УДК 517.956.4

©2001 р. О.С. Кондур

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ НОРМАЛЬНОЇ НЕЛОКАЛЬНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для нелокальної параболічної задачі з однорідними нормальними крайовими умовами охарактеризовано клас розв'язків, які зображуються інтегралами Пуассона елементів L_p-просторів та скінченних узагальнених борельових мір.

The class of solutions of non-local parabolic problem with homogeneous normal boundary conditions is characterized. These solutions are represented in the form of Poisson integrals of elements from L_p-spaces and finite generalized Borel measures.

Клас важливих для застосування нелокальних крайових задач визначили А.В.Біцадзе та О.А.Самарський. Вони перші поширили теорію крайових задач на випадок нелокальних крайових умов. Загальні еліптичні задачі з такими умовами вивчали Я.А.Ройтберг і З.Г.Шефтель [1], а загальні параболічні та деякі еліптичні задачі — С.Д.Ейдельман, М.В.Житарашу, А.П.Дубровська [2—5].

У цій статті вивчаються властивості визначених в обмеженій циліндричній області розв'язків нелокальної параболічної крайової задачі з однорідними нормальними крайовими умовами. Встановлюються необхідні та достатні умови, за яких ці розв'язки зображуються у вигляді інтегралів Пуассона елементів L_p-просторів та просторів скінченних узагальнених борельових мір. За цих умов дані простори є множинами початкових значень досліджуваних розв'язків. Аналогічні результати раніше одержані в [6] для нормальної параболічної задачі спряження, яка формально є частинним випадком нормальної нелокальної параболічної крайової задачі.

1. Нехай n, b — задані натуральні числа; $q \equiv 2b/(2b-1)$; T — задане додатне число; Ω — обмежена область з простору $\mathbb{R}^n$, розділена гіперповерхнею $S^1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ на дві підобласті Ω^1 і Ω^2; S — межа Ω, $S \cap S^1 = \emptyset$; $Q^i \equiv (0,T] \times \Omega^i$, $i \in \{1,2\}$, $Q \equiv (0,T] \times \Omega$, $\bar{Q} \equiv (0,T] \times \bar{\Omega}$, $\bar{\bar{Q}} \equiv [0,T] \times \bar{\Omega}$ — циліндричні області в $\mathbb{R}^{n+1}$; $\Gamma^1 \equiv (0,T] \times S^1$, $\Gamma \equiv (0,T] \times S$ — бічні межі циліндрів Q^1 і Q; f^i — звуження функції f на i-ту підобласть; $\gamma : S \ni x \mapsto y \equiv \gamma(x) \in S^1$ — дифеоморфізм, причому $\gamma \in C^\infty$ і $y \in S^1_\varepsilon$, якщо $x \in S_\varepsilon$, де S^1_ε і S_ε — ε-околи поверхонь відповідно S^1 і S; J — транспонована матриця Якобі перетворення γ^{-1}; $|k| \equiv k_1 + ... + k_n$, якщо $k \equiv (k_1, ..., k_n)$ — мультиіндекс; $E_c(t,z) \equiv \exp\{-ct^{1-q}z^q\}$, $c > 0$, $t > 0$, $z \in \mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел.

Розглянемо в $\bar{\bar{Q}}$ таку нелокальну крайову задачу:

$$A^{(i)}(t,x,\partial_t,\partial_x)u^i(t,x) \equiv$$
$$\equiv \left(\partial_t^1 - \sum_{|k| \le 2b} a_k^i(t,x)\partial_x^k\right) u^i(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in Q^i, \quad i \in \{1,2\}, \tag{1}$$
$$(B_j^{(1)}(t,\gamma(x),J\partial_x)u^1(t,\gamma(x)) +$$
$$+B_j^{(2)}(t,\gamma(x),J\partial_x)u^2(t,\gamma(x)) +$$
$$+B_j^{(3)}(t,x,\partial_x)u^2(t,x))|_\Gamma = 0,$$
$$j \in \{1,...,b\}, \tag{2}$$
$$u^i(t,x)|_{t=0} = \varphi^{(i)}(x),\ x \in \Omega^i,\ i \in \{1,2\}, \tag{3}$$

де $a_k^i : \bar{Q}^i \to \mathbb{C}$, $|k| \le 2b$, $u^i : Q^i \to \mathbb{C}$, $\varphi^{(i)} : \bar{\Omega}^i \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2\}$; порядки r_j лінійних диференціальних виразів $B_j^{(s)}, j \in \{1,...,b\}$, $s \in \{1,2,3\}$, не перевищують $2b-1$.

Припускатимемо виконаними наступні умови.

А. Задача (1)—(3) є нелокальною параболічною крайовою задачею, тобто вирази $A^{(i)}, i \in \{1,2\}$, рівномірно параболічні за Петровським [7], а вирази $B_j^{(s)}, j \in \{1,...,b\}, s \in \{1,2,3\}$, задовольняють нелокальну умову доповняльності [2,3].

