УДК 517.929.7

©2001 р. О.В.Матвій, І.М.Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння із запізненням. Запропоновано й обгрунтовано схему апроксимації крайової задачі із запізненням крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь.

The sufficient conditions for the existence of solution of boundary value problem for delay differential equations are researched. The scheme of the aproximation of boundary value problem with delay by boundary value problem for ordinary differential equations system is given and described.

Крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь є математичними моделями важливих прикладних задач оптимального керування, електродинаміки, екології та ін. [1]. Знайти точний розв'язок таких задач можна тільки в найпростіших випадках. Для знаходження наближених розв'язків крайових задач із запізненням розвинуто методи колокацій [2] та сплайн-функцій [3, 4].

Метою даної роботи є обгрунтування схеми апроксимації крайової задачі із запізненням крайовими задачами для системи звичайних диференціальних рівнянь. Апроксимація початкових задач із запізненням розглядалась в працях [5, 6] та інших.

1. Постановка задачі, існування розв'язку. Розглянемо крайову задачу

$$y''(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t \in [a,b], \quad (1)$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\tau, a], \quad y(b) = \gamma. \quad (2)$$

Нехай $f(t,u_1,u_2)$ - неперервна функція в області $G = [a,b] \times G_1 \times G_1$, де $G_1 = \{u \in \mathbb{R} : |u| \le P_1\}$, P_1, τ - додатні сталі, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi(t)$ - задана неперервна функція на $[a-\tau, a]$.

Запровадимо позначення
$P = \sup\{|f(t,u_1,u_2)| : |u_i| \le P_1, i = \overline{1,2}, a \le t \le b\}$, $J = [a-\tau, a]$, $I = [a,b]$, $B(J \cup I) = \{y(t) : y(t) \in C(J \cup I) \cap (C^2(I)), |y(t)| \le P_1\}$.

Розв'язком задачі (1), (2) будемо вважати функцію $y(t) \in B(J \cup I)$, яка задовольняє рівняння (1) та крайові умови (2).

Введемо в класі функцій $B(J \cup I)$ норму $\|y\|_B = \max\limits_{t \in J \cup I} |y(t)|$. З цією нормою даний клас є банаховим простором.

Теорема 1. *Нехай справджуються умови:*

1) $\dfrac{(b-a)^2}{8} P + \max\{\|\varphi\|, |\gamma|\} \le P_1$;

2) в області G функція $f(t,u_1,u_2)$ задовольняє умову Ліпшиця:

$$|f(t,u_1,u_2) - f(t,\overline{u}_1,\overline{u}_2)| \le$$

$$\le L|u_1 - \overline{u}_1| + L_2|u_2 - \overline{u}_2|;$$

3) $(L_1 + L_2)\dfrac{(b-a)^2}{8} < 1$.

Тоді в класі функцій B існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2).

Доведення. Крайова задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню [7]

$$y(t) = \int\limits_{a-\tau}^{b} \overline{G}(t,s) f(s, y(s), y(s-\tau)) ds + l(t), \quad (3)$$

де

$$\overline{G}(t,s) = \begin{cases} G(t,s), & \{t,s\} \subset I, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$l(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{(b-a)}(t-a) + \varphi(a), & t \in I, \end{cases}$$

$G(t,s)$ — функція Гріна крайової задачі

$$y''(t)=0, \qquad t\in I, \qquad y(a)=y(b)=0.$$

Визначимо оператор T рівністю

$$(Ty)(t)=\int\limits_{a-\tau}^{b}\overline{G}(t,s)f(s,y(s),y(s-\tau))ds+l(t),$$

$$t\in J\cup I.$$

При виконанні умови 1) оператор T відображає простір $B(J\cup I)$ в себе. Нехай $\{y_1,y_2\}\subset B(J\cup I)$, тоді, враховуючи оцінку $\int\limits_a^b|G(t,s)|ds\le(b-a)^2/8$, $t\in I$, і умову 2), дістаємо

$$|T(y_1)-T(y_2)|\le\int\limits_a^b|G(t,s)||f(t,y_1(s),y_1(s-\tau))-$$

$$-f(s,y_2(s),y_2(s-\tau))|ds\le\int\limits_a^b|G(t,s)|\times$$

$$\times(L_1|y_1(s)-y_2(s)|+L_2|y_1(s-\tau)-y_2(s-\tau)|)ds\le$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{8}(L_1+L_2)\|y_1-y_2\|_B.$$

На підставі цієї оцінки та умови 3) одержуємо, що оператор T стискаючий. Отже, він має в просторі B єдину нерухому точку. Теорема 1 доведена.

