізотропні кола. Кожне ізотропне коло характеризується такими значеннями компонент фундаментального об'єкта:* $\Lambda^1 = \Lambda^3 = 1$, $\Lambda_1^1 = k_1$, $\Lambda_{11}^1 = k_1^2$, ..., $\Lambda_{(m)}^1 = k_1^m$, *всі інші компоненти нульові.*

Зауважимо, що для ізотропних ліній (γ_0) з нульовим тензором Λ_1^2

$$d\underset{x}{\vec\Lambda} = k_1(x)\underset{x}{\vec\Lambda}\theta.$$

2. Розглянемо ізотропні лінії (γ_0) з ненульовим сталим тензором Λ_1^2. Вздовж таких ліній

$$\omega_2^4 = \left(\frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_1^2} - \Lambda_1^1\right)\theta$$

і тому

$$d\Lambda_{11}^4 = \left(\Lambda_{(3)}^4 - \Lambda_{11}^4\left(\frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_1^2} - \Lambda_1^1\right) - \Lambda_{11}^1\Lambda_1^2\right)\theta.$$

Теорема 3. *Кожна ізотропна лінія* (γ_0) *зі сталим ненульовим тензором* Λ_1^2

характеризується відносним інваріантом $\Lambda^4_{11} = \Lambda^2_{11}$.

Для ізотропних ліній (γ_0) зі сталим ненульовим тензором Λ^2_1 функція Λ^1_1, яка була першою кривиною ізотропної лінії (γ_0) з нульовим тензором Λ^2_1, втрачає властивість бути відносним інваріантом. Система (6) для кожної ізотропної лінії (γ_0) зі сталим ненульовим тензором Λ^2_1 набуває вигляду

$$\Lambda^2_1 = \mathrm{const},\ \Lambda^4_{11} = \Lambda^2_{11},\ \Lambda^3_1 = \Lambda^1_1,$$

$$\Lambda^3_{11} = \Lambda^1_{11},\ \Lambda^3_{(3)} = \Lambda^1_{(3)},\ \Lambda^4_{(3)} = \Lambda^2_{(3)},$$

$$\omega^3_1 = \Lambda^1_1\theta,\ \omega^4_2 = \left(\frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^2_1} - \Lambda^1_1\right)\theta,$$

$$\omega^2_1 + \omega^3_2 = \Lambda^2_1\theta,\ \omega^4_1 + \omega^4_3 = \Lambda^2_1\theta,$$

$$d\left(\frac{\Lambda^1_1}{\Lambda^2_1}\right) + \omega^3_2 - \omega^4_3 = \left(\frac{\Lambda^1_{11} - (\Lambda^1_1)^2}{\Lambda^2_1}\right)\theta,$$

$$d\Lambda^1_{11} + \Lambda^2_{11}(\omega^3_2 - \omega^4_3) = (\Lambda^1_{(3)} - \Lambda^1_{11}\Lambda^1_1)\theta,$$

$$d\Lambda^2_{11} = \left(\Lambda^2_{(3)} - \frac{1}{\Lambda^2_1}(\Lambda^2_{11})^2 + \Lambda^2_{11}\Lambda^1_1 - \Lambda^1_{11}\Lambda^2_1\right)\theta,$$

$$d\Lambda^I_{(3)} + \Lambda^K_{(3)}\omega^I_K = \Lambda^I_{(4)}\theta, \dots\ . \qquad (7)$$

Відносний інваріант $\Lambda^2_{11} = \Lambda^4_{11}$ назвемо *першою кривиною ізотропної лінії* (γ_0) *зі сталим ненульовим тензором* Λ^2_1. Нехай $\Lambda^2_{11} = \Lambda^4_{11} = \chi_1$.

Ізотропні лінії (γ_0) зі сталим ненульовим тензором Λ^2_1 та з нульовою першою кривиною мають відносний інваріант $\{\Lambda^1_{11}\}$, який для цього класу ліній назвемо *другою кривиною* і позначимо через χ_2.

