УДК 517.53

©2001 р. **Н.Є.Лінчук, С.С.Лінчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ВІДНОСНО ОПЕРАТОРА ПОММ'Є

Одержано критерій еквівалентності загального оператора Помм'є першого порядку до оператора Помм'є в просторі функцій, аналітичних у довільних областях.

The criterion of equivalence of a common Pomme operator of the first order and Pomme operator in space of functions, analytical in arbitrary areas is obtained.

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $H(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. У випадку $G = \{z : |z| < R\}$ відповідний простір $H(G)$ позначатимемо через A_R. Нехай $\mathcal{L}(H(G))$ – множина всіх лінійних неперервних операторів, які діють у просторі $H(G)$. Питання еквівалентності загальних диференціальних операторів довільного порядку відносно звичайного диференціювання, старші коефіцієнти яких дорівнюють одиниці, в просторах аналітичних функцій досліджені досить повно (див., наприклад, історичні довідки та бібліографію в [1]). Ці ж задачі для диференціальних операторів відносно узагальненого диференціювання вивчені значно менше. Модельним представником узагальненого диференціювання є оператор Помм'є Δ, який неперервно діє в $H(G)$, де G – довільна область комплексної площини, яка містить точку 0, за правилом: $(\Delta f)(z) = (f(z) - f(0))/z$.

У роботі [2] було показано, що в просторах A_R $(0 < R \leq \infty)$ оператор $\Delta + \varphi(z)E$ (тут $\varphi \in A_R$, а E – тотожний оператор в A_R) еквівалентний до Δ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(z) \equiv 0$. В [1] були одержані необхідні й достатні умови еквівалентності операторів n-го порядку відносно оператора Помм'є до Δ^n у просторі A_R, $0 < R < \infty$, а в [3] – у просторі A_∞. Зауважимо, що в усіх цих дослідженнях істотно використовувалася специфіка просторів A_R, а саме: можливість розкладу довільної функції з A_R у ряд за степенями незалежної змінної. Тому природно виникає задача про знаходження необхідних та достатніх умов еквівалентності вказаних операторів у просторах $H(G)$, де G – довільна область комплексної площини, яка містить точку 0. У даній статті ця задача повністю розв'язана для $n = 1$. В процесі її розв'язування ефективно використовується інтегральне зображення Кете [4] операторів з класу $\mathcal{L}(H(G))$.

Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить точку 0. Для фіксованих функцій φ та ψ з $H(G)$ через L позначимо оператор, який лінійно і неперервно діє в $H(G)$ за правилом

$$(Lf)(z) = \varphi(z)(\Delta f)(z) + \psi(z)f(z), \qquad (1)$$

і дослідимо умови еквівалентності в $H(G)$ оператора L до Δ.

Лема 1. *Якщо оператори L та Δ еквівалентні в $H(G)$, то функція $\varphi(z)/(\varphi(z) + z\psi(z))$ аналітична в області G.*

Доведення. Ядро оператора Δ в просторі $H(G)$ є одновимірним підпростором цього простору. Відомо, що кратності нулів еквівалентних операторів збігаються. Тому якщо L еквівалентний до Δ, то ядро L також одновимірне. Опишемо ядро L. Якщо $Lf(z) = 0$, то $f(z)(\varphi(z) + z\psi(z)) = C\varphi(z)$ при $z \in G$, де C — деяка стала. Тому для того, щоб ядро L було одновимірним, необхідно, щоб кожен нуль з G певної кратності функції $\varphi(z) + z\psi(z)$ був нулем не меншої кратності для $\varphi(z)$. Значить, всі можливі особливості в G функції $\varphi(z)/(\varphi(z)+z\psi(z))$ усувні й ця функція аналітична в G.

Лема 2. *Нехай G – довільна область комплексної площини і g – аналітична в G функція, для якої $g(G) \subset G$. Для того, щоб оператор композиції K_g, який діє в $H(G)$ за правилом $(K_g f)(z) = (f \circ g)(z)$, був ізоморфізмом простору $H(G)$, необхідно і досить, щоб функція $g(z)$ здійснювала конформне відображення області G на себе.*

Доведення. Необхідність. Легко бачити, що $K_g U_z = U_g K_g$, де U_z та U_g – це оператори множення відповідно на функції z та $g(z)$. Тому якщо K_g є ізоморфізмом простору $H(G)$, то оператори U_z та U_g є еквівалентними в $H(G)$ і за твердженням 2 з [5] функція $g(z)$ конформно відображає область G на себе.

Достатність. Якщо g є конформним автоморфізмом області G, то оберненим до K_g є оператор $K_g^{-1}, (K_g^{-1}f)(z) = (f \circ g^{-1})(z)$.

