УДК 517.956.4

©2001 р. І.П. Мединський

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Установлено локальну розв'язність квазілінійної параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині $\{t=0\}$ в класах функцій, які прямують до нуля при $t \to 0$. Окремо розглядається випадок слабкого виродження, в якому за додаткової умови клас правих частин найширший.

The local solvability for a quasilinear parabolic system with degeneration on the initial hyperplane $\{t=0\}$ in a class of functions, which tends to zero when $t \to 0$ is established. The weak degeneration case is considered a specially. The class of nonlinear functions is widest in this case when additional condition is hold.

У праці [1] встановлено локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійної параболічної системи. Аналогічний результат наводиться в цій статті для квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. Як і у випадку систем без виродження локальність таких тверджень викликана бажанням охопити якомога ширші класи нелінійностей.

Для доведення використовується методика з [1] і результати для лінійних систем з виродженням, які одержані раніше. Насамперед це властивості та оцінки фундаментальної матриці розв'язків (ф.м.р.) [2—4], леми про властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів [5] та теореми про коректну розв'язність лінійних систем [6].

1. Нехай n, b, N — задані натуральні числа, $q \equiv 2b/(2b-1)$; $\mathbb{C}_N$ — сукупність усіх стовпчиків u висоти N, елементи яких $u_j \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{NN}$ — сукупність усіх квадратних матриць A порядку N, елементи яких є комплексні числа; I — одинична матриця порядку N; $\Pi_H \equiv \{(t,x) \,|\, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, $H \subset [0,\infty)$; $D_x^{2b-1}u \equiv \{\partial_x^k u_j \,|\, |k| \le 2b-1, j \in \mathbb{N}_0\}$, для $u \in \mathbb{C}_N$, де $\mathbb{N}_0 \equiv \{1,2,...,N\}$; M — кількість елементів множини $D_x^{2b-1}u$; $\mathbb{N}_1 \equiv \{1,2,...,M\}$; $G \equiv \{y \in \mathbb{R}^M \,|\, |y_j| \le K, j \in \mathbb{N}_1\}$, де K — додатна стала; $Q_H \equiv \{(t,x,y) \,|\, (t,x) \in \Pi_H, y \in G\}$; T — задане додатне число; α, β і δ — неперервні на $[0,T]$ функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $\delta(t) > 0$, причому $\delta(t) \le \beta(t), t > 0$, функції β і δ монотонно неспадні та інтеграл $\Delta(T,0) \equiv \int\limits_0^T \frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$ збігається; $A(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $B(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$, $E_c(t,\tau,x) \equiv \exp\{-c(B(t,\tau))^{1-q}|x|^q\}$, $0 < \tau < t \le T$, $c > 0$; $p(t,x;t',x') \equiv ((A(t',t))^{1/b} + |x'-x|^2)^{1/2}$ — спеціальна відстань між точками (t,x) і (t',x') шару $\Pi_{(0,T]}$, $t \le t'$; $\Delta_t^{t'} f(t,\cdot,\cdot) \equiv f(t,\cdot,\cdot) - f(t',\cdot,\cdot)$, $\Delta_x^{x'} f(\cdot,x,\cdot) \equiv f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,x',\cdot)$, $\Delta_{t,x}^{t',x'} f(t,x,\cdot) \equiv f(t,x,\cdot) - f(t',x',\cdot)$, $t \le t'$, $\{(t,x),(t',x')\} \subset \Pi_H$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{|k|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}u) \partial_x^k\right) \times$$

$$\times u(t,x) = f(t,x,D_x^{2b-1}u), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

за таких припущень:

1) вираз $\left(I\partial_t - \sum\limits_{|k|=2b} a_k(t,x,y)\partial_x^k\right)$ рівно-

мірно параболічний за Петровським в $Q_{[0,T]}$;

2) коефіцієнти $a_k : Q_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $|k| = 2b$, обмежені, неперервні за змінною t рівномірно щодо x та y, задовольняють у $Q_{[0,T]}$ рівномірну умову Гельдера за x з показником $\gamma \in (0,1)$ та умову Ліпшиця за змінною y;

3) $\exists C > 0 \ \forall \{t, t'\} \subset [0,T]$, $t < t'$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in G \ \forall k, |k| = 2b :$

$$|\Delta_t^{t'} a_k(t,x,y)| \leq C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}.$$

Стосовно функції $f : Q_{[0T]} \to \mathbb{C}_N$ припускатимемо виконаними наступні умови.