Дійсно, для вказаного класу ліній $\chi_2 = \Lambda^1_{11}$, $\chi_1 = 0$ і $d\chi_2 = (\Lambda^1_{(3)} - \chi_2\Lambda^1_1)\theta$. Крім цього, ізотропні лінії (γ_0) зі сталим ненульовим тензором Λ^2_1 та з нульовою першою кривиною характеризуються інваріантним тензорним полем $\dfrac{\Lambda^1_1}{\Lambda^2_1}$, бо

$$d\left(\frac{\Lambda^1_1}{\Lambda^2_1}\right) + \omega^3_2 - \omega^4_3 = \frac{\chi_2 - (\Lambda^1_1)^2}{\Lambda^2_1}\theta.$$

Для ізотропних ліній (γ_0) цього класу маємо

$$\omega^3_1 = \Lambda^1_1\theta,\ \omega^4_2 = -\Lambda^1_1\theta,$$

$$\omega^2_1 + \omega^3_2 = \Lambda^2_1\theta,\ \omega^4_1 + \omega^4_3 = \Lambda^2_1\theta,$$

$$d\Lambda^1_{(3)} + \chi_2\Lambda^2_1(\omega^3_2 - \omega^4_3) = (\Lambda^1_{(4)} - \Lambda^1_{(3)}\Lambda^1_1)\theta,$$

$$(\Lambda^1_{(3)} - \Lambda^2_1\chi_2)\omega^3_2 =$$

$$= (\Lambda^2_{(4)} + 2\chi_2\Lambda^1_1\Lambda^2_1 - \Lambda^1_{(3)}\Lambda^2_1 - \chi_2(\Lambda^2_1)^2)\theta,$$

$$d\Lambda^I_{(4)} + \Lambda^K_{(4)}\omega^I_K = \Lambda^I_{(5)}\theta, \dots$$

— диференціальні рівняння і скінченні співвідношення

$$\Lambda^2_{(3)} = \Lambda^2_1\chi_2,\ \Lambda^2_{(3)} = \Lambda^4_{(3)},\ \Lambda^3_1 = \Lambda^1_1,$$

$$\Lambda^3_{11} = \chi_2, \Lambda^3_{(3)} = \Lambda^1_{(3)},\ \Lambda^3_{(4)} = \Lambda^1_{(4)},$$

$$\Lambda^4_{(4)} = 2\Lambda^2_1(\Lambda^1_{(3)} - \chi_2\Lambda^1_1).$$

Аналізуючи скінченні співвідношення, доводимо наступну теорему.

Теорема 4. *Для того, щоб локально однорідна ізотропна лінія* (γ_0) *зі сталим ненульовим тензором* Λ^2_1 *була лінією нульової першої кривини, необхідно й досить, щоб компоненти її фундаментального об'єкта четвертого порядку задовольняли співвідношення* $\Lambda^1_{(3)} = \Lambda^3_{(3)}$, $\Lambda^2_{(3)} = \Lambda^4_{(3)} = \Lambda^2_1\Lambda^3_{11}$, $\Lambda^3_1 = \Lambda^1_1$.

На диференціальному околі п'ятого порядку локально однорідної ізотропної лінії (γ_0) зі сталим ненульовим тензором Λ^2_1 висновки теореми 4 залежать від властивостей тензорного поля Λ^1_1. Якщо друга кривина відмінна від $\dfrac{\Lambda^1_{(3)}}{\Lambda^2_1}$, то Λ^1_1 стає інваріантом, який можна вважати *третьою кривиною* ізотропної лінії (γ_0) у нейтральному просторі.

3. Кожна локально однорідна ізотропна лінія нейтрального простору, крім тензора a, має ще тензор $b := \Lambda^2_1 + \Lambda^4_1$. Дійсно, використовуючи (5), отримуємо

$$db + b\omega^4_2 = (\Lambda^2_{11} + \Lambda^4_{11} - \Lambda^1_1 b)\theta.$$

Оскільки $da - a\omega^4_2 = (\Lambda^2_{11} - \Lambda^4_{11} - \Lambda^1_1 a)\theta$, то функція $m := ab$ задовольняє рівняння $dm = ((a+b)\Lambda^2_{11} + (a-b)\Lambda^4_{11} - 2m\Lambda^1_1)\theta$.