Наслідок. *Розв'язок крайової задачі (1), (2) є границею за нормою простору $B(J\cup I)$ послідовності функцій $y_k(t)$, $k\in\{0,1,...\}$, які визначаються формулами*

$$y_0(t)=\int\limits_{a-\tau}^{b}\overline{G}(t,s)f(s,0,0)ds+l(t),$$

$$y_k(t)=(Ty_{k-1}(t))(t), \quad k\in\{1,2,\cdots\}.$$

2.Апроксимація крайової задачі. Застосуємо схему апроксимації початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь [5, 6] до наближення крайової задачі (1), (2).

Поставимо у відповідність задачі (1), (2) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(t)=f(t,z_0(t),z_m(t)), \quad t\in I, \tag{4}$$

$$z_i(t)=\mu(z_{i-1}(t)-z_i(t)), \quad i=\overline{1,m}, \tag{5}$$

$$z_i(a)=\varphi\left(a-\frac{i\tau}{m}\right), \quad i=\overline{0,m}, \quad z_0(b)=\gamma. \tag{6}$$

Будемо говорити, що крайова задача (4)—(6) апроксимує крайову задачу (1), (2), якщо справджуються співвідношення

$$\left|z_j(t)-y_j\left(t-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\to 0 \text{ при } m\to\infty,$$

$$t\in I, \quad j=\overline{0,m}.$$

Для обґрунтування апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь головну роль відіграє апроксимація елемента запізнення.

Лема 1. *Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь*

$$\frac{\tau}{m}z_1'(t)+z_1(x)=x(t),$$

$$\frac{\tau}{m}z_j'(t)+z_j(x)=z_{j-1}(t), j=\overline{2,m}, t\in I, \tag{7}$$

з початковими умовами

$$z_j(a)=x\left(a-j\frac{\tau}{m}\right), j=\overline{1,m}, m\in N, \tag{8}$$

де $x\in C(J\cup I)$. Тоді справджуються нерівності

$$\left|z_j(t)-x\left(t-j\frac{\tau}{m}\right)\right|\le 2\omega\left(x,\frac{\tau}{m}\right)(e^{\tau}+1),$$

$$t\in I, j=\overline{1,m}, m\in N, \tag{9}$$

де $\omega(x,\sigma)$ - модуль неперервності функції $x(t)$ на $J\cup I$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $x\in C^1(J\cup I)$. Введемо функції $y_j(t)=x\left(t-j\frac{\tau}{m}\right)$, $j=\overline{1,m}$, $m\in\mathbb{N}$ і оцінимо різниці $\varepsilon_j(t)=z_j(t)-y_j(t)$, $j=\overline{1,m}$. Для $\varepsilon_1(t)$ справджується оцінка $|\varepsilon_1(t)|\le|z_1(t)-y_1(t)|\le\frac{\tau}{m}\omega\left(x',\frac{\tau}{m}\right)$.

Враховуючи співвідношення $z_1(t) = \varepsilon_1(t) + y_1(t)$, запишемо зображення $z_2(t) = z_2^{(1)}(t) + z_2^{(2)}(t)$, де $z_2^{(1)}$ і $z_2^{(2)}(t)$ - розв'язки задач

$$\frac{\tau}{m} z_2'^{(1)}(t) + z_2^{(1)}(t) = y_1(t),$$

$$z_2^{(1)}(a) = y_2(a);$$

$$\frac{\tau}{m} z_2'^{(2)}(t) + z_2^{(2)}(t) = \varepsilon_1(t),$$

$$z_2^{(2)}(a) = 0.$$

Тепер одержуємо

$$|\varepsilon_2(t)| = |z_2(t) - y_2(t)| = |z_2^{(1)}(t) - y_2(t) + z_2^{(2)}(t)| \le |z_2^{(1)} - y_2| + |z_2^{(2)}| \le \frac{\tau}{m}\omega\left(x', \frac{\tau}{m}\right) + \frac{\tau}{m}\frac{\tau}{m}\omega\left(x', \frac{\tau}{m}\right) = \frac{\tau}{m}\omega\left(x', \frac{\tau}{m}\right)\left(1 + \frac{\tau}{m}\right).$$

Продовжуючи аналогічно, дістанемо

$$|\varepsilon_j(t)| \le \frac{\tau}{m}\omega\left(x', \frac{\tau}{m}\right)\left(1 + \frac{\tau}{m}\right)^{j-1} \le \le \frac{\tau}{m}\omega\left(x', \frac{\tau}{m}\right)\left(1 + \frac{\tau}{m}\right)^{m-1} \le \le \frac{\tau}{m}\omega\left(x', \frac{\tau}{m}\right) e^{\tau}, j = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Послабимо тепер припущення щодо $x(t)$. Припустимо, що вона неперервна при $t \in J \cup I$. Розглянемо згладжену функцію

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(\xi)d\xi \,(t \in J \cup I)$$

(функцію $x(t)$ на відрізок $[b, b + h]$ продовжуємо по неперервності як сталу).

