УДК 517.51

©2001р. В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк, В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ТОЧКОВА РОЗРИВНІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Доведено теореми про точкову розривність горизонтально квазінеперервних функцій, які точково розривні відносно другої змінної, а також функцій багатьох змінних. Вони покращують результати К.Беґеля, С.Кемпістого, Г.Гана і Й.Мібу і пов'язані з одним результатом Ґ.Дебса.

It is proved theorems on pointwise discontinuity of horizontally quasicontinuous functions which are pointwise discontinuous with respect to the second variable. They improve results of K.Bögel, S.Kempisty, H.Hahn and Y.Mibu and they are connected with the result of G.Debs.

1. К.Беґель [1] довів таку теорему: якщо функція $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ неперервна відносно першої змінної і точково розривна відносно другої для всіх значень першої змінної, що пробігають деяку множину, перетин якої з довільним інтервалом $(\alpha, \beta) \subseteq (a,b)$ є множиною другої категорії, то множина точок розриву $D(f)$ функції f є множиною першої категорії в прямокутнику $(a,b) \times (c,d)$, зокрема, f є точково розривною функцією. С.Кемпістий [2] без доведення сповістив, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної і точково розривна відносно другої змінної, є точково розривною за сукупністю змінних. Нарешті, Г.Ган [3, с.338], розвиваючи підхід Беґеля, отримав такий результат: якщо $X_1, ..., X_{n-1}$ – повнометризовні простори, X_n– сепарабельний метризовний простір, $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{R}$ – функція, яка нарізно неперервна відносно перших $n-1$ змінних і така, що множина тих точок $(x_1, ..., x_{n-1}) \in X_1 \times ... \times X_{n-1}$, для яких функція $g(x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ є точково розривною на X_n, буде залишковою в добутку $X_1 \times ... \times X_{n-1}$, то множина $D(f)$ точок розриву функції f є множиною першої категорії в добутку $X_1 \times ... \times X_n$.

У післявоєнні роки також з'явилося кілька теорем такого типу, хоча, судячи з усього, їх автори не знали про результати своїх попередників. Й.Мібу [4] вводить термін "квазінеперервна функція" для відображення f, множина точок розриву $D(f)$ якого є множиною першої категорії. Оскільки зараз стало загальноприйнятим (див., наприклад, огляд [5]) розуміти квазінеперервність у сенсі С.Кемпістого [2], що вперше запровадив цей термін у вжиток, то ми будемо називати квазінеперервні у сенсі Мібу відображення *трохи розривними*. Результат Мібу [4, теорема 2] такий: якщо X і Y – берівські простори, Y – задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної і трохи розривне відносно другої змінної при фіксованих значеннях першої змінної з деякої залишкової множини в X, то f буде трохи розривним. Як наслідок, Й.Мібу одержує результати про точкову розривність функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, які випливають і з теореми Гана.

Ґ.Дебс [6] виходив з питання: чи буде функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної і належить до першого класу Бера відносно другої, сукупно неперервною хоча б в одній точці? Як видно зі вступу до праці [6], її автор вважає, що відповідь на це питання невідома, хоча вона негайно випливає уже з первісного результату К.Беґеля. Але насправді Ґ.Дебс в [6], застосовуючи топологічні ігри, встановлює набагато загальніший результат. Він каже, що відображення $\varphi : X \to Z$ зі значеннями в метричному просторі Z є першого класу, якщо в кожній непорожній частині A простору X міститься непорожня відносно відкрита частина U, для якої $\mathrm{diam}\varphi(U) < \varepsilon$. Крім того, Ґ.Дебс вводить на просторі X топологічну гру $\mathcal{J}'(X)$ між гравцями α і β, в якій починає β, і гравці почергово вибирають відкриті непорожні множини $U_0, U_1, U_2, ...$ в X, $U_{n-1} \subseteq U_n$, а гравець α ще й точки $x_n \in U_{2n+1}$. При цьому α виграє, якщо $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n \cap \overline{\{x_p : p \in \mathbb{N}\}} \neq \emptyset$.

