УДК 517.51

©2001р. О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

СУКУПНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ГРАФІКАХ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Отримано нове узагальнення теореми Наміоки. З нього, зокрема, випливає, що коли простори $X_1, \ldots, X_d$ сильно зліченно повні, Y метризовний і $\gamma : \prod_{i=1}^{d-1} X_i \to X_d$ – компактнозначне квазінеперервне зверху відображеня, то для довільної нарізно неперервної функції $f : \prod_{i=1}^{d} X_i \to Y$ існує така всюди щільна G_δ-множина $A \subseteq \prod_{i=1}^{d-1} X_i$, що f неперервна в кожній точці множини $\{x\} \times \gamma(x)$ для кожного $x \in A$. Крім того, одержано нові результати про автоматичну неперервність групових операцій і дій.

It is proved a new generalization of the Namioka theorem. In particular, it implies the following result. Let $X_1, \ldots, X_d$ be strongly countable complete spaces, Y be a metrizable space and $\gamma : \prod_{i=1}^{d-1} X_i \to X_d$ be compactvalued upper quasicontinuous mapping. Then for any separately continuous function $f : \prod_{i=1}^{d} X_i \to \mathbb{R}$ there exists dense G_δ-subset $A \subseteq \prod_{i=1}^{d-1} X_i$ such that f is continuous in every point of $\{x\} \times \gamma(x)$ for any $x \in A$. Besides, it is obtained some new results on automatically continuity of group operations and actions.

0. Вступ. При вивченні сукупної неперервності нарізно неперервних відображень часто зручною виявляється мова топологічних ігор. Так, топологічні ігри ефективно використовуються в роботах Християнсена [1], Сан-Ремо[2], Талаґрана [3] і Дебса [4], в яких отримуються результати типу теореми Наміоки [5] про "масивність" множини $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$, де $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення, а $C(f)$ – множина його точок неперервності. Наш підхід до цього питання дозволяє не просто узагальнити теорему Наміоки на ширший клас просторів і для випадку багатьох змінних, а навіть отримати ще загальніший результат про залишковість множин $C_\gamma(f) = \{x \in X : \{x\} \times \gamma(x) \subseteq C(f)\}$, де $\gamma : X \to Y$– деяке многозначне відображення, наприклад, для випадку компактнозначного квазінеперервного зверху відображення γ і сильно зліченно повних просторів X та Y. Слід зауважити, що множина $C_\gamma(f)$ для загальних многозначних відображень γ раніше взагалі не розглядалась. Але ще у Р.Бера [6] було вивчено випадок однозначних неперервних відображень $\gamma(x) \equiv \{g(x)\}$ для $X = Y = Z = \mathbb{R}$. Значно пізніше [7] метод Бера було перенесено на випадок метризовних Y та Z і берівського X, а також, розвиваючи підхід Беґеля [8], була доведена теорема про залишковість множини $C_g(f) = C_\gamma(f)$ для довільного топологічного простору X і неперервної кривої $y = g(x)$ зліченного типу. В роботі [9] Калбрі і Труаллік детально вивчили випадок сталого відображення $\gamma(x) \equiv B \subseteq Y$ для так званої множини зліченного типу B. Уперше позбутися умов типу аксіом зліченності для "обширного" простору Y вдалося лише порівняно недавно в роботі Гансела і Труалліка [10]. Ці автори довели залишковість множини $C_y(f) = C_\gamma(f)$ для горизонталі $\gamma(x) \equiv \{y\}$ у випадку, коли X та Y — сильно зліченно повні, а Z — метризовний простори.

Одержані теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій не тільки узагальнюють багато відомих результатів на цю тему, а також дозволяють з'ясовувати квазінеперервність нарізно неперервних функцій багатьох змінних у досить загальному випадку. Крім того, з їх допомогою одержуються нові аналоги теореми Елліса (див [5,12] і вказану там літературу) для випадку "обширних" просторів.

1. Властивості типу повноти за Чехом. Нехай X – деяка множина, $A \subseteq X$ і $\mathcal{B}$ – система підмножин X. Писатимемо $A \prec \mathcal{B}$, якщо $A \subseteq B$ для деякого $B \in \mathcal{B}$. Якщо $\mathcal{A}$ – ще якась система підмножин X, то запис $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ означає, що $A \prec \mathcal{B}$ для всіх $A \in \mathcal{A}$, тобто $\mathcal{A}$ вписана в $\mathcal{B}$.

Нагадаємо, що простір X називається *повним за Чехом*, якщо він є G_δ-підпростором деякого ширшого компакта. Як відомо [13, с.297], цілком регулярний простір X буде повним за Чехом тоді й тільки тоді, коли існує така послідовність відкритих покриттів $\mathcal{U}_n$ простору X, що для довільної центрованої системи $\mathcal{F}$ замкнених підмножин X з того, що для довільного номера n існує $F \in \mathcal{F}$, таке, що $F \prec \mathcal{U}_n$, випливає, що $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Зліченним аналогом повноти за Чехом є сильна зліченна повнота. Регулярний простір X називається *сильно зліченно повним* (в [5] регулярність не вимагалася), якщо існує така послідовність відкритих покриттів $\mathcal{U}_n$ простору X, що для довільної спадної послідовності непорожніх замкнених множин $F_n \prec \mathcal{U}_n$ перетин $\bigcap F_n$ непорожній. Якщо остання властивість виконується лише для канонічно замкнених множин (тобто таких, що $F_n = \overline{\text{int} F_n}$), то простір X називатимемо *сильно псевдоповним*. Про відповідну послідовність покриттів $\mathcal{U}_n$ будемо говорити, що вона *забезпечує сильну зліченну (псевдо-) повноту чи повноту за Чехом.*

Неважко переконатися, що локально зліченно (псевдо-) компактні простори є сильно зліченно (псевдо-) повними. Крім того, з повноти за Чехом випливає сильна зліченна повнота, а з останньої – сильна псевдоповнота.