Отже, доведена наступна теорема.

Теорема 5. *Локально однорідна ізотропна лінія нейтрального простору на диференціальному околі другого порядку* *допускає існування відносного інваріанта* m.

Диференціальна геометрія ізотропних ліній з нульовим тензором b аналогічна геометрії ізотропних ліній (γ_0). Тому геометрія ізотропних ліній з нульовим інваріантом m — це геометрія ізотропних ліній (γ_0).

На диференціальному околі третього порядку для локально однорідних ізотропних ліній інваріант $m = \Lambda^3_{11} - \Lambda^1_{11}$. Порядок диференціального околу довільної звичайної точки лінії визначається порядком фундаментального об'єкта лінії, за допомогою якого локально задається лінія у цьому околі.

Якщо (γ_m) — клас локально однорідних ізотропних ліній зі сталим ненульовим інваріантом m, то для такого класу маємо

$$\Lambda^1_1 = \frac{1}{2m}((a+b)\Lambda^2_{11} + (a-b)\Lambda^4_{11}).$$

Вздовж ліній класу (γ_m) тензорні поля a і b нетривіальні.

Ізотропні лінії класу (γ_m), вздовж яких тензори a і b збігаються, є лініями зі сталим ненульовим тензором Λ^2_1 і з нульовим тензором Λ^4_1. Тому

$$d\Lambda^2_1 = (\Lambda^2_{11} - \Lambda^1_1\Lambda^2_1)\theta, \quad \omega^4_2 = \frac{\Lambda^4_{11}}{\Lambda^2_1}\theta,$$

$$d\Lambda^1_1 + \Lambda^2_1\omega^3_2 = (\Lambda^1_{11} + (\Lambda^2_1)^2 - (\Lambda^1_1)^2)\theta.$$

Функції $k_1 := \Lambda^2_1$, $k_2 := \Lambda^1_1$; $k_3 := \dfrac{\Lambda^4_{11}}{\Lambda^2_1}$ є кривинами ізотропних ліній цього класу. Розгортаючи систему (5) для ізотропних ліній класу (γ_m), можна отримати теореми, аналогічні теоремам 3 і 4. Досліджені інваріантні тензорні характеристики розглянутих класів локально однорідних ізотропних ліній у нейтральному просторі можуть скласти основу для інваріантних диференціально-геометричних побудов геометрії ліній цих класів в околах вищих порядків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Домбровський Р.Ф., Юрочко О.М.* Диференціальна геометрія однорідних ліній n-вимірного простору Мінковського // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 2000.— Вип.5.— С.108—125.

2. *Домбровский Р.Ф., Мудряк Н.А., Юрочко О.М.* Некоторые свойства изотропных кривых пространства Минковского // Материалы Международн. конф. "Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики", посвященной 90-летию со дня рождения Г.Ф.Лаптева.— М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, 1999.— С.47—51.

3. *Петруняк О.М.* Ізотропні лінії n-вимірного простору Мінковського // Матеріали студ. наук. конф. Чернівецького університету. Кн.3. Фізико-математичні науки.— Чернівці: Рута, 1999.— С.32—33.

4. *Домбровський Р.Ф., Кац Д.М.* Деякі питання геометрії ліній чотиривимірного псевдоевклідового простору індексу 3 з інваріантним ізотропним векторним полем // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1996.— Вип.13.— С.45—51.

5. *Домбровський Р.Ф., Кац Д.М.* Ознака геодезійності ізотропної лінії у псевдоевклідовому просторі з інваріантним ізотропним векторним полем // Тези доп. V Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука.— К.: КТУ, 1996.— С.129.

6. *Домбровский Р.Ф., Мироник В.И., Осадца И.С.* Фундаментальные объекты и кривизна локально однородных времениподобных линий нейтрального пространства // Материалы Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В.Ефимова. МГУ им. М.В.Ломоносова и Ростовский университет.— Ростов-на-Дону: Абрау-Дюрсо, 2000.— С.18—20.

Стаття надійшла до редколегії 08.12.2000