Теорема. *Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить точку 0, а $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ – довільні функції з $H(G)$. Для того, щоб оператори L та Δ були еквівалентними в просторі $H(G)$, необхідно і досить, щоб:*

а) функції $\varphi(z)$ та $\varphi(z)+z\psi(z)$ не мали нулів в області G;

б) функція $g(z)$ $=z/(\varphi(z)+z\psi(z))$ здійснювала конформне відображення області G на себе.

Доведення. Необхідність. Припустимо що оператори L та Δ є еквівалентними в просторі $H(G)$. Тоді існує ізоморфізм T простору $H(G)$, для якого

$$LT = T\Delta. \tag{2}$$

Нехай $t(\lambda, z) = T[\frac{1}{\lambda - z}]$ – характеристична за Кете функція оператора T [4]. Подіявши обома частинами (2) на функцію $\frac{1}{\lambda - z}$, одержимо [4,5], що на множині $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{C}\overline{G_{N(n)}}) \times G_n$ виконується рівність

$$(\lambda(\varphi(z)+z\psi(z)) - z)t(\lambda, z) = \lambda c(\lambda)\varphi(z), \tag{3}$$

де $c(\lambda) = t(\lambda, 0)$ – деяка функція, яка є аналітичною на множині $\mathcal{C}G$.

Для доведення твердження а) з урахуванням леми 1 досить показати, що функція $\varphi(z)$ не має нулів в G. Припустимо спочатку, що $\varphi(z_0) = 0$, де $z_0 \in G$, причому $z_0 \neq 0$. Тоді, покладаючи в (3) $z = z_0$, одержимо, що $t(\lambda, z_0) = 0$. Використаємо далі формулу відновлення дії оператора T на довільну функцію $f \in H(G)$:

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_z} t(\lambda, z) f(\lambda) d\lambda, \tag{4}$$

де $z \in G$, а γ_z – контур або система контурів, що вибирається для точки z за означенням локально аналітичної на множині $\mathcal{C}G \times G$ функції $t(\lambda, z)$ [4]. Оскільки $t(\lambda, z_0) = 0$, то $(Tf)(z_0) = 0$ для довільної функції $f \in H(G)$ і оператор T не може бути ізоморфізмом простору $H(G)$.

Нехай тепер $\varphi(0) = 0$. Тоді $\varphi(z) = z\varphi_1(z)$, де $\varphi_1(z)$ - деяка функція з простору $H(G)$, і з (3) одержуємо, що на множині F виконується рівність

$$(\lambda(\varphi_1(z)+\psi(z)) - 1)t(\lambda, z) = \lambda c(\lambda)\varphi_1(z). \tag{5}$$

Якщо б $\varphi_1(0) = 0$, то з (5) аналогічно попередньому одержали б, що $(Tf)(0) = 0$ для кожної функції f з простору $H(G)$, а це неможливо. Тому $\varphi_1(0) \neq 0$, отже, $\varphi_1(z) \neq 0$ при $z \in G$. Тоді з леми 1 одержуємо, що $\varphi_1(z) + \psi(z) \neq 0$ при $z \in G$. Запишемо (5) у вигляді

$$(\lambda - \frac{1}{\varphi_1(z)+\psi(z)})t(\lambda, z) = \frac{\lambda c(\lambda)\varphi_1(z)}{\varphi_1(z)+\psi(z)} \tag{6}$$

і покажемо, що функція $g_1(z) = \frac{1}{\varphi_1(z)+\psi(z)}$ відображає область G в себе. Доведемо цей факт методом від супротивного. Нехай для деякої точки $z_1 \in G : \lambda_1 = g_1(z_1) \notin G$. За означенням локально аналітичної на множині $\mathcal{C}G \times G$ функції [4] існує натуральне число n таке, що $z_1 \in G^{(n)}, \lambda_1 \in \mathcal{C}\overline{G}^{N(n)}$ і на множині $\mathcal{C}\overline{G}^{N(n)} \times G^{(n)}$ виконується рівність (6). Зафіксуємо довільний окіл V точки λ_1, який міститься в $\mathcal{C}\overline{G}^{N(n)}$, і знайдемо для нього окіл U точки z_1, який міститься в $G^{(n)}$ і для якого $g_1(U)$ міститься у V. Покажемо, далі, що функція $g_1(z)$ не збігається зі сталою. Дійсно, якби $g_1(z) \equiv$const, то з формул (4) і (6) одержали б, що $Tf(z) = \varphi_1(z)\Lambda(f)$, де Λ – деякий лінійний неперервний функціонал на $H(G)$. А одновимірний оператор не може бути ізоморфізмом простору $H(G)$. Тому $g_1(z)$ не є сталою і за принципом збереження області при відображенні за допомогою аналітичних функцій множина $g_1(U)$ є деякою областю, яка лежить в $\mathcal{C}\overline{G}^{N(n)}$. Тоді з (6) випливає, що $c(\lambda) = 0$ при $\lambda \in g_1(U)$, і за теоремою єдиності для аналітичних функцій одержуємо, що $c(\lambda) \equiv 0$. Тому, згідно з (6), $t(\lambda, z) \equiv 0$ і, отже, $T = 0$, що неможливо. Таким чином, функція $g_1(z)$ дійсно відображає область G в себе і оператор композиції $K_{g_1}f(z) = (f \circ g_1)(z)$ лінійно і неперервно діє в просторі $H(G)$.