Оцінимо різницю $x^{(2)}(t) = x(t) - x^{(1)}(t)$:

$$\left|x^{(2)}(t)\right| = \left|x(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(\xi)d\xi\right| = = |x(t) - x(s)| \le \omega(x, h),$$

де $s \in [t, t + h]$.

Якщо тепер у системі (7) вважати, що $x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$, то згідно з її лінійністю розв'язок буде сумою функцій, які є розв'язками таких систем:

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(1)}(t) + z_1^{(1)}(t) = x^{(1)}(t),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(1)}(t) + z_j^{(1)}(t) = z_{j-1}^{(1)}(t),\ j = \overline{2, m}, \quad (11)$$

$$z_j^{(1)}(a) = y_j(a),\ j = \overline{1, m},$$

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(2)}(t) + z_1^{(2)}(t) = x^{(2)}(t),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(2)}(t) + z_j^{(2)}(t) = z_{j-1}^{(2)}(t),\ j = \overline{2, m}, \quad (12)$$

$$z_j^{(2)}(a) = 0,\ j = \overline{1, m}.$$

Отже,

$$|z_j(t) - y_j(t)| = |z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t) - y_j^{(1)}(t) - y_j^{(2)}(t)| \le |z_j^{(1)}(t) - y_j^{(1)}(t)| + |z_j^{(2)}(t)| + |y_j^{(2)}(t)|.$$

Очевидно, що $|y_j^{(2)}(t)| = \left|x^{(2)}\left(t - \frac{j\tau}{m}\right)\right| \le \omega(x, h)$. Та сама нерівність правильна й для $|z_j^{(2)}(t)|$. Для оцінки різниці $|z_j^{(1)}(t) - y_j^{(1)}(t)|$ можна застосувати нерівність (10), оскільки $x^{(1)}(t)$ - вже достатньо гладка функція. Отже,

$$|z_j(t) - y_j(t)| \le \frac{\tau}{m}\omega\left(x'^{(1)}, \frac{\tau}{m}\right) e^{\tau} + 2\omega(x, h). \quad (13)$$

Враховуючи вигляд функції $x^{(1)}(t)$, одержуємо

$$\omega\left(\left(x^{(1)}\right)', \frac{\tau}{m}\right) \le \le \frac{1}{h} \max_{\substack{|t_1 - t_2| \le \frac{\tau}{m} \\ t_1, t_2 \in [a-\tau, b]}} |[x(t_1 + h) - x(t_1)] + +[x(t_2 + h) - x(t_2)]| \le \frac{2}{h}\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right). \quad (14)$$

Перепишемо нерівність (13) з урахуванням (14) у вигляді

$$|z_j(t) - y_j(t)| \le \frac{2\tau}{hm}\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right) e^{\tau} + 2\omega(x, h).$$

Покладаючи $h = \tau/m$, матимемо

$$|z_j(t) - y_j(t)| \le 2\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)(e^{\tau} + 1),$$

$$t \in I, \quad j = \overline{1, m}, \quad m \in N.$$

Лема 1 доведена.

Зауваження. *Лема 1 уточнює оцінки апроксимації елемента запізнення, які одержані в [5, 6].*

Розглянемо питання близькості розв'язків задач (1), (2) і (4)—(6). Нехай

$$N_j(t) = \max_{a \le \xi \le t} \left| z_j(\xi) - y\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right) \right|, \; t \in I. \tag{15}$$

Запишемо зображення $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ і $z_j^{(2)}(t)$ - розв'язки задач

$$\frac{\tau}{m} z_1^{\prime(1)}(t) + z_1^{(1)}(t) = y(t),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j^{\prime(1)}(t) + z_j^{(1)}(t) = z_{j-1}^{(1)}(t), \; j = \overline{1, m}, \tag{16}$$

$$z_j^{(1)}(a) = y\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \; j = \overline{1, m}.$$

$$\frac{\tau}{m} z_1^{\prime(2)}(t) + z_1^{(2)}(t) = z_0(t) - y(t),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j^{\prime(2)}(t) + z_j^{(2)}(t) = z_{j-1}^{(2)}(t), \; j = \overline{1, m}, \tag{17}$$

$$z_j^{(2)}(a) = 0, \; j = \overline{1, m}.$$

Для різниці $\left| z_j(t) - y\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right|$ справджується нерівність

$$\left| z_j(t) - y\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right| \le$$

$$\le \left| z_j^{(1)}(t) - y\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) \right| + |z_j^{(2)}|. \tag{18}$$