Твердження 1.1. *Якщо X – повний за Чехом (сильно зліченно повний, сильно псевдоповний) простір, то існує послідовність інваріантних відносно скінченних об'єднань відкритих покриттів $\mathcal{V}_n$, яка забезпечує повноту за Чехом (сильну зліченну повноту, сильну псевдоповноту).*

Доведення. Для випадку повних за Чехом просторів доведення зовсім просте. Справді, нехай $X = \bigcap G_n$, де G_n відкриті підмножини деякого ширшого компакта Y. Тоді за $\mathcal{V}_n$ можна взяти систему всіх відкритих підмножин простору X, замикання яких у просторі Y міститься в G_n [13, с.298].

Розглянемо тепер випадок сильно зліченно (псевдо-) повного простору X. Нехай послідовність відкритих покриттів $\mathcal{U}_n$ забезпечує сильну зліченну (псевдо-) повноту. Можна вважати, що $\{X\} = \mathcal{U}_1$. Візьмемо за $\mathcal{V}_n$ систему всіх відкритих множин, які подаються у вигляді скінченного об'єднання відкритих в X множин U, таких, що $\overline{U} \prec \mathcal{U}_n$. Зрозуміло, що $\mathcal{V}_n$ – інваріантні відносно скінченних об'єднань відкриті покриття X, адже простір X регулярний. Доведемо, що $\mathcal{V}_n$ забезпечують сильну зліченну (псевдо-) повноту. Розглянемо спадну послідовність (канонічно) замкнених непорожніх множин $F_n \prec \mathcal{V}_n$. Індуктивно побудуємо спадну послідовність відкритих непорожніх множин U_n, таких, що $\overline{U_n} \prec \mathcal{U}_n$ і $U_n \cap F_m \neq \emptyset$ для всіх m і n. Для $n = 1$ покладаємо $U_1 = X$. Припустимо, що $n > 1$ і вже побудована відкрита непорожня множина U_{n-1}, така, що $\overline{U_{n-1}} \prec \mathcal{U}_{n-1}$ і $U_{n-1} \cap F_m \neq \emptyset$ для всіх номерів m. Оскільки $F_n \cap U_{n-1} \subseteq F_n \prec \mathcal{V}_n$, то існують відкриті непорожні множини $V_1, \ldots, V_k \subseteq U_{n-1}$, такі, що $\overline{V_i} \prec \mathcal{U}_n$ для $i \in \{1, \ldots, k\}$, а $F_n \cap U_{n-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_i$. Доведемо, що існує номер $i_0 \leq k$, такий, що $V_{i_0} \cap F_m \neq \emptyset$ для всіх номерів m. Припустимо, що це не так. У такому разі для кожного номера $i \leq k$ існує номер m_i, такий, що $V_i \cap F_{m_i} = \emptyset$. Покладемо $m = \max\{n, m_1, \ldots, m_k\}$. Тоді $V_i \cap F_m = \emptyset$ для $i \leq k$. Отже, $(\bigcup_{i=1}^k V_i) \cap F_m = \emptyset$. Значить, оскільки $U_{n-1} \cap F_m \subseteq U_{n-1} \cap F_n \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_i$, то $U_{n-1} \cap F_m = \emptyset$, а це суперечить індуктивному припущенню. Таким чином, існування i_0 доведено, і для завершення індуктивної побудови залишилось покласти $U_n = V_{i_0}$. Розглянемо множини $F'_n = \overline{U_n} \cap F_n$ ($F'_n = \overline{U_n \cap \text{int} F_n}$). Зрозуміло, що (F'_n) – спадна послідовність (канонічно) замкнених непорожніх множин і $F'_n \subseteq \overline{U_n} \prec \mathcal{U}_n$. Тоді $\bigcap F'_n \neq \emptyset$, а значить, $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

Спадну послідовність замкнених множин E_n називатимемо *компактною*, якщо для довільної центрованої системи $\mathcal{F}$ замкнених множин з того, що для кожного номера n існує $F \in \mathcal{F}$, таке, що $F \subseteq E_n$ випливає, що $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Розглядатимемо також і зліченні аналоги цієї властивості. А саме, казатимемо, що спадна послідовність (канонічно) замкнених множин E_n *зліченно (псевдо-) компактна*, якщо для довільної спадної послідовності непорожніх (канонічно) замкнених множин $F_n \subseteq E_n$, перетин $\bigcap F_n \neq \emptyset$. Наступне твердження випливає з означень і твердження 1.1.

Твердження 1.2. *Цілком регулярний (регулярний) простір X буде повним за Чехом (сильно зліченно повним, сильно псевдоповним) тоді й тільки тоді, коли існує послідовність відкритих покриттів $\mathcal{U}_n$ простору X, таких, що кожна спадна послідовність канонічно замкнених множин $E_n \prec \mathcal{U}_n$ компактна (зліченно компактна, псевдокомпактна). Причому ці покриття можна вибрати інваріантними відносно скінченних об'єднань.*

Таке переформулювання дозволяє описати введені умови типу повноти на мові напрямленостей чи послідовностей. Для цього досить отримати відповідні описи властивостей типу компактності послідовності множин.

Твердження 1.3. *Спадна послідовність замкнених підмножин E_n простору X компактна тоді й тільки тоді, коли довільна напрямленість $(x_m)_{m \in M}$, така, що в кожну множину E_n попадають всі x_m, починаючи з деякого місця, має граничну точку.*

Доведення. Нехай (E_n) – компактна послідовність і (x_m) – відповідна напрямленість. Взявши за $\mathcal{F}$ систему всіх множин $F_m = \overline{\{x_n : n \geq m\}}$, де $m \in M$, одержимо центровану систему, таку, як в означенні компактності послідовності множин. Тоді $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap F_m \neq \emptyset$, отже, (x_m) має граничну точку. Тепер навпаки, нехай E_n задовольняють відповідні умови. Покажемо, що (E_n) компактна. Нехай $\mathcal{F}$ така центрована система замкнених множин, що для кожного номера n існує $F_n \in \mathcal{F}$, таке, що $F_n \subseteq E_n$. Візьмемо для кожного $F \in \mathcal{F}$ точку $x_F \in F$. Ясно, що (x_F) – напрямленість, якщо $\mathcal{F}$ впорядкувати відношенням $\supseteq$, причому $x_F \in E_n$ для $F \subseteq F_n$. Отже, (x_F) має граничну точку x_∞. Зрозуміло, що тоді $x_\infty \in \bigcap \mathcal{F}$.