F_1. Функція f неперервна в $Q_{[0,T]}$;

F_2. $\exists C > 0 \ \forall (t,x,y) \in Q_{[0,T]}$: $|f(t,x,y)| \leq C\sigma(t)$, де $\sigma : [0,T] \to [0,\infty)$ — неперервна функція;

F_3. $\exists C > 0 \ \forall \{(t,x,y),(t,x',y)\} \subset Q_{[0,T]}$: $|\Delta_x^{x'} f(t,x,y)| \leq C\sigma(t)|x - x'|^\lambda$, $\lambda \in (0,1)$;

F_4. $\exists C > 0 \ \forall \{(t,x,y),(t,x,y')\} \subset Q_{[0,T]}$: $|\Delta_y^{y'} f(t,x,y)| \leq C\sigma(t)|y - y'|$.

Клас функцій f, які задовольняють серію умов F_1—F_4 з певними λ і σ, позначатимемо через $\mathcal{F}_\sigma^\lambda$.

Поряд з (1) розглянемо лінійну систему

$$\left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{|k|=2b} a_k(t,x,y)\partial_x^k\right) \times$$

$$\times u(t,x) = 0, \quad (t,x,y) \in Q_{(0,T]}. \tag{3}$$

За умов 1) і 2), як випливає з [2,3], існує ф.м.р. задачі Коші Z для системи (3) і справджуються оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq$$

$$\leq C(B(t,\tau))^{-(n+|k|)/(2b)} E_c(t,\tau,x-\xi), \tag{4}$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C|x-x'|^\gamma \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)} (E_c(t,\tau,x-\xi) +$$

$$+ E_c(t,\tau,x'-\xi)), \quad 0 < \tau < t \leq T,$$

$$\{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k| \leq 2b, \tag{5}$$

з деякими сталими $C > 0, c > 0$.

Якщо додатково виконується умова 3), то для ф.м.р. Z в [4] доведено правильність таких оцінок:

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C(p(t,x;t',x'))^\gamma \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)} (E_c(t,\tau,x-\xi) +$$

$$+ E_c(t',\tau,x'-\xi)), \tag{6}$$

$$\left|\partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) d\xi\right| \leq$$

$$\leq C(B(t,\tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)}, \tag{7}$$

$$\left|\Delta_{t,x}^{t',x'} \partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) d\xi\right| \leq$$

$$\leq C(p(t,x;t',x'))^\gamma (B(t,\tau))^{-(|k|)/(2b)}, \tag{8}$$

$$0 < \tau < t \leq t' \leq T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$1 \leq |k| \leq 2b, C > 0, c > 0.$$

2. Означимо потрібні класи функцій. Через $U^{\gamma,\lambda}$ позначатимемо клас вектор-функцій $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_N$, які є неперервними і обмеженими функціями разом з похідними $\partial_x^k u$, $|k| \leq 2b$. Причому похідні молодших порядків задовольняють умову Гельдера відносно відстані p з показником γ, а похідні порядку $2b$ — з показником λ. Якщо умова Гельдера для $\partial_x^k u$, $|k| \leq 2b$, виконується тільки за просторовою змінною, то такий клас функцій позначатимемо через $C^{\gamma,\lambda}$.

Для заданих чисел $\lambda \in (0,1)$, $\mu \in \{0,1\}$ і $r \in \mathbb{R}$ позначимо через $C_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $C_{\mu,r}^{\lambda,0}$ і $C_{\mu,r}^{0,0}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченними є відповідно норми $\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} \equiv \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,0} \equiv \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,0}$ і $\|u\|_{\mu,r}^{0,0}$, де $\|u\|_{\mu,r}^{0,0} \equiv \sup\limits_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}} \dfrac{|u(t,x)|}{(\delta(t))^\mu(\Delta(t,0))^r}$, $[u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} \equiv$

$$\sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset \\ \subset\Pi_{(0,T]} \\ (t,x)\neq(t',x')}} \left(\frac{|\Delta_{t,x}^{t',x'} u(t,x)|(p(t,x;t',x'))^{-\lambda}}{(\delta(t))^\mu(\Delta(\bar{t},0))^{r-\lambda/(2b)}}\right),$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,0} \equiv \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset \\ \subset\Pi_{(0,T]}, x\neq x'}} \left(\frac{|\Delta_x^{x'} u(t,x)||x-x'|^{-\lambda}}{(\delta(t))^\mu(\Delta(t,0))^{r-\lambda/(2b)}}\right).$$

Тут $\bar{t} = t'$, для $r > \lambda/(2b)$ і $\bar{t} = t$, якщо $r < \lambda/(2b)$.