Результат Ґ.Дебса [6, теорема 1] формулюється так: якщо X – β-несприятливий простір у грі $\mathcal{J}'(X)$ і Y – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, такі, що добуток $X \times Y$ є берівським, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної і першого класу відносно другої змінної, то f точково розривне. Ґ.Дебс зауважує, що β-несприятливими у грі $\mathcal{J}'(X)$ будуть, зокрема, метризовні берівські простори і довільні добутки як повнометризовних, так і локально компактних просторів, а також, що такі простори утворюють власну частину класу всіх берівських просторів.

Ці результати Й.Мібу і Ґ.Дебса обговорюються і в працях З.Пьотровського [7,8], тільки там при їх формулюванні переплутані умови на x-розрізи і y-розрізи відображення f.

Автори, як і Ґ.Дебс, виходили із задачі про точки неперервності функцій, які неперервні відносно першої змінної і належать до першого класу Бера відносно другої змінної, і спочатку не були поінформовані ні про результати, ні про методи своїх попередників. Нам пощастило відкрити нові методи і отримати теореми, значно загальніші від тих, що були у наших попередників, окрім теореми Дебса, яка з нашими результатами непорівнянна.

2. Нехай X, Y і Z– топологічні простори і $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Нагадаємо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* p_0, якщо для будь-яких околів W, U і V відповідно точок $z_0 = f(p_0), x_0$ і y_0 у відповідних просторах існують точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$, і *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці добутку $X \times Y$.

Для відображення f топологічного простору T в топологічний простір Z символом $C(f)$ ми позначаємо множину його точок неперервності, а символом $D(f)$ – множину його точок розриву. Відображення f називається *точково розривним*, якщо $\overline{C(f)} = T$. Нехай Z – метричний простір і $|z_1 - z_2|$ – відстань між точками z_1 і z_2 в Z. Для відображення $f : T \to Z$, непорожньої множини $E \subseteq T$ і точки $t_0 \in T$ числа $\omega_f(E) = \sup\{|f(t') - f(t'')| : t', t" \in E\}$ і $\omega_{f,t_0}(E) = \sup\{|f(t) - f(t_0)| : t \in E\}$ називаються відповідно *коливанням функції* f *на множині* E і *прив'язаним коливанням функції* f *на множині* E *в точці* t_0. Якщо $\mathcal{U}_{t_0}$ – система всіх околів точки t_0 в T, то число $\omega_f(t_0) = \inf\{\omega_f(U) : U \in \mathcal{U}_{t_0}\}$ – це *коливання функції* f *в точці* t_0, а число $\tilde{\omega}_f(t_0) = \inf\{\omega_{f,t_0}(U) : U \in \mathcal{U}_{t_0}\}$ – це *прив'язане коливання функції* f *у точці* t_0. Зрозуміло, що $\tilde{\omega}_f(t_0) \leq \omega_f(t_0) \leq 2\tilde{\omega}_f(t_0)$. Функція $\omega_f : T \to [0, +\infty]$ є напівнеперервною зверху і для кожного $\varepsilon > 0$ множини $D^\varepsilon(f) = \{t \in T : \omega_f(t) \geq \varepsilon\}$ замкнені в T.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в метричному просторі Z буде горизонтально квазінеперервним у точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ тоді й тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу $U \times V$ точки p_0 в $X \times Y$ існує така точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U \times V$ і такий окіл U_1 точки x_1 в X, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_{f,p_0}(U_1 \times \{y_1\}) < \varepsilon$. Нагадаємо, що множина A в топологічному просторі T називається *залишковою*, якщо її доповнення $T \setminus A$ є множиною першої категорії.

3. Як звичайно, для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ ми пишемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Кажуть, що система $\mathcal{B}$ непорожніх відкритих множин у топологічному просторі Y є *псевдобазою*, якщо для кожної непорожньої відкритої в Y множини V існує така множина $B \in \mathcal{B}$, що $V \supseteq B$.

Будемо говорити, що Y має зліченну псевдобазу, якщо існує псевдобаза в Y, яка не більш ніж зліченна.