Наступне твердження доводиться аналогічно попередньому.

Твердження 1.4. *Спадна послідовність замкнених підмножин E_n простору X зліченно компактна тоді й тільки тоді, коли довільна послідовність точок $x_n \in E_n$ має граничну точку в X.*

Нагадаємо [11, с. 11], що підмножина E топологічного простору X називається *обмеженою в* X, якщо довільна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ обмежена на E.

Твердження 1.5. *Для того, щоб спадна послідовність канонічно замкнених підмножин E_n простору X була псевдокомпактною, необхідно (завжди) і досить (якщо X – цілком регулярний), щоб кожна послідовність точок $x_n \in E_n$ була обмеженою в X.*

Доведення. Нехай (E_n) – спадна псевдокомпактна послідовність канонічно замкнених множин. Припустимо, що існує необмежена послідовність точок $x_n \in E_n$. Тоді існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої послідовність чисел $f(x_n)$ необмежена. У такому разі можна знайти послідовність точок $y_n \in U_n = \mathrm{int} E_n$, для яких $|f(y_n)| > n$. Покладемо $V_n = \{x \in U_n \colon |f(x)| > n\}$ і $F_n = \overline{V_n}$. Зрозуміло, що ми одержали спадну послідовність непорожніх канонічно замкнених множин $F_n \subseteq E_n$, причому $\bigcap F_n \subseteq \{x \in X : |f(x)| \geq n \text{ для всіх номерів } n\} = \emptyset$, що неможливо.

Нехай, навпаки, кожна послідовність точок $x_n \in E_n$ обмежена в X. Доведемо, що (E_n) псевдокомпактна. Нехай це не так, тобто існує спадна послідовність непорожніх канонічно замкнених множин $F_n \subseteq E_n$, таких, що $\bigcap F_n = \emptyset$. Зауважимо, що тоді послідовність (F_n) локально скінченна. Для кожного номера n виберемо деяку точку $x_n \in \mathrm{int} F_n$. На основі повної регулярності існують такі неперервні функції $f_n : X \to [0; +\infty)$, що $f_n(x_n) = n$ і $f_n(x) = 0$ для $x \in X \setminus F_n$. Тоді з локальної скінченності послідовності множин F_n випливає, що функція $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ коректно визначена і неперервна на X, причому $f(x_n) \geq f_n(x_n) = n$. Отже, послідовність точок $x_n \in E_n$ необмежена, що неможливо.

Підмножину E топологічного простору X називатимемо *(зліченно, псевдо-) огороженою в* X, якщо існує спадна (зліченно, псевдо-) компактна послідовність канонічно замкнених околів U_n множини E. Для метризовних просторів всі ці поняття збігаються з відносною компактністю.

Нехай X та Y – топологічні простори , а Z – їх добуток. Проекції з добутку на співмножники позначатимемо pr_X і pr_Y відповідно. Якщо $E \subseteq Z$ і $(a, b) \in Z$, то покладемо $E^a = \{y \in Y \colon (a, y) \in E\}$ і $E_b = \{y \in Y \colon (x, b) \in E\}$. Відкриту в Z множину G називатимемо *стовпчастою*, якщо для довільної відкритої в Y непорожньої множини V множина $U = \{x \in X \colon G^x = V\}$ відкрита в X. Зрозуміло, що перетин скінченного числа стовпчастих множин є стовпчастою множиною.

Нехай $\gamma : X \to Y$ – деяке многозначне відображення. Позначатимемо $\gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma(x)$. Нагадаємо, що відображення γ називається *неперервним зверху*, якщо для довільного $x \in X$ і околу V множини $\gamma(x)$ існує окіл U точки x, такий, що $\gamma(U) \subseteq V$. Відображення γ називається *квазінеперервним зверху*, якщо для довільних точки x, її околу U і околу V множини $\gamma(x)$ існує відкрита непорожня множина $W \subseteq U$, така, що $\gamma(W) \subseteq V$. Зрозуміло, що з неперервності зверху випливає квазінеперервність зверху, і для однозначних відображень ці поняття збігаються зі звичайними поняттями неперервності і квазінеперервності.

Многозначне відображення $\gamma : X \to Y$ називатимемо *(зліченно, псевдо-) огороженим*, якщо існує спадна послідовність відкритих стовпчастих мнножин G_n в $X \times Y$, таких, що для довільного номера n проекція $\mathrm{pr}_X(G_n)$ всюди щільна, $\gamma(x) \subseteq G_n^x$ для всіх x з цієї проекції і, крім того, послідовність $(\overline{G_n^x})$ (зліченно, псевдо-) компактна в Y для всіх $x \in X$.

Твердження 1.6. *Кожне компактнозначне квазінеперервне зверху відображення зі значеннями в повному за Чехом (сильно зліченно повному, сильно псевдоповному) просторі (зліченно, псевдо-) огороже-не.*