За допомогою означених просторів уведемо простір $U_r^{\gamma,\lambda}$. Він складається з функцій $u \in C_{0,r+1}^{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^k u \in$

$C^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-|k|/(2b)}$, $0<|k|<2b$, та похідні $\partial^k_x u\in C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}$, $|k|=2b$. Простори $U^{\gamma,\lambda}_r$, в яких функції u визначені в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$, $T_0\le T$, позначатимемо через $U^{\gamma,\lambda}_r(\Pi_{(0,T_0]})$.

Ф.м.р. Z породжує об'ємний потенціал

$$u(t,x)\equiv\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,D^{2b-1}_\xi v(\tau,\xi))d\xi,(t,x)\in\Pi_{(0,T]}.\quad(9)$$

Властивості цього потенціалу описуватимуться належністю функції u до відповідних просторів у залежності від того, до яких просторів належать функції f та v.

Лема. *Нехай γ,λ,s — задані числа такі, що $0<\lambda\le\gamma<1$ і $\nu\equiv s+\lambda/(2b)-1$; $\sigma(t)\equiv\delta(t)(\Delta(t,0))^{s-1}$, $t\in(0,T]$. Якщо для ядра Z справджуються оцінки (4)—(8) з показником γ, $f\in\mathcal{F}^\lambda_\sigma$, а $v\in C^{\gamma,\lambda}$, то функція (9) належить до простору $U^{\gamma,\zeta}_\nu$ і справджуються оцінки*

$$|\partial^k_x u(t,x)|\le C(\Delta(t,0))^{\nu+1-|k|/(2b)},\qquad(10)$$

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x}\partial^k_x u(t,x)|\le C(\Delta(t,0))^{\nu+1-(\zeta+|k|)/(2b)}\times$$
$$\times(p(t,x;t',x'))^\zeta,\qquad(11)$$

де $|k|\le 2b$, а $\zeta=\gamma$ для $|k|=2b-1$ і $\zeta<\nu$, якщо $|k|=2b$.

Це твердження є наслідком леми 3 з [5].

3. Наведемо основний результат статті.

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються припущення 1)—3); функція f належить до класу $\mathcal{F}^\lambda_\sigma$ з $0<\lambda<\gamma$ і $\sigma(\cdot)\equiv\delta(\cdot)(\Delta(\cdot,0))^{s-1}$, де s — таке додатне число, що виконується умова*

$$\beta(t)(\Delta(t,0))^\nu\le\delta(t),$$
$$\nu=s+\lambda/(2b)-1>\gamma/(2b),\qquad(12)$$

принаймні для малих $t>0$. Тоді існує таке число $T_0>0$, що задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок з простору $U^{\gamma,\lambda}_\nu(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведення. Як і в [1], розглянемо послідовність функцій $\{u^m:m\ge 0\}$, які задовольняють системи рівнянь

$$\Bigg(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\times$$

$$\times\sum_{|k|=2b}a_k(t,x,D^{2b-1}_x u^{m-1}(t,x))\partial^k_x\Bigg)\times$$

$$\times u^m(t,x)=f(t,x,D^{2b-1}_x u^{m-1}(t,x)),\quad(13_m)$$

$$\Bigg(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\sum_{|k|=2b}a_k(t,x,0)\partial^k_x\Bigg)\times$$

$$\times u^0(t,x)=f(t,x,0),\quad(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad(13_0)$$

початкові умови

$$u^m(t,x)|_{t=0}=0,\quad x\in\mathbb{R}^m,\qquad(14_m)$$

та визначаються формулами

$$u^m(t,x)=\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_m(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,D^{2b-1}_\xi u^{m-1}(\tau,\xi))d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad m\ge 0,\quad u_{-1}\equiv 0,\quad(15_m)$$

де Z_m — ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\Bigg(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\times$$

$$\times\sum_{|k|=2b}a_k(t,x,D^{2b-1}_x u^{m-1}(t,x))\partial^k_x\Bigg)\times$$

$$\times u^m(t,x)=0,\quad(t,x)\in\Pi_{(0,T]}.\qquad(16_m)$$

Розглянемо задачу (13_0), (14_0). З умов теореми випливає, що функція u_0, яка визначена формулою (15_0), є розв'язком цієї задачі Коші. На підставі леми маємо, що $u_0\in U^{\gamma,\lambda}_\nu(\Pi_{(0,T]})$ і справджуються оцінки

$$|\partial^k_x u^0(t,x)|\le C_0(\Delta(t,0))^{\nu+1-|k|/(2b)},$$

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x}\partial^k_x u^0(t,x)|\le C_0(\Delta(t,0))^{\nu+1-(\zeta+|k|)/(2b)}\times$$
$$\times(p(t,x;t',x'))^\zeta,$$

де $|k|\le 2b$, а $\zeta=\gamma$ для $|k|\le 2b-1$ і $\zeta=\lambda$, якщо $|k|=2b$.