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, в якого $D^{2\varepsilon}(f) = X \times Y$, і $0 < \eta < \varepsilon$. Тоді множина $A_\eta = \{x \in X : \omega_{f^x}(y) \geq \eta$ для кожного $y \in Y\}$ є залишковою в X.*

Доведення. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза в Y. Для кожного номера n розглянемо систему $\mathcal{G}_n$ всіх відкритих непорожніх множин G в X, для кожної з яких існують точки $y_1, y_2 \in V_n$, такі, що $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \geq \eta$ для всіх $x \in G$. Доведемо, що відкрита множина $G_n = \bigcup \mathcal{G}_n$ всюди щільна в X. Нехай U – відкрита непорожня множина в просторі X і $p_0 \in U \times V_n$. Покладемо $\delta = \varepsilon - \eta$. Оскільки f горизонтально квазінеперервне у точці p_0, то існують точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U \times V_n$ і відкритий окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_{f,p_0}(U_1 \times \{y_1\}) < \delta/6$. Тоді $\omega_f(U_1 \times \{y_1\}) < \delta/3$. За умовою $\omega_f(p_1) \geq 2\varepsilon$, отже, $\tilde{\omega}_f(p_1) \geq \varepsilon$. Множина $U \times V_n$ є околом точки p_1, отже, $\omega_{f,p_1}(U \times V_n) \geq \varepsilon$. Тому існує така точка $p_2 \in U \times V_n$, що $|f(p_1) - f(p_2)| > \varepsilon - \delta/3$. Але f горизонтально квазінеперервне і в точці p_2. Звідси випливає, що існують точка $y_2 \in V_n$ і відкрита в X непорожня множина G, такі, що $\omega_{f,p_2}(G \times \{y_2\}) < \delta/3$ і $G \subseteq U_1$. Якщо $p' = (x, y_1)$, $p'' = (x, y_2)$ і $x \in G$, то

$$|f(p') - f(p'')| \geq |f(p_1) - f(p_2)| - |f(p') - f(p_1)| -$$
$$|f(p'') - f(p_2)| > \varepsilon - \delta/3 - \delta/3 - \delta/3 =$$
$$= \varepsilon - \delta = \eta.$$

Тому $G \in \mathcal{G}_n$, отже, $G \subseteq U \cap G_n$, звідки отримуємо, що $U \cap G_n \neq \emptyset$, а значить, $\overline{G}_n = X$.

Покладемо $F_n = X \setminus G_n$. Оскільки G_n – відкрита всюди щільна множина, то F_n – замкнена і ніде не щільна. Тому множина $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ залишкова в X, адже її доповнення $X \setminus E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ – це множина першої категорії. Покажемо, що $E \subseteq A_\eta$. Нехай $x \in E$, $y \in Y$ і V – відкритий окіл точки y в Y. Існує такий номер n, що $V_n \subseteq V$. Оскільки $x \in G_n$, то існують такі точки $y_1, y_2 \in V_n$, що $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \geq \eta$. Але $\omega_{f^x}(V) \geq \omega_{f^x}(V_n) \geq |f(x, y_1) - f(x, y_2)|$. Отже, $\omega_{f^x}(V) \geq \eta$, а значить, $\omega_{f^x}(y) \geq \eta$, тобто $x \in A_\eta$. Таким чином, множина A_η залишкова, адже вона містить залишкову множину E.

4. Застосовуючи теорему 1 і теорему Банаха про категорію [9, с. 87], одержуємо наступний результат, з якого легко випливають згадані вище теореми Беґеля, Кемпістого і Мібу. При цьому *берівським ядром* топологічного простору ми називаємо його відкритий залишковий берівський підпростір. Існування берівського ядра в будь-якому топологічному просторі легко випливає з теореми Банаха про категорію.