На підставі леми 1 можна стверджувати, що

$$\left| z_j^{(1)}(t) - y_j(t) \right| \le 2\omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right)(e^{\tau} + 1).$$

Для другого доданка в правій частині нерівності (18) нескладно одержати оцінку

$$|z_j^{(2)}(t)| \le \max_{a \le \xi \le t} |z_0(\xi) - y(\xi)| = N_0(t).$$

Із цих оцінок дістаємо нерівність

$$N_j(t) \le 2\omega\left(e, \frac{\tau}{m}\right)(e^{\tau} + 1) + N_0(t),$$

$$j = \overline{1, m}, \qquad t \in I. \tag{19}$$

Крайова задача для функції $z_0(t)$ еквівалентна інтегральному рівнянню

$$z_0(t) = \int_a^b G(t,s) f(s, z_0(s), z_m(s)) ds +$$

$$+ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(t - a) + \varphi(a), \; t \in I. \tag{20}$$

Враховуючи властивості функції $f(t, u_1, u_2)$ із (3), (20) знаходимо при $t \in I$

$$|y_0(t) - z_0(t)| \le \int_a^b |G(t,s)| |f(s, y(s), y(s-\tau)) -$$

$$- f(s, z_0(s), z_m(s))| ds \le$$

$$\le \int_a^b |G(t,s)| |L_1 N_0(s) + L_2 N_m(s)| ds.$$

Остання нерівність справджується для будь-якого $t \in I$. Тому, оцінюючи $|G(t,s)|$ при $\{t, s\} \subset I$ та підставляючи $N_m(s)$ із оцінки (19), дістанемо

$$N_0(b) \le \frac{b-a}{4} \int_a^b ((L_1 + L_2) N_0(s) +$$

$$+ 2L_2(e^{\tau} + 1)\omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right)) ds.$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла, одержуємо

$$N_0(b) \le \frac{(b-a)^2}{2} L_2 (e^{\tau} + 1)\omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right) \times$$

$$\times e^{\frac{(b-a)^2}{4}(L_1 + L_2)},$$

а нерівність (19) набуває вигляду

$$N_j(b) \le \left[2 + \frac{(b-a)^2}{2} L_2 e^{\frac{(b-a)^2}{4}(L_1 + L_2)}\right] \times$$

$$\times (e^{\tau} + 1)\omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right), \; j = \overline{1, m}.$$

Підсумуємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай функція $f(t, u_1, u_2)$ задовольняє умови теореми 1. Тоді крайова* *задача (4)—(6) апроксимує крайову задачу (1), (2) і справджуються співвідношення*

$$\max_{t\in I}\left|z_j(t)-y\left(t-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\le$$

$$\le K_2\omega\left(y,\frac{\tau}{m}\right),\ t\in I,\ j=\overline{1,m},$$

де стала $K_2>0$ не залежить від j та m.

3. Приклад. Розглянемо чисельний приклад, який ілюструє наведену методику апроксимації крайових задач із запізненням:

$$y''=-\frac{1}{16}\sin y(t)-(t+1)y(t-1)+t,\quad t\in[0,2],$$

$$y(t)=t-\frac{1}{2},\quad t\in[-1,0],\quad y(2)=-\frac{1}{2}$$

t	$y_c(t)$	y_θ^{50}	y_θ^{100}
0,5	-1,543053	-1,550167	-1,544859
1,0	-2,081821	-2,095341	-2,084506
1,5	-1,962343	-1,968893	-1,963352

$y_c(t)$ - розв'язок, одержаний у [8] методом стрільби з кроком $h=2^{-11}$;
y_θ^m - розв'язок апроксимуючої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь при $m=50,100$, знайдений за різницевою схемою з кроком $h=0,01$.

Однакова точність досягається при значно менших, у порівнянні з [8], обчислювальних затратах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием.— М.: Наука, 1992.— 336 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.— К.: Наук. думка, 1985.— 224 с.

3. *Мирошниченко В.Л.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом методом сплайн-функций // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат.— 1972.— N5.— С.46—50.

4. *Настасьева Н.П., Черевко І.М.* Кубічні сплайни дефекту два та їх застосування до крайових задач // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фізико-математичні науки.— 1999.— Вип. 1.— С.69—73.

5. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. мат. и мех.— 1965.— N2.— С.226—235.

6. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.— 1999.— **2**, N1.— С.42—50.

7. *Grim L., Schmitt K.* Boundary value problems for delay differential equations // Bull. Amer. Math.Soc.— 1968.— **74**, N5.— P.997—1000.

8. *Nevers K., Schmitt K.* An application of shooting method to boundary value problems for second order delay equations // J.Math. Anal. Appl.— 1971.— **36**.— P.588—597.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2000