Виберемо T_0 таким, щоб

$$C_0\max_{|k|\le 2b}(\Delta(T_0,0))^{\nu+1-|k|/(2b)}<K$$

і $\Delta(T_0,0)<1$. Тоді одержимо такі оцінки

$$|\partial^k_x u^0(t,x)|\le K,\quad|k|\le 2b-1,\qquad(17_0)$$

$$|\partial_x^k u^0(t,x)| \le K_1(\Delta(t,0))^\zeta, \quad |k| \le 2b, \quad (18_0)$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'} u^0(t,x)| \le K_1(p(t,x;t',x'))^\zeta, \quad |k| \le 2b, \quad (19_0)$$

де ζ таке ж, як і раніше.

Крім того, простір $U_\nu^{\gamma,\lambda}$, з $\nu > \gamma/(2b)$, як випливає з [6], є класом єдиності розв'язку.

Розглянемо тепер задачу (13_1), (14_1). Коефіцієнти системи (13_1) $a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^0(t,x))$, $|k| = 2b$, на підставі зроблених припущень і оцінок (17_0)—(19_0) задовольняють умови твердження 2 з [4], а тому існує ф.м.р. Z_1 для такої системи і для Z_1 справджуються оцінки (4)—(8). Оскільки для коефіцієнтів системи (13_1) і правої частини виконані також і умови теореми з [6], то існує єдиний розв'язок задачі (13_1), (14_1), який визначається формулою (15_1). На підставі леми маємо, що для такого розв'язку справджуються оцінки

$$|\partial_x^k u^1(t,x)| \le C_1(\Delta(t,0))^{\nu+1-|k|/(2b)},$$

$$|\partial_{t,x}^{t',x'} u^1(t,x)| \le C_1(\Delta(t,0))^{\nu+1-(\zeta+|k|)/(2b)} \times$$

$$\times (p(t,x;t',x'))^\zeta, |k| \le 2b,$$

де ν і ζ такі ж, як раніше.

Зменшивши довжину інтервалу T_0, одержимо для розв'язку u^1 такі оцінки:

$$|\partial_x^k u^1(t,x)| \le K, \quad |k| \le 2b-1, \quad (17_1)$$

$$|\partial_x^k u^1(t,x)| \le K_1(\Delta(t,0))^\zeta, \quad |k| \le 2b, \quad (18_1)$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'} u^1(t,x)| \le K_1(p(t,x;t',x'))^\zeta, \quad |k| \le 2b, \quad (19_1)$$

з такими ж, як і в (17_0) — (19_0), сталими.

Розв'язок u^1 задачі Коші (13_1), (14_1) належить до простору $U_\nu^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$.

За індукцією встановлюємо існування послідовності розв'язків $\{u^m : m \ge 1\}$ задач (13_m), (14_m), які визначаються формулами (15_m) і для яких у шарі $\Pi_{(0,T_0]}$ справджуються оцінки (17_m)—(19_m), аналогічні оцінкам (17_0)—(19_0). Ці розв'язки будуть єдиними розв'язками задач Коші (13_m), (14_m) з простору $U_\nu^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведемо збіжність послідовності $\{u^m : m \ge 0\}$. Для цього розглянемо функції $\varepsilon_m(t) \equiv \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{|k|<2b} |\partial_x^k(u^m(t,x) - u^{m-1}(t,x))|$, $m \ge 1$ і $\varepsilon_0(t) \equiv \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{|k|<2b} |\partial_x^k u^0(t,x)|$, $t \in (0,T_0]$.