Теорема 2. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, у якого множина $B = \{x \in X : f^x$ – трохи розривне $\}$ залишкова в X. Тоді множина $C(f)$ залишкова в $X \times Y$, а якщо добуток $X \times Y$ ще й берівський, то f точково розривне.*

Доведення. Нехай S і T– берівські ядра відповідно просторів X, Y і $g = f_{|S \times T}$. Доведемо, що множина $C(g)$ залишкова в $S \times T$. Оскільки $(S \times T) \setminus C(g) = D(g) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D^{\frac{1}{n}}(g)$, то досить довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ множина $D^\varepsilon(g)$ ніде не щільна в $S \times T$. Нехай це не так, тобто при деякому $\varepsilon > 0$ множина $D^\varepsilon(g)$ десь щільна в $S \times T$. Оскільки $D^\varepsilon(g)$ замкнена в $S \times T$, то існують такі відкриті непорожні множини U і V у просторах S і T відповідно, що $U \times V \subseteq D^\varepsilon(g)$. Нехай $h = g_{|U \times V}$ і $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2}$. Зрозуміло, що відображення $h : U \times V \to Z$ горизонтально квазінеперервне, $D^\varepsilon(h) = U \times V$ і V, як відкритий підпростір простору Y, має зліченну псевдобазу. З теореми 1 випливає, що множина $A = \{x \in U : \omega_{h^x}(y) \geq \eta$ для кожного $y \in Y\}$ залишкова в U. Множина $U \bigcap B$ теж залишкова в U, бо U відкрита в X. Тоді і перетин $A \cap B$ буде залишковою в U множиною, а оскільки U – берівський простір, як відкритий підпростір берівського простору S, то $\overline{A \bigcap B} \supseteq U$. Звідси випливає, що $A \bigcap B \neq \emptyset$, адже $U \neq \emptyset$. Візьмемо якусь точку $a \in A \bigcap B$. Оскільки $a \in A$, то $\omega_{h^a}(y) \geq \eta$ для кожного $y \in V$. Але $\omega_{f^a}(y) = \omega_{h^a}(y)$ на V, бо множина V відкрита в Y. Тому $\omega_{f^a}(y) \geq \eta$ на V, отже $V \subseteq D(f^a)$. Але V є множиною другої категорії як відкрита непорожня множина берівського простору T. У такому разі і $D(f^a)$ є множиною другої категорії, а це суперечить тому, що f^a трохи розривне. Ця суперечність показує, що множини $D^\varepsilon(g)$ ніде не щільні в $S \times T$, а $C(g)$ залишкова в $S \times T$, а значить, і в $X \times Y$, бо $S \times T$ залишкова в $X \times Y$. Але $C(f) \supseteq C(g)$, бо $S \times T$ відкрита в $X \times Y$. Тому і множина $C(f)$ залишкова в $X \times Y$.

Нехай Y – топологічний простір і Z – метричний простір. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Z$ називається *кліковим*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ множина $G_\varepsilon(f) = \{y \in Y : \omega_f(y) < \varepsilon\}$ всюди щільна в Y. Зрозуміло, що кожне точково розривне відображення клікове. Якщо простір Y берівський, то правильне й обернене твердження. Крім того, кожне клікове відображення, очевидно, трохи розривне. Отже, теорема 2 поліпшує теорему 3.3.2 з [10].

5. Зараз ми зовсім новим способом одержимо інший варіант узагальнення теореми Беґеля і Кемпістого.

Теорема 3. *Нехай X – топологічний простір, Y – берівський простір, який має зліченну псевдобазу, Z – метризовний простір, $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, яке точково розривне відносно другої змінної і $C^x(f) = \{y \in Y : (x,y) \in C(f)\}$. Тоді множина $A = \{x \in X : \overline{C^x(f)} = Y\}$ – залишкова в X.*

Доведення. Нехай $|\circ - \circ|$ – метрика на Z, яка породжує його топологію і $\{V_j : j \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза в просторі Y. Будемо міркувати від супротивного. Нехай доповнення $B = X \setminus A$ є множиною другої категорії. Для кожного $x \in B$ існує така відкрита в Y непорожня множина W_x, що відображення f розривне в кожній точці множини $\{x\} \times W_x$. Множини $W_{x,k} = \{y \in W_x : \omega_f(x,y) \geq \frac{1}{k}\}$ замкнені в W_x і $W_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} W_{x,k}$. Оскільки W_x є множиною другої категорії в Y, то для кожного $x \in B$ існують такі номери j_x і k_x, що $W_{x,k_x} \supseteq V_{j_x}$. Розглянемо множини $A_{j,k} = \{x \in B : j_x = j \text{ і } k_x = k\}$. Оскільки $B = \bigcup\limits_{j,k=1}^{\infty} A_{j,k}$, то існують такі номери m і n, що $A_{m,n}$ є множиною другої категорії в X.