Доведення. Доведемо лише перше із цих трьох тверджень. Нехай $\gamma : X \to Y$ – компактнозначне квазінеперервне зверху відображення, де Y – повний за Чехом простір. Виберемо $\mathcal{U}_n$ згідно з твердженням 1.2. Нехай $\mathcal{V}_n$ – це система всіх відкритих множин $V \subseteq Y$, таких, що $\overline{V} \prec \mathcal{U}_n$. Оскільки $\mathcal{V}_n$ інваріантні відносно скінченних об'єднань, то для довільного компакта $K \subseteq Y$ виконується $K \prec \mathcal{V}_n$. Розглянемо сукупність Ω_n диз'юнктних систем $\mathcal{W}$ відкритих в X множин W, таких, що $\gamma(W) \prec \mathcal{V}_n$ для всіх $W \in \mathcal{W}$. Користуючись лемою Цорна, легко перевірити, що існує максимальний відносно включення $\subseteq$ елемент $\mathcal{W}_n \in \Omega_n$. Тоді зрозуміло, що множина $W_n = \bigcup \mathcal{W}_n$ всюди щільна. Тепер, оскільки $\mathcal{W}_n \in \Omega_n$, то для кожного $W \in \mathcal{W}_n$ існує відкрита в Y непорожня множина $V_W \in \mathcal{V}_n$, така, що $\gamma(W) \subseteq V_W$. Покладемо $H_n = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_n} W \times V_W$. Зрозуміло, що множини H_n стовпчасті, адже $\mathcal{W}_n$ диз'юнктні. Тоді множини $G_n = \bigcap_{m=1}^{n} H_m$ також стовпчасті, причому $G_n^x \prec \mathcal{V}_n$, а тому $\overline{G_n^x} \prec \mathcal{U}_n$. Отже, послідовність $(\overline{G_n^x})$ компактна. Крім того, $\gamma(x) \subseteq G_n^x$ для $x \in \mathrm{pr}_X(G_n)$ і $\mathrm{pr}_X(G_n) = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ всюди щільна в X.

Зрозуміло, що множина $B \subseteq Y$ буде (зліченно, псевдо-) огороженою тоді й тільки тоді, коли таким буде стале на деякому берівському просторі відображення $\gamma(x) \equiv B$. Тому з попереднього твердження негайно випливає наступне твердження.

Твердження 1.7. *Нехай X – повний за Чехом (сильно зліченно повний, сильно псевдоповний) простір. Тоді довільна відносно компактна його підмножина E (зліченно, псевдо-) огорожена.*

2. Ґротендікові простори. Топологічний простір називатимемо *ґротендіковим*, якщо кожна його обмежена підмножина відносно компактна. Зауважимо, що ґротендіковість інваріантна відносно операції прямої суми. Крім того, перетин довільної сім'ї ґротендікових підпросторів є ґротендіковим. Неважко переконатися, що повні за Дьєдонне, повні за Гьюіттом, паракомпактні, метризовні простори ґротендікові. З теореми Ґротендіка-Асанова-Величка [11, с.119] випливає, що для довільного зліченно компактного простору X простір $C_p(X)$ ґротендіковий. Але при доведенні цієї теореми замість зліченної компактності використовується лише той факт, що в просторі X кожна одноточкова множина зліченно огорожена, а простір значень $\mathbb{R}$ легко замінюється на довільний метризовний простір Y. Отже, внаслідок твердження 1.7, простір $C_p(X,Y)$ буде ґротендіковим, навіть коли X сильно зліченно повний, а Y – метризовний (див. також [14, с.88]). Простір усіх нарізно неперервних відображень $f : \prod_{i=1}^d X_i \to Y$ з топологією поточкової збіжності позначатимемо через $SC_p(\prod_{i=1}^d X_i, Y)$.

Твердження 2.1. *Нехай $X_1, \dots, X_d$ – сильно зліченно повні, а Y – метризовний простори. Тоді $SC_p(\prod_{i=1}^d X_i, Y)$ – ґротендіковий.*

Доведення. Нехай Z_i – це пряма сума просторів $\{(x_1, \dots, x_{i-1})\} \times X_i \times \{(x_{i+1}, \dots, x_n)\}$, де $x_j \in X_j$. Зрозуміло, що Z_i – сильно зліченно повні простори і простір $SC_p(\prod_{i=1}^d X_i, Y)$ є перетином ґротендікових просторів $C_p(Z_i, Y)$.

Нагадаємо, що T_1-простір X називається *квазірегулярним*, якщо в довільній відкритій непорожній множині V існує відкрита непорожня множина U, така, що $\overline{U} \subseteq V$.

Твердження 2.2. *Для кожного квазірегулярного X існує квазірегулярний ґротендіковий простір $\mu X = \overline{X}$, такий, що для довільного цілком регулярного ґротендікового простору Y кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ неперервно продовжується на μX.*

Доведення. Нехай ωX – компактне розширення Волмена, яке складається з усіх ультрафільтрів φ у системі $\mathcal{F}$ всіх замкнених в X множин, а його топологія породжується множинами $U^* = \{\varphi \in \omega X : (\exists F \in \varphi)(F \subseteq U)\}$, де U – відкрита в X множина. Кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ в довільний компакт Z можна неперервно продовжити до відображення $F : \omega X \to Z$ [13, с.272]. Покажемо, що ωX буде квазірегулярним, якщо таким є X. Нехай G – довільна відкрита непорожня множина в ωX. Візмемо такі відкриті множини $V, U \neq \emptyset$, що $U^* \subseteq G$ і $\overline{V} \subseteq U$. Розглянемо замкнену в ωX множину $E = \{\varphi \in \omega X : \overline{V} \in \varphi\}$. Тоді $[V^*]_{\omega X} \subseteq E \subseteq U^* \subseteq G$.

Приступимо до побудови простору μX. Нехай $\mathcal{A}$ – система всіх ґротендікових підпросторів $A \supseteq X$ простору ωX. Зрозуміло, що $\omega X \in \mathcal{A}$. Покладемо $\mu X = \bigcap \mathcal{A}$. Тоді $\mu X \in \mathcal{A}$. Залишилось довести, що виконується властивість продовження. Нехай Y – деякий цілком регулярний ґротендіковий простір і $f : X \to Y \subseteq \beta Y$ — неперервне відображення. Розглянемо його неперервне продовження $F : \omega X \to \beta Y$. Доведемо, що $A = F^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$. По-перше, оскільки $F|_X = f$, то $A \supseteq X$. З'ясуємо, що A – ґротендіковий простір. Нехай E – обмежена в A множина. Тоді $F(E)$ обмежена в Y, а тому $B = \overline{F(E)}$ – компактна підмножина Y, адже Y ґротендіковий. Тоді, оскільки F неперервне, то $F^{-1}(B) \subseteq A$ – замкнена в компактному просторі ωX множина, яка містить E. Отже, E – відносно компактна в A. Таким чином, $A \in \mathcal{A}$. А тому $\mu X \subseteq A$. Отже, $F(\mu X) \subseteq Y$.