Оскільки $c(\lambda) \in H(\mathcal{C}G)$ і $c(\infty) = 0$, то існує лінійний неперервний на $H(G)$ функціонал Λ, для якого функція $c(\lambda)$ є характеристичною, тобто $c(\lambda) = \Lambda[\dfrac{1}{\lambda - z}]$ [4]. Тоді формулою $T_1f(z) = \Lambda[\dfrac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z - \zeta}]$ визначається оператор T_1, який лінійно і неперервно діє в просторі $H(G)$. Покладемо $h_1(z) = \varphi_1(z)/(\varphi_1(z) + \psi(z))$. Оскільки $h_1 \in H(G)$, то оператор U_{h_1} множення на $h_1(z)$ також належить до $\mathcal{L}(H(G))$. Розглянемо далі оператор $\tilde{T} = U_{h_1}K_{g_1}T_1$. Зрозуміло, що $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H(G))$. Безпосереднім обчисленням переконуємося в тому, що характеристична функція оператора $\tilde{T}$ збігається з функцією $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (6), тобто з характеристичною функцією оператора T. Отже,

$$T = U_{h_1}K_{g_1}T_1. \tag{7}$$

За припущенням оператор T є ізоморфізмом простору $H(G)$. Оскільки $h_1 \in H(G)$ і $h_1(z) \neq 0$ при $z \in G$, то U_{h_1} – також ізоморфізм $H(G)$. Покажемо, що T_1 є ізоморфізмом простору $H(G)$. Оскільки T – ізоморфізм $H(G)$, то оператор T_1 ін'єктивний. Але $T_1[\dfrac{1}{\lambda - z}] = \dfrac{\lambda c(\lambda)}{\lambda - z}, \lambda \in \mathcal{C}G$. Тому функція $\lambda c(\lambda)$ не перетворюється в нуль на множині $\mathcal{C}G$ [6]. Таким чином, оператор T_1 є також ізоморфізмом $H(G)$ [6]. Тому з рівності (7) одержуємо, що оператор K_{g_1} ізоморфно відображає $H(G)$ на себе. За лемою 2 звідси випливає, що функція $g_1(z) = \dfrac{1}{\varphi_1(z) + \psi(z)}$ здійснює конформне відображення області G на себе. Але це неможливо, бо з одного боку $0 \in G$, а з іншого – $g_1(z) \neq 0$ при $z \in G$. Отже, припущення $\varphi(0) = 0$ приводить також до суперечності і твердження а) виконується.

Доведемо тепер необхідність умови б). Оскільки а) справджується, то запишемо (3) у вигляді $(\lambda - z/(\varphi(z) + z\psi(z)))t(\lambda, z) = \lambda c(\lambda)\varphi(z)/(\varphi(z) + z\psi(z))$.

Цілком аналогічно, як і при доведенні необхідності а), переконуємося в тому, що функція $g(z) = \dfrac{z}{\varphi(z) + z\psi(z)}$ відображає область G в себе, і тому

$$T = U_hK_gT_1, \tag{8}$$

де $h(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z)+z\psi(z)}$, а оператор T_1 той самий, що і раніше. Оскільки T — ізоморфізм, то з (8) одержуємо, що оператор композиції K_g є також ізоморфізмом $H(G)$, а тоді за лемою 2 функція $g(z)$ конформно відображає область G на себе. Необхідність умов теореми доведено.

Достатність. Нехай умови а) та б) виконуються. Розглянемо оператор T, який діє в $H(G)$ за правилом $T = U_hK_g$, де $h(z) = \varphi(z)/(\varphi(z) + z\psi(z))$. З а) та б) випливає, що оператори U_h та K_g є ізоморфізмами простору $H(G)$, а тому T є також ізоморфізмом $H(G)$. Для довільної функції $f \in H(G)$ при $z \in G$ маємо

$$(LTf)(z) = \varphi(z)\frac{(Tf)(z) - (Tf)(0)}{z}$$

$$+\psi(z)(Tf)(z) = \varphi(z)\frac{h(z)f(g(z)) - f(0)}{z} +$$

$$+\psi(z)h(z)f(g(z)) = h(z)\frac{f(g(z)) - f(0)}{g(z)} =$$

$$= (T\Delta f)(z),$$

а тому L є дійсно еквівалентним до оператора Δ.