Нехай $\{V_{m,i} : i \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза відкритого підпростору V_m простору Y. Розглянемо множини $B_i = \{x \in A_{m,n} : \omega_f(\{x\} \times V_{m,i}) < \frac{1}{5n}\}$. Оскільки для кожного $x \in X$ відображення $f^x : Y \to Z$ точково розривне, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = A_{m,n}$. Тому існує такий номер l, що B_l є множиною другої категорії в X, а значить, і щільною в деякій відкритій в X непорожній множині G.

Нехай $V = V_{m,l}$. Візьмемо довільну точку $p_0 \in G \times V$. З горизонтальної квазінеперервності відображення f у точці p_0 випливає, що існують точка $b \in V$ і непорожня відкрита в X множина U, такі, що $U \subseteq G$ і $\omega_{f,p_0}(U \times \{b\}) < \frac{1}{12n}$. Тоді $\omega_f(U \times \{b\}) < \frac{1}{6n}$.

Тепер покажемо, що $\omega_f(U \times V) < \frac{1}{n}$. Нехай $p_1, p_2 \in U \times V$. Оскільки f горизонтально квазінеперервне в точці p_i, то існує точка $b_i \in V$ і відкрита непорожня множина U_i в X, такі, що $U_i \subseteq U$ і $\omega_{f,p_i}(U_i \times \{b_i\}) < \frac{1}{5n}$ при $i = 1,2$. Для кожного $i \in \{1,2\}$ множини $U_i \cap B_l$ непорожні, адже $G \subseteq \overline{B_l}$, тому можна вибрати точки $a_i \in U_i \cap B_l$. Розглянемо при $i \in \{1,2\}$ точки $q_i = (a_i, b)$ і $q_i' = (a_i, b_i)$. Оскільки $a_i \in B_l$ і $b, b_1, b_2 \in V$, то $|f(q_i) - f(q_i')| < \frac{1}{5n}$ при $i \in \{1,2\}$.

Крім того, $|f(q_1) - f(q_2)| < \frac{1}{6n}$, бо $q_i \in U \times \{b\}$ при $i \in \{1,2\}$. Тому

$$|f(p_1)-f(p_2)| \leq |f(p_1)-f(q_1')|+|f(q_1')-f(q_1)|+$$

$$+|f(q_1)-f(q_2)|+|f(q_2)-f(q_2')|+|f(q_2')-f(p_2)| <$$

$$< \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{6n} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} = \frac{29}{30n}.$$

Отже, $\omega_f(U \times V) \leq \frac{29}{30n} < \frac{1}{n}$. Оскільки множина $U \times V$ відкрита, то $\omega_f(p) < \frac{1}{n}$ для кожної точки $p \in U \times V$. З другого боку, $V \subseteq \overline{B_l}$, отже, існує точка $a \in U \times B_l$. За побудовою $V = V_{m,l} \subseteq V_m \subseteq W_{a,n}$ і тому $\omega_f(p) \geq \frac{1}{n}$, як тільки $p \in \{a\} \times V$. Оскільки $\{a\} \times V \subseteq U \times V$, то ми одержали суперечність, яка й показує, що множина A залишкова в X.

Якщо X – берівський простір, то A буде всюди щільною в X. Тоді множина $E = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} \times C^x(f)$ буде всюди щільною в $X \times Y$. Але $E \subseteq C(f)$, отже, $\overline{C(f)} = X \times Y$.

6. Нам буде потрібний один результат про беровість добутку двох берівських просторів, який випливає з однієї теореми з огляду Р.Гаворза і Р.Мак-Коя [11, с.56]. Щоб бути незалежними, подамо наше доведення цього результату.