3. Топологічна гра Сан-Ремо. Сан-Ремо [2] розглядав гру двох гравців α і β на деякому просторі X, яку ми будемо називати *s-грою.* У ній гравець α грає парами (U_n^α, x_n), де U_n^α – відкрита непорожня множина, а $x_n \in X$. Гравець β ходить відкритими непорожніми множинами U_n^β. Починає гру β ходом U_0^β. Далі гравці ходять по черзі так, щоб $U_n^\beta \subseteq U_n^\alpha \subseteq U_{n-1}^\beta$. Гравець α виграє, якщо замикання множини $\{x_n\} =$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ перетинається з $\bigcap U_n^\alpha$. Інакше виграє β. Якщо кожний хід гравця α (гравця β) є деякою фукцією від попередніх ходів обох гравців, то говоритимемо, що гравець α (гравець β) грає згідно з деякою стратегією. У випадку, коли ця стратегія гарантуватиме йому виграш, будемо називати її *виграшною для гравця α (гравця β)*, а простір X – *α-s-сприятливим (β-s-сприятливим)*. Якщо ж не існує виграшної стратегії для гравця α (гравця β), то простір X називатимемо *α-s-несприятливим (β-s-несприятливим)*.

Зрозуміло, що із α-s-сприятливості випливає β-s-несприятливість. Крім того, в [2] доведено, що сильно зліченно повні (а значить, і повні за Чехом) простори α-s-сприятливі.

Твердження 3.1. *Нехай X – сильно псевдоповний щільний підпростір квазірегулярного ґротендікового простору Y. Тоді Y — α-s-сприятливий простір.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U}_n$ вибрані згідно з твердженням 1.2. Позначимо через $\mathcal{V}_n$ систему всіх відкритих в Y множин V, для яких $\overline{V} \cap X \subseteq U$ для деякого $U \in \mathcal{U}_n$ (замикання береться в Y). Оскільки Y ґротендіковий, то з твердження 1.5 випливає, що для довільно спадної послідовності непорожніх канонічно замкнених в Y множин $V_n \prec \mathcal{V}_n$ і точок $x_n \in V_n \cap X$ послідовність (x_n) має граничну точку в Y. Тому виграшну для α у s-грі стратегію можна, наприклад, визначити таким правилом: $U_n^\alpha \prec \mathcal{V}_n$ і $x_n \in X \cap U_n^\alpha$.

Твердження 3.2. *Нехай X – добуток просторів $X_1, \ldots, X_d$. Тоді, якщо X_1 є β-s-несприятливим, а $X_2, \ldots, X_d$ є α-s-сприятливим, то X є β-s-несприятливим.*

Доведення. Зрозуміло, що досить розглянути випадок $d = 2$. Будемо міркувати від супротивного. Нехай X β-s-сприятливий. Доведемо, що в такому разі X_1 є β-s-сприятливим, що і приведе нас до суперечності. Зафіксуємо деяку бієкцію $\nu = (\nu_1, \nu_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, для якої $\nu_i(n) \leq n$, де $i \in \{1, 2\}$. Розглянемо на просторах X_1, X_2, X три паралельні партії в s-грі: (U_{1n}^α, x_{1n}), U_{1n}^β; (U_{2n}^α, x_{2n}), U_{2n}^β; (U_n^α, x_n), U_n^β. Причому на X гравець β, а на X_2 гравець α грають згідно зі своїми виграшними стратегіями. Нехай U_0^β – початковий хід β на X. Візьмемо відкриті непорожні множини U_{10}^β і U_{20}^β, такі, що $U_{10}^\beta \times U_{20}^\beta \subseteq U_0^\beta$. Покладемо $x_1 = (x_{11}, x_{21}) = (x_{1,\nu_1(1)}, x_{2,\nu_2(1)})$ і $U_1^\alpha = U_{10}^\alpha \times U_{20}^\alpha$. Далі міркуємо аналогічно і на n-ому кроці матимемо $U_{1n}^\beta \times U_{2n}^\beta \subseteq U_n^\beta$, $U_1^\alpha = U_{1n}^\alpha \times U_{2n}^\alpha$ і $x_n = (x_{1,\nu_1(n)}, x_{2,\nu_2(n)})$. Отже, ми описали стратегію для β у s-грі на X_1, граючи згідно з якою він матиме, що $\overline{\{x_n\}} \cap \bigcap U_n^\alpha = (\overline{\{x_{1n}\}} \cap \bigcap U_{1n}^\alpha) \times (\overline{\{x_{2n}\}} \cap \bigcap U_{2n}^\alpha)$. Але у s-грі на X гравець β грає згідно зі своєю виграшною стратегією. Тому написаний вище добуток порожній. Крім того, оскільки на X_2 гравець α грає згідно зі своєю виграшною стратегію, то другий співмножник $\overline{\{x_{2n}\}} \cap \bigcap U_{2n}^\alpha$ непорожній. Отже, $\overline{\{x_{1n}\}} \cap \bigcap U_{1n}^\alpha = \emptyset$. Значить, описана вище стратегія виграшна для β у s-грі на X_1, що неможливо.

4. Основний результат. Нехай X та Y – топологічні, а $(Z, |\cdot - \cdot|)$ – метричний простори. Для функцій $\eta_1, \eta_2 \in Z^Y$ і множини $T \subseteq Y$ покладаємо $|\eta_1 - \eta_2|_T = \sup_{t \in T} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|$. Для множини $E \subseteq Z^Y$ покладаємо $\mathrm{diam}_T E = \sup_{\eta_1, \eta_2 \in E} |\eta_1 - \eta_2|_T$. Нехай $\gamma : X \to Y$ – деяке многозначне відображення і $f : X \times Y \to Z$, а $\varphi : X \to Z^Y$ – асоційоване з f відображення, яке діє за правилом $\varphi(x)(y) = f(x, y)$. Відображення f назвемо *γ-квазінеперервним*, якщо для довільної відкритої в X непорожньої множини U і $\varepsilon > 0$ існують відкриті непорожні множини $W \subseteq U$ і $V \supseteq \gamma(W)$ в X і Y відповідно, такі, що $\mathrm{diam}_V \varphi(W) < \varepsilon$. Це поняття тісно пов'язане з наявністю точок неперервності на графіках многозначних відображень.