Застосуємо доведену теорему до встановлення еквівалентності вказаних операторів у просторах аналітичних функцій $H(G)$ для деяких конкретних областей G. Для цього в кожному випадку потрібно мати зручний опис конформних автоморфізмів області G, які зберігають нерухомим початок координат. Якщо $G = \{z : |z| < R\}, 0 < R < \infty$, то загальний вигляд указаних автоморфізмів дається формулою $g(z) = az$, де $a \in \mathbb{C}$, причому $|a| = 1$. Отже, правильне таке твердження.

Наслідок 1. *Для того, щоб оператори L та Δ були еквівалентними в просторі $A_R, 0 < R < \infty$, необхідно й досить, щоб $\varphi(z) \neq 0$ при $|z| < R$ і $\varphi(z) + z\psi(z) = c$ при $|z| < R$, де c – деяка стала, причому $|c| = 1$.*

Зокрема, якщо $\varphi(z) \equiv 1$, то оператори L та Δ будуть еквівалентними в A_R тоді й тільки тоді, коли $\psi(z) \equiv 0$ при $|z| < R$, тобто коли L та Δ збігаються. Це твердження раніше було доведене іншим методом у [2]. Якщо ж $\psi(z) \equiv 0$ при $|z| < R$, то L та Δ – еквівалентні в A_R тоді й тільки тоді, коли $\varphi(z) \equiv c$, де $|c| = 1$. Цей факт іншим методом був доведений в [1].

Наслідок 2. *Для того, щоб оператори L та Δ були еквівалентними в просторі A_∞, необхідно й досить, щоб $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in \mathbf{C}$ і $\varphi(z) + z\psi(z) \equiv c$ при $z \in \mathbf{C}$, де c – деяка стала, причому $c \neq 0$.*

Це твердження цікаво порівняти з основним результатом роботи [3].

Наслідок 3. *Нехай $G = \{z : Imz > -1\}$. Для того, щоб оператори L та Δ були еквівалентними в $H(G)$, необхідно й досить, щоб $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in G$ і $\varphi(z) + z\psi(z) = (-b(z+i)+a)/(a+bi)$ при $z \in G$, де a та b — деякі дійсні сталі, які одночасно не дорівнюють нулеві.*

Для доведення наслідку 3 досить скористатися тим, що загальний вигляд конформного відображення верхньої півплощини $\{z : Rez > 0\}$ на себе дається формулою $w = (az+b)/(cz+d)$, де $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, причому $ad - bc > 0$ [7]. Тому загальний вигляд конформного відображення області $\{z : Rez > -1\}$ на себе, яке зберігає нерухомим початок координат, визначається формулою $w = ((a+bi)z)/(-b(z+i)+a)$, де $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, причому $a^2 + b^2 \neq 0$. Залишається скористатися теоремою.

Перелік подібних прикладів можна за бажанням продовжити. Обмежимося лише одним твердженням загального порядку.

Наслідок 4. *Нехай G – однозв'язна область комплексної площини, яка містить початок координат і межа якої містить більше однієї точки. Для того, щоб оператори L та Δ були еквівалентними в $H(G)$, необхідно й досить, щоб $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in G$ та існувала стала c, модуль якої дорівнює одиниці і для якої $z/(\varphi(z) + z\psi(z)) = g^{-1}(cg(z)), z \in G$, де $g(z)$ - деяке конформне відображення області G на одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$, для якого $g(0) = 0$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Линчук С.С., Нагнибида Н.И.* Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций// Сиб. мат. журн.— 1990.— **31**, N3.— С. 55—61.

2. *Линчук С.С.* О представлении линейных непрерывних операторов, действующих в пространствах аналитических функций.— М., 1982.— 37 с.— Деп. в ВИНИТИ, N 1798.

3. *Нагнибида Н.И.* Об условиях полноты одной системы целых функций и их применении к операторам Поммье // Мат.заметки.— 1991.— **49**, вып.1.— С.154—156.

4.*Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie// J. reine und angew. Math.— 1953.— **191**.— S.30—49.

5. *Линчук Н.Е.,Линчук С.С.* Об одном классе операторных уравнений в аналитических пространствах // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, N4.— С.510—515.

6. *Линчук Н.Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения//Мат. заметки.— 1988.— **6**, вып.44.— С.794—802.

7. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного.– М. Наука, 1967.— 444 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.2000