Теорема 4. *Нехай X і Y – берівські простори і Y має зліченну псевдобазу. Тоді й добуток $P = X \times Y$ берівський.*

Доведення. Нехай простір P подано у вигляді об'єднання послідовності замкнених множин F_m і $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathrm{int} F_m$. Нам досить установити, що множина G всюди щільна в P. Фактично достатньо довести, що $G \neq \emptyset$. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – зліченна псевдобаза в просторі Y. Для довільного $x \in X$ множини $F_m^x = \{y \in Y : (x,y) \in F_m\}$ замкнені в просторі Y і $Y = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^x$. Оскільки Y берівський, то хоча б одна з множин F_m^x має непорожню внутрішність, а тоді існує таке n, що $V_n \subseteq F_m^x$. У такому разі множини $A_{m,n} = \{x \in X : V_n \subseteq F_m^x\}$ в об'єднанні дають весь простір X, отже, оскільки X берівський, існують номери m, n і відкрита непорожня множина U в X, такі, що $U \subseteq \overline{A_{m,n}}$. Покладемо $A = U \bigcap A_{m,n}$ і $V = V_n$. За побудовою $A \times V \subseteq F_m$, причому $U \subseteq \overline{A}$, оскільки U відкрита. Тому $U \times V \subseteq \overline{A} \times \overline{V} = \overline{A \times V} \subseteq \overline{F_m} = F_m$, отже, $U \times V \subseteq \mathrm{int} F_m$ і, таким чином, $G \neq \emptyset$.

7. Зараз ми покажемо, що теорему 3 можна вивести і з теорем 2 і 4. Для цього нам буде потрібно наступне твердження, яке уточнює один результат Куратовського і Улама [9, с.255]

Теорема 5. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому Y має зліченну псевдобазу і E – залишкова множина в добутку $P = X \times Y$. Тоді множина $A = \{x \in X : E^x$ — залишкова в $Y\}$ є залишковою в X.*

Доведення. Існує така послідовність замкнених ніде не щільних множин F_m в P, що $F = P \setminus E \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. Припустимо, що множина A не залишкова в X. Тоді множина $B = \{x \in X : F^x$ – множина другої категорії в $Y\}$ є множиною другої категорії в X. Нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза в Y і $x \in B$. Оскільки $F^x \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^x$, множини F_m^x замкнені в Y і F^x – множина другої категорії, то $\mathrm{int} F_m^x \neq \emptyset$ для деякого m, отже, існує таке n, що $V_n \subseteq F_m^x$. Таким чином, для множин $B_{m,n} = \{x \in B : V_n \subseteq F_m^x\}$ маємо $B = \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n}$. Оскільки B є множиною другої категорії, то існують номери m і n, такі, що $B_{m,n}$ є множиною другої категорії. У такому разі $B_{m,n}$ десь щільна в X, тобто відкрита множина $U = \mathrm{int}\overline{B_{m,n}} \neq \emptyset$. Покладемо $S = U \bigcap B_{m,n}$ і $V = V_n$. Зрозуміло, що $\overline{S} \supseteq U$ і $S \times V \subseteq F_m$. Тоді $U \times V \subseteq \overline{S} \times \overline{V} = \overline{S \times V} \subseteq \overline{F}_m = F_m$, отже, $\mathrm{int} F_m \neq \emptyset$, що приводить до суперечності.

Нехай простори X, Y і Z, відображення $f : X \times Y \to Z$ і множина A такі ж, як у теоремі 3. Тоді за теоремою 2 множина $E = C(f)$ залишкова в добутку $X \times Y$. Отже, згідно з теоремою 5 множина A_0 всіх тих $x \in X$, для яких $E^x = C^x(f)$ залишкова в Y, сама є залишковою в X. Якщо $x \in A_0$, то E^x залишкова в берівському просторі Y, отже, $\overline{E^x} = Y$. Тому $A_0 \subseteq A$ і A є залишковою в X.

8. Використовуючи результати про квазінеперервність відображень багатьох змінних [12,13], можна довести теорему, яка є далеким розвитком згаданої у вступі теореми

Гана.