Твердження 4.1. *Нехай X та Y – топологічні, а Z – метричний простори, $\gamma : X \to Y$ – многозначне відображення і $f : X \times Y \to Z$ неперервне відносно y відображення. Тоді множина $C_\gamma(f) = \{x \in X : \{x\} \times \gamma(x) \subseteq C(f)\}$ залишкова, якщо f γ-квазінеперервне.*

Доведення. Нехай G_n — об'єднання усіх відкритих в X множин U, таких, що для деякої відкритої в Y множини $V \supseteq \gamma(U)$

виконується нерівність $\operatorname{diam}_V \varphi(U) < 1/n$. Оскільки відображення f γ-квазінеперервне, то множини G_n відкриті й всюди щільні в X. Крім того, $\bigcap G_n \subseteq C_\gamma(f)$.

Наступне твердження доведене в [10].

Твердження 4.2. *Нехай X – компактний простір, а H – деяка ґратка в $C(X, l_\infty(I))$, де $l_\infty(I)$ – простір обмежених функцій $x : I \to \mathbb{R}$ з нормою $\|x\| = \sup_{i\in I} |x(i)|$. Тоді поточкове і рівномірне замикання множини H збігаються в $C(X, l_\infty(I))$.*

Розгянемо тепер випадок, коли простір X не обов'язково компактний.

Твердження 4.3. *Нехай X – топологічний простір, E – його обмежена підмножина і H – зліченна ґратка в $C(X, l_\infty(I))$. Тоді її поточкове замикання у $C(X, l_\infty(I))$ міститься у замиканні відносно топології рівномірної збіжності на E.*

Доведення. Нехай f належить поточковому замиканню H. Покладемо $H^+ = H \cup \{f\}$. Нехай $\varphi : X \to C(H^+, l_\infty(I))$ — відображення, що діє за правилом $\varphi(x)(h) = h(x)$. Тоді $\varphi(E)$ буде обмеженим у метризовному просторі $\tilde{X} = \varphi(X) \subseteq C_p(H^+, l_\infty(I))$. Тому $\tilde{E} = \overline{\varphi(E)}$ є компактною підмножиною $\tilde{X}$. Нехай $\psi : H^+ \to C(\tilde{E}, l_\infty(I))$ відображення, що діє за правилом $\psi(h)(\tilde{x}) = \tilde{x}(h)$. Нехай $\tilde{H}^+ = \psi(H^+)$, $\tilde{H} = \psi(H)$ і $\tilde{f} = \psi(f)$. Оскільки $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)$ для довільних $\tilde{x} = \varphi(x) \in \tilde{X}$ і $\tilde{h} = \psi(h) \in \tilde{H}^+$, то $\tilde{H}$ є ґраткою, причому $\tilde{f}$ належить її поточковому замиканню, а тому, згідно з твердженням 4.2, і її рівномірному замиканню у $C(\tilde{E}, l_\infty(I))$. Звідси, з тієї ж причини, одержуємо, що f міститься у замиканні H відносно топології рівномірної збіжності на E.

Для розширення попереднього твердження на випадок необмежених множин нам знадобиться наступне переформулювання теоретико-множинної теореми Кеніґа.

Твердження 4.4. *Нехай I та J – рівнопотужні множини, а сім'ї $(A_i)_{i\in I}$ та $(B_j)_{j\in J}$ такі, що $\prod_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} B_j$. Тоді існують такі $i \in I$ та $j \in J$, що $\operatorname{pr}_i(B_j) = A_i$.*

Доведення. Нехай $\varphi : I \to J$ – деяка бієкція. Припустимо, що $\operatorname{pr}_i(B_j) \neq A_i$ для довільних i та j. Тоді існують $a_{ij} \in A_i \setminus \operatorname{pr}_i(B_j)$. Значить, оскільки $\bigcup_{i\in I} B_{\varphi(i)} = \bigcup_{j\in J} B_j$, то точка $(a_{i\varphi(i)})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \setminus \bigcup_{j\in J} B_j$, а це неможливо.

Твердження 4.5. *Нехай X – топологічний простір, і (A_n) – псевдокомпактна послідовність його канонічно замкнених підмножин і H – зліченна ґратка в $C(X, l_\infty(I))$. Тоді для довільної неперервної функції f, що належить поточковому замиканню H, і будь-якого $\varepsilon > 0$ існують номер n і функція $h \in H$, такі, що $|h - f|_{A_n} \le \varepsilon$.*

Доведення. Для довільного набору $a = (a_n) \in A = \prod_{n=1}^\infty A_n$ покладемо $E_a = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Згідно з твердженням 1.5, множина E_a обмежена в X. Тому за твердженням 4.3 добуток A подається у вигляді об'єднання зліченної сім'ї множин $B_h = \{a \in A\colon |h - f|_{E_a} \le \varepsilon\}$, де $h \in H$. Тоді за твердженням 4.4 існують такі номер n і функція $h \in H$, що $\operatorname{pr}_n B_h = A_n$. Покажемо, що ці n і h є шуканими. Візьмемо $x \in A_n$. Тоді існує $a = (a_1, a_2, \ldots) \in B_h$ таке, що $a_n = x$. Отже, $x \in E_a$. Значить, $\|h(x) - f(x)\| \le \varepsilon$.

Приступимо до доведення основного результату.

Теорема 4.6. *Нехай $X = \prod_{i=1}^d X_i$ – β-s-несприятливий, Y – топологічний, Z – метричний простри, $\gamma : X \to Y$ – псевдоогорожене многозначне відображення, а відображення $f : X \times Y \to Z$ нарізно неперервне, як функція $d+1$ змінної і квазінеперервне відносно x. Тоді f є γ-квазінеперервним. Зокрема, $C_\gamma(f)$ залишкова.*

Доведення. Можна вважати, що $Z = l_\infty(I)$, адже $z \mapsto |z - \cdot| - |z_0 - \cdot|$ – ізометричне вкладення Z в $l_\infty(Z)$.