Використовуючи (13_m), (13_{m+1}) запишемо системи рівнянь для різниці $u^{m+1} - u^m$:

$$\left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{|k|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^m)\partial_x^k\right) \times$$

$$\times (u^{m+1}(t,x) - u^m(t,x)) =$$

$$\beta(t)\sum_{|k|=2b}(a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^m) -$$

$$-a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1}))\partial_x^k u^m(t,x) +$$

$$+f(t,x,D_x^{2b-1}u^m) - f(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1}) \equiv$$

$$\equiv \Phi_m(t,x), \ (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]},$$

$$(u^{m+1} - u^m)|_{t=0} = 0,$$

причому для такої різниці правильне зображення

$$u^{m+1}(t,x) - u^m(t,x) =$$

$$= \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z_{m+1}(t,x;\tau,\xi)\Phi_m(\tau,\xi)d\xi. \quad (20)$$

Оцінимо $|\Phi_m|$. За допомогою (18_m), умов 2) і F_4 маємо

$$|\Phi_m(t,x)| \le \beta(t)\sum_{|k|=2b}|a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^m) -$$

$$-a_k(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1})| \cdot |\partial_x^k u^m(t,x)| +$$

$$+|f(t,x,D_x^{2b-1}u^m) - f(t,x,D_x^{2b-1}u^{m-1})| \le$$

$$\le C(\beta(t)(\Delta(t,0))^\nu + \delta(t)(\Delta(t,0))^{s-1})\varepsilon_m(t) \le$$

$$\le C\delta(t)\varepsilon_m(t), (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}. \quad (21)$$

Використавши (12), (20) і (21), одержимо нерівність

$$\varepsilon_{m+1}(t) \le C\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+1/(2b)} \times$$

$$\times \varepsilon_m(\tau)\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau, \quad t \in (0,T_0], \quad m \ge 0. \quad (22)$$

Звідки за індукцією випливають нерівності

$$\varepsilon_m(t) \le (C(\Delta(t,0))^{1/(2b)})^m \sup_{t\in(0,T_0]} \varepsilon_0(t),$$

$$m \ge 1, \quad t \in (0, T_0]. \qquad (23)$$

Ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m$ рівномірно збіжний на $(0, T_0]$, якщо число T_0 вибрати таким, щоб $C(\Delta(T_0, 0))^{1/(2b)} < 1$.

Оскільки $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |\partial_x^k (u^m - u^{m-1})| \le \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m$, то послідовності $\{\partial_x^k u^m : m \ge 0\}$, $|k| < 2b$, рівномірно збіжні в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$. З оцінок (17_m)—(19_m) випливає їх компактність в кожному циліндрі $V_{r,\tau} = \{(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]} \,|\, |x| \le r, t \in (0,\tau]\}$. Тому існують підпослідовності $\{\partial_x^k u^{m_j} : j \ge 1\}$, $|k| = 2b$, які рівномірно збіжні в кожному циліндрі $V_{r,\tau}$. Доведемо рівномірну в $V_{r,\tau}$ збіжність підпослідовності $\{\alpha(t)\partial_t u^{m_j} : j \ge 1\}$. За допомогою $(13_{m_{j+l}})$ і (13_{m_j}) запишемо

$$\alpha(t)\partial_t (u^{m_{j+l}} - u^{m_j}) =$$
$$= \beta(t) \sum_{|k|=2b} (a_k(t,x,D_x^{2b-1} u^{m_{j+l-1}}) -$$
$$- a_k(t,x,D_x^{2b-1} u^{m_{j-1}}))\partial_x^k u^{m_{j+l}} +$$
$$+ \beta(t) \sum_{|k|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1} u^{m_{j-1}}) \times$$
$$\times \partial_x^k (u^{m_{j+l}} - u^{m_j}) + f(t,x,D_x^{2b-1} u^{m_{j+l-1}}) -$$
$$- f(t,x,D_x^{2b-1} u^{m_{j-1}}), \quad l \ge 1.$$

Оскільки в $V_{r,\tau}$ рівномірно збігаються підпослідовності $\{\partial_x^k u^{m_j} : j \ge 1\}$, $|k| = 2b$, а для $|k| < 2b$ і всі послідовності $\{\partial_x^k u^m : m \ge 1\}$, коефіцієнти $a_k, |k| = 2b$, і f задовольняють умову Ліпшиця, то для довільного $\varepsilon > 0$ у $V_{r,\tau}$ справджується нерівність $|\alpha(t)\partial_t(u^{m_{j+l}} - u^{m_j})| < \varepsilon$, якщо взяти j досить великим, а $l \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що підпослідовність $\{\alpha(t)\partial_t u^{m_j} : j \ge 1\}$ рівномірно збігається в кожному циліндрі $V_{r,\tau}$.

Спрямуємо в (13_{m_j}) j до нескінченності, тоді одержимо, що гранична функція u є розв'язком системи (1) з простору $U_\nu^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$. При цьому істотно використовується властивість замкненості операції диференціювання.