Теорема 6. *Нехай $X_1, ..., X_n$ і Y – топологічні простори, причому Y має зліченну псевдобазу, $X = X_1 \times ... \times X_n$ – топологічний добуток перших n просторів, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, для якого множина B тих $x \in X$, що для них відображення $f^x : Y \to Z$ трохи розривне, залишкова в X. Тоді множина $C(f)$ буде залишковою в $X \times Y$ при виконанні однієї з наступних умов:*

(i) простори $X_2, ..., X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності і для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to Z$ нарізно неперервне;

(ii) простори $X_1, ..., X_n$ регулярні й сильно зліченно повні і для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to Z$ нарізно неперервне;

(iii) простори $X_2, ..., X_n$ задовольняють другу аксіому зліченності і для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to Z$ нарізно квазінеперервне.

Доведення. (i) Нехай S – берівське ядро простору X і $g = f_{|S \times Y}$. Зафіксуємо якесь $y \in Y$ і доведемо, що відображення $g_y : S \to Z$ квазінеперервне. Нехай $a = (a_1, ..., a_n) \in S$ і U_k для кожного $k \in \{1, 2, ..., n\}$ — відкритий окіл точки a_k в X_k, такий, що $U = U_1 \times ... \times U_n \subseteq S$. Оскільки множина U відкрита в S, то вона буде утворювати берівський простір в індукованій топології, а тоді й добуток $U_1 \times ... \times U_{n-1}$ буде берівським. Крім того, підпростори $U_2, ..., U_n$ задовольняють першу аксіому зліченності. Тому звуження $h = g_{y|U}$ квазінеперервне [12], а тоді і g_y буде квазінеперервним в точці a, бо множина U відкрита. Далі множина $B \cap S$ буде залишковою в S, адже вона залишкова в X і лежить у відкритій в X множині S. Тому згідно з теоремою 2 множина $C(g)$ залишкова в $S \times Y$, а значить, і в $X \times Y$. Але $C(f) \supseteq C(g)$, отже, і $C(f)$ залишкова в $X \times Y$.

(ii) У даному випадку згідно з [13] для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to Z$ буде квазінеперервним, отже, твердження негайно випливає з теореми 2.

(iii) Доведення проводиться так само, як і в першому випадку.

Зауважимо, що умову (iii) попередньої теореми можна дещо послабити, вимагаючи, щоб простори $X_2, \ldots, X_n$ мали лише зліченну псевдобазу і f_y належали ширшому класу $K_n^w(X, Z)$ [10, теорема 3.6.6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bögel K.* Über partiell differenzierbare Funktionen // Math. Z.— 1926.— **25**.— S.490—498.
2. *Kempisty S.* Sur les functions quasicontinues // Fund. Math.— 1932.— **19**.— P.184—197.
3. *Hahn H.* Reelle Funktionen. 1. Teil. Punktfunktionen.— Leipzig: Academische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932.— 416 S.
4. *Mibu Y.* On quasi-continuous mappings defined on product spaces // Proc. Japan Acad.— 1958.— **192**.— P.189—192.
5. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch.— 1988—1989.— **14**, N3.— P.259—306.
6. *Debs G.* Fonctions séparément continues et de première classe sur un espace produit // Math. Scand.— 1986.— **59**.— P.122—130.
7. *Piotrowski Z.* Miby-type theorems // Classical Analisis. Proc. Intern. Conf. WSI, Random.— 1994.— P.133—139.
8. *Piotrowski Z.* On the teorems of Y.Mibu and G.Debs on separate continuity // Internat. G. Math. & Math. Sci.— 1996.— **19**, N3.— P.495—500.
9. *Куратовский К.* Топология. Т. 1.— М.: Мир, 1966.— 594 с.
10. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук.— Чернівці, 1999.— 345 с.
11. *Haworth R.C., McCoy R.A.* Baire spaces // Dis. Math.— 1977.— **141**.— P.1—77.
12. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Math. Acad. Sinica.— 1976.— **4**, N2.— P.191—203.
13. *Hansell G., Troallic J.-P.* Quasicontinuity and Namioka theorem // Topology Appl.— 1992.— **46**, N 3.— P.135—149.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.2000