Припустимо, що відображення f не є γ-квазінеперервним. Тоді існує $\varepsilon > 0$ і відкрита в X непорожня множина U_0, такі, що для довільних відкритих непорожніх множин $U \subseteq U_0$ і $V \supseteq \gamma(U)$ виконується нерівність $\operatorname{diam}_V \varphi(U) > 2\varepsilon$.

Доведемо, що якщо $g \in C(Y, Z)$, $U \subseteq U_0$

та $V \supseteq \gamma(U)$ відкриті і $B_V = \{h \in C(Y,Z) : |g|_V \le 1\}$, то множина $\varphi^{-1}(g + \varepsilon B_V)$ ніде не щільна в U.

Припустимо, що це не так. Тоді існують відкриті непорожні множини $U \subseteq U_0$ і $V \supseteq \gamma(U)$, такі, що $U \subseteq \overline{E}$, де $E = \varphi^{-1}(g + \varepsilon B_V)$. Доведемо спочатку, що $U \subseteq E$. Справді, якщо це не так і $\varphi(U) \not\subseteq g + \varepsilon B_V$, то $\|f(x_0,y_0) - g(y_0)\| > \varepsilon$ для деяких $x_0 \in U$ і $y_0 \in V$. Далі, оскільки f квазінеперервна відносно x, то існує відкрита непорожня множина $W \subseteq U$ така, що $\|f(x,y_0) - g(y_0)\| > \varepsilon$ для $x \in W$. Тоді $\varphi(W) \cap (g + \varepsilon B_V) = \emptyset$. Значить, $W \cap E = \emptyset$, що суперечить тому, що $W \subseteq U \subseteq \overline{E}$. Таким чином, $U \subseteq E$. Але тоді $\varphi(U) \subseteq g + \varepsilon B_V$, а значить, $\mathrm{diam}_V \varphi(U) \le 2\varepsilon$, що неможливо.

Оскільки γ псевдоогорожене, то існує спадна послідовність стовпчастих множин G_n в $X \times Y$, таких, що їх проекції P_n всюди щільні, $\gamma(x) \subseteq G_n^x$ при $x \in P_n$ і послідовність $(\overline{G_n^x})$ псевдокомпактна для кожного $x \in X$.

Визначимо тепер деяку стратегію для β у s-грі. Покладемо $U_0^\beta = U_0$. Припустимо, що $(U_1^\alpha, x_1), \dots, (U_n^\alpha, x_n)$ – уже зроблені ходи α. Побудуємо відповідь U_n^β гравця β. По-перше, оскільки G_n стовпчаста і її проекція на X всюди щільна, то існують відкриті непорожні множини $U_n \subseteq U_n^\alpha$ і $V_n \subseteq Y$, такі, що $G_n^x = V_n$ для $x \in U_n$. Тоді, $\gamma(U_n) \subseteq V_n$. Значить, оскільки $U_n \subseteq U_0$, то множини $F_n(g) = \varphi^{-1}(g + \varepsilon B_{V_n})$ ніде не щільні в U_n. Покладемо $S_n = \prod_{i=1}^d \mathrm{pr}_i(\{x_1, \dots, x_n\})$. Нехай H_n – скінченна ґратка, натягнута на множину $\varphi(S_n)$. Покладемо $U_n^\beta = U_n \setminus \bigcup_{g \in H_n} F_n(g)$.

Але β не має виграшної стратегії. Зокрема, і щойно описана стратегія не є виграшною. Тому існує така партія в s-грі, в якій β грає згідно з цією стратегією, але програє. Тобто існує $x_\infty \in \overline{\{x_n\}} \bigcap U_n^\beta$. Нехай $H = \bigcup H_n$. Оскільки $H_n \subseteq H_{n+1}$, то H – зліченна ґратка, причому $g_\infty = \varphi(x_\infty)$ належить її поточковому замиканню, адже φ нарізно неперервна і $x_\infty \in \overline{S}$, де $S = \bigcup S_n = \prod_{i=1}^d \mathrm{pr}_i\{x_1, x_2, \dots\}$. Оскільки $V_n = G_n^{x_\infty}$, то послідовність множин $A_n = \overline{V_n}$ псевдокомпактна. Застосуємо твердження 4.5 для множин A_n і ґратки H. Одержимо, що існує номер n і функція $h \in H$, такі, що $|g_\infty - h|_{A_n} < \varepsilon$. Розглянемо такий номер m, що $h \in H_m$. Оскільки H_k зростають, то можна вважати, що $m > n$. Тоді $V_m \subseteq V_n \subseteq A_n$. Тому $|g_\infty - h(x)|_{V_m} < \varepsilon$. Значить, $x_\infty \in F_m(h)$, що неможливо.

5. Різні застосування. Приступимо до доведення квазінеперервності нарізно неперервних відображень.

Теорема 5.1. *Нехай $f : \prod_{i=1}^d X_i \to Z$ — нарізно неперервне відображення, де простір X_1 β-s-несприятливий, $X_2, \dots, X_{d-1}$ α-s-сприятливі, Z цілком регулярний, причому $X_2, \dots, X_d$ мають всюди щільну множину, що складається із псевдоогорожених точок. Тоді f квазінеперервне.*

Доведення. Зведемо спочатку теорему до випадку $Z = \mathbb{R}$. Нехай $x_0 \in X$. Візьмемо деякий окіл W точки $z_0 = f(x_0)$ і неперервну функцію $g : \prod_{i=1}^d X_i \to [0,1]$, таку, що $g(Z \setminus W) \subseteq \{0\}$. Нехай $h = g \circ f$. Тоді, якщо h квазінеперервна, то існує відкрита непорожня множина $V \subseteq U$ така, що $h(V) \subseteq (0,1]$. А значить, $f(V) \subseteq W$.