Доведемо єдиність одержаного розв'язку. Нехай, крім побудованого розв'язку u, є ще розв'язок $\bar{u}$ задачі Коші (1), (2) з простору $U_\nu^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$. Тоді для їх різниці маємо задачу

$$\alpha(t)\partial_t w(t,x) - \beta(t) \sum_{|k|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}\bar{u}(t,x)) \times$$
$$\times \partial_x^k w(t,x) = \Phi(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]},$$
$$w(t,x)|_{t=0} = 0,$$

де $w = u - \bar{u}$,

$$\Phi(t,x) \equiv \beta(t) \sum_{|k|=2b} (a_k(t,x,D_x^{2b-1}u) -$$
$$- a_k(t,x,D_x^{2b-1}\bar{u}))\partial_x^k u(t,x) +$$
$$+ f(t,x,\Delta_x^{2b-1}u) - f(t,x,\Delta_x^{2b-1}\bar{u}).$$

Для розв'язку w правильним є таке зображення:

$$w(t,x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) \times$$
$$\times \Phi(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}. \qquad (24)$$

З (24) за допомогою (4), (12), умов 2) і F_4, одержимо нерівності

$$\partial_x^k w(t,x) \le C \int_0^t (B(t,\tau))^{-|k|/(2b)} w_0(\tau) \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}, \quad |k| < 2b, \qquad (25)$$

де $w_0(\tau) \equiv \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{|k|<2b} |\partial_x^k w(t,x)|$.

З (25) випливає нерівність

$$\int_0^t w_0(\tau) \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \le C_1(\Delta(t,0))^{1/(2b)} \times$$
$$\times \int_0^t w_0(\tau) \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau, \ t \in (0, T_0],$$

а з неї те, що $w_0(t) = 0$ для тих значень $t \in (0, T_0]$, які задовольняють умову $C_1(\Delta(t,0))^{1/(2b)} < 1$, тобто $w(t) = 0$ для таких t. Повторюючи, якщо необхідно, ці міркування потрібну кількість разів, одержимо, що $w = 0$ в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$.

4. Наведемо деякі наслідки з теореми. Розглянемо випадок, коли $B(T,0) < \infty$. У цьому випадку за функцію δ можна взяти β. Тоді нерівність (12) виконуватиметься для всіх $t \in (0, T_0]$ таких, що $B(T_0, 0) < 1$. Простір функцій, до якого належить розв'язок у цьому випадку, позначимо через $U_\nu^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Наслідок 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються припущення теореми і $B(T,0) < \infty$. Якщо f належить до класу $\mathcal{F}_\sigma^\lambda$ з $0 < \lambda \le \gamma$ і $\sigma(\cdot) = \beta(\cdot)(B(\cdot, 0))^{s-1}$, $s \ge 1 + (\gamma - \lambda)/(2b)$, то існує таке число $T_0 > 0$, що задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок з простору $\tilde{U}_\nu^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$, де ν таке ж, як і раніше.*

Якщо у випадку слабкого виродження $(A(T,0) < \infty)$ додатково припускати виконання умови

4) $\exists \gamma_0 \in (0, \lambda)$ $\exists C > 0$ $\forall t \in [0,T]$: $\int\limits_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C$, то клас правих частин можна брати ширшим.

Наслідок 2. *Нехай для коефіцієнтів системи (1), що має слабке виродження, виконуються умови 1) — 3). Якщо функція f належить до класу $\mathcal{F}_1^\lambda$ з $\lambda \in (0, \gamma]$ і виконується умова 4), то існує таке число $T_0 > 0$, що задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок з простору $U^{\gamma,\lambda-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.*

Зауважимо, що за умов цього наслідку можна розглядати задачу Коші з початковою функцією $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_n$, неперервною і обмеженою разом з усіма похідними до порядку $2b$ включно, котрі задовольняють умову Гельдера з показником $\lambda \in (0,1)$. У такому випадку задача Коші з неоднорідною початковою умовою зводиться відповідною заміною до задачі (1), (2), як і в [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України.— 1994.— N6.— С.7—11.

3. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1995.— 51 с.— Деп. в ДНТБ України 12.07.95, N 1808 — Ук 95.

4. *Мединський І. П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. N 364.— Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1999.— С.298—307.

5. *Ivasyshen S.D., Medynsky I.P.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane // Мат. студії.— 2000.— **13**, N 1.— С.33—46.

6. *Мединський І.П., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.76. Математика.— Чернівці: Рута, 2000.— С.71—76.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.2000