Б. Коефіцієнти диференціальних виразів $A^{(i)}, B_j^{(i)}$ і $B_j^{(3)}$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,...,b\}$, належать відповідно до просторів $H^{l+\alpha}(Q^i)$, $H^{2b-r_j+l+\alpha}(\Gamma^1)$ і $H^{2b-r_j+l+\alpha}(\Gamma)$, а межі S і S^1 — до класу $C^{2b+l+\alpha}$, де $l \geq 2b$, $\alpha \in (0,1)$. Дані простори і клас визначені в [8].

В. Матриця $(B_j^{(s)})_{j=1,...,b}^{s=1,2,3}$ нормальна [1,5].

У [5] доведено, що за умов А і Б існує функція Гріна (ФГ) $G \equiv (G_i^j, i \in \{1,2\}, j \in \{1,2\})$, причому справджуються нерівності

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k\partial_\tau^{\nu_0}\partial_\xi^\nu G_i^j(t,x;\tau,\xi)| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-\dfrac{n+2b(k_0+\nu_0)+|k|+|\nu|}{2b}} \times$$

$$\times E_c(t-\tau,|x-\xi|),\ 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$x \in \Omega^i,\ \xi \in \Omega^j, 2bk_0+|k| \leq 2b,$$

$$2b\nu_0+|\nu| \leq 2b,\ i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2\}, \qquad (4)$$

де C, c — додатні сталі. Якщо функції $\varphi^{(i)} : \Omega^i \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2\}$, неперервні та обмежені, то функція u з

$$u^i(t,x) \equiv \sum_{j=1}^2 \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t,x;0,\xi)\varphi^j(\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in Q^i,\ i \in \{1,2\},$$

є розв'язком задачі (1)—(3).

Виконання умови В, поряд з умовами А і Б, дозволяє поставити спряжену із задачею (1)—(3) задачу та записати таку формулу Гріна [5]:

$$\sum_{j=1}^2 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{\Omega^j} A^{(j)}u^j(t,x)\overline{v^j(t,x)}dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega^j} u^j(t_0,x)\overline{v^j(t_0,x)}dx \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^b \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S B_s u(t,x)\overline{C_s^* v(t,x)}dx =$$

$$= \sum_{j=1}^2 \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{\Omega^j} u^j(t,x)\overline{A^{(j)*}v^j(t,x)}dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega^j} u^j(t_1,x)\overline{v^j(t_1,x)}dx \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^b \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S C_s u(t,x)\overline{B_s^* v(t,x)}dx, \qquad (5)$$

де $A^{(j)*}$ — вираз, спряжений у розумінні Лагранжа з виразом $A^{(j)}$, $j \in \{1,2\}$, C_s, C_s^*, B_s^* — визначені на Γ диференціальні вирази відповідно порядків m_s, m_s^*, r_s^*, причому $r_s + m_s^* = m_s + r_s^* = 2b-1$; $u, v : \overline{\overline{Q}} \to \mathbb{C}$ — функції з відповідною гладкістю.

Тут і далі риска над виразом означає перехід у ньому до комплексного спряження.

Для спряженої задачі існує ФГ $G^* \equiv (G_i^{j*}, i \in \{1,2\}, j \in \{1,2\})$ і є правильними оцінки

$$|\partial_\tau^{k_0}\partial_\xi^k G_i^{j*}(\tau,\xi;t,x)| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-(n+2bk_0+|k|)/(2b)} \times$$

$$\times E_c(t-\tau,|x-\xi|),\ 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$\xi \in \Omega^i, x \in \Omega^j, 2bk_0+|k| \leq 2b,$$

$$i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2\}. \qquad (6)$$

ФГ G має властивість нормальності, тобто

$$G_i^j(t,x;\tau,\xi) = \overline{G_j^{i*}(\tau,\xi;t,x)},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, x \in \Omega^i, \xi \in \Omega^j,$$

$$i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2\}. \qquad (7)$$

2. Через $L_p(V)$, $1 \leq p \leq \infty$, $V \subset \mathbb{R}^n$, позначимо простір усіх вимірних функцій

$f : V \to \mathbb{C}$, для яких скінченна норма

$$\|f\|_p \equiv \begin{cases} \left(\int\limits_V |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in V} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

а через $M(V)$ — сукупність усіх σ-адитивних функцій $g : B(V) \to \mathbb{C}$ ($B(V)$ — σ-алгебра борельових підмножин області $V \subset \mathbb{R}^n$) таких, що $\|g\| \equiv |g|(V) < \infty$, де $|g|$ — повна варіація g. Зауважимо, що простір $L_1(V)$ вкладається у простір $M(V)$ так: якщо $f \in L_1(V)$, то функція $g(A) = \int\limits_A f(x)dx$, $A \in B(V)$, належить до $M(V)$, причому $\|g\| = \|f\|_1$.

Вважатимемо, що φ є елементом простору Φ_p, $1 \le p \le \infty$, якщо $\varphi^i \in L_p(\Omega^i)$ при $1 < p \le \infty$ і $\varphi^i \in M(\Omega^i)$ при $p = 1$, $i \in \{1, 2\}$. Для $\varphi \in \Phi_p$ визначимо норми

$$\|\varphi\|_{\Phi_p} \equiv \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \|\varphi^i\|_p, & 1 < p \le \infty, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \|\varphi^i\|, & p = 1, \end{cases}$$

а для функції u, де $u^i : Q^i \to \