Припустимо, що у випадку $Z = \mathbb{R}$ висновок теореми правильний для деякого d. Нехай $X = \prod_{i=1}^d X_i$ і $Y = X_{d+1}$. З індуктивного припущення випливає, що f квазінеперервна відносно x. Тоді згідно з теоремою 4.6, оскільки Y має всюди щільну множину псевдоогорожених точок, то множина $C_y(f)$ всюди щільна для всіх y із цієї всюди щільної множини. Звідси легко отримати квазінеперервність f.

Наслідок 5.2. *Нехай X_1 – β-s-несприятливий, $X_2, \dots, X_{d-1}$ – сильно зліченно повні, X_d – сильно псевдоповний, Y – цілком регулярний топологічні простори і $X = \prod_{i=1}^d X_i$. Тоді довільне нарізно неперервне відображення $f : X \to Y$ квазінеперервне.*

Наслідок 5.3. *Нехай X_1 – β-s-несприятливий, $X_2, \dots, X_{d-1}$ – сильно зліченно повні, X_d – сильно псевдоповний, Y – метризовний простори, $\gamma : \prod_{i=1}^{d-1} X_i \to X_d$*

– *компактнозначне квазінеперервне зверху відображення. Тоді для довільного нарізно неперервного відображення* $f : \prod_{i=1}^{d} X_i \to Y$ *множина* $C_\gamma(f)$ *містить всюди щільну* G_δ-*підмножину.*

Теорема 5.4. *Нехай один із просторів* $X_1, \dots, X_d$ *сильно псевдоповний, а решта сильно зліченно повні,* Y *метризовний і* $\gamma : \prod_{i=1}^{d-1} X_i \to X_d$ *— компактнозначне квазінеперевне зверху відображення. Тоді для довільного нарізно неперервного відображення* $f : \prod_{i=1}^{d} X_i \to Y$ *множина* $C_\gamma(f)$ *містить всюди щільну* G_δ-*підмножину.*

Доведення. Якщо X_d сильно псевдоповний, то це випливає з попереднього наслідку. Припустимо тепер, що, наприклад, X_1 сильно псевдо повний, а решта сильно зліченно повні. Асоційоване відображення $\varphi : X_1 \to SC_p(\prod_{i=2}^{d} X_i, Y)$ неперервне. Згідно з твердженнями 2.1 і 2.2 продовжимо його до відображення $\Phi : \mu X_1 \to SC_p(\prod_{i=2}^{d} X_i, Y)$. Покладемо $F(x_1, \dots, x_d) = \Phi(x_1)(x_2, \dots, x_d)$. Тоді F нарізно неперервне, отже, $C_\gamma(F)$ залишкова, бо згідно з твердженням 3.1 простір μX_1 α-s-сприятливий. Значить, оскільки добуток $\prod_{i=1}^{d-1} X_i$ берівський (навіть α-сприятливий), то $C_\gamma(f)$ також залишкова в цьому добутку.

Дією групи G на множину X називається відображення $G \times X \ni (g, x) \mapsto gx \in X$, таке, що $g(hx) = (gh)x$ і $ex = x$, де $g, h \in G$, $x \in X$, а e – одиниця групи G.

Теорема 5.5. *Нехай сильно зліченно (псевдо-) повний простір* G *є групою, а* X *– тихоновськький сильно псевдо- (зліченно) повний простір, причому, правий зсув* $g \mapsto gh$ *неперервний для кожного* $h \in H$, *і, крім того, інверсія* $g \mapsto g^{-1}$ *неперервна або* X σ-*компактний. Тоді кожна нарізно неперервна дія* G *на* X *неперервна.*

Доведення. Досить довести, що відображення $f(g, x) = \varphi(gx)$ неперервне для довільної функції $\varphi \in C(X)$. Нехай $g_0 \in G$, $x_0 \in X$ і $\gamma(g) = g^{-1} g_0 x_0$. За теоремою 5.4, якщо інверсія неперервна, то $C_\gamma(f) \neq \emptyset$. Якщо ж X σ-компактний, то $C_\gamma(f) \supseteq C_X(f) \neq \emptyset$. Візьмемо $g \in C_\gamma(f)$. Нехай $x = \gamma(g)$ і $t = g_0^{-1} g$. Тоді, $g = g_0 t$ і $x = t^{-1} x_0$, причому $(g, x) \in C(f)$. Покажемо, що f неперервна в точці (g_0, x_0). Візьмемо деяку напрямленість $(g_m, x_m) \to (g_0, x_0)$. Тоді $(g_m t, t^{-1} x_m) \to (g, x)$. Отже, $f(g_m, x_m) = f(g_m t, t^{-1} x_m) \to f(g, x) = f(g_0, x_0)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Christensen J.P.R* Joint continuity of separately continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— **82**, N3.— P. 455-461.

2. *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— **87**, N4.— P.409—504.

3. *Talagrand M.* Espaces de Baire et espaces de Namioka //Math. Ann.— 1985.— **270**, N2.— P.159—164.

4. *Debs G.* Poins de continue d'une fonction separament continue // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— **97**.— P.167—176.

5. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math.— 1974.— **51**, N2.— P.515—531.

6. *Baire.R.* Sur les fonctions de variables reelles. // Annali. di mat. ed. appl., ser.3.— 1899.— **3**.— P.1—123.

7. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Про неперервність нарізно неперервних відображень на кривих // Мат. студії.— 1998.— **9**, N2.— C.205—210.

8. *Bögel K.* Uber partiell defferenzierbare Funktionen // Math. Z.— 1926.— **25**.— S.490—498.

9. *Calbrix J., Troallic J.-P.* Applications separament continues // C. R. Acad. Sc. Paris. Serie A.— 1979.— 288.— P.647—648.

10. *Hansel G., Troallic J.-P.* Quasicontinuity and Namioka's theorem // Topology Appl.— 1992.— **46**, N2.— P.135—149.

11. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.— 222 с.

12. *Reznichenko O.V.* Generalization of the Ellis theorem // Topology Appl.— 1991.— **31**, N6.— P.111—133.

13. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

14. *McCoy R., Ntantu I.* Topological property of spaces of continuous function // Lect. Notes Math.— 1988.— **1315**.— P.1—124.

Стаття надійшла до редколегії 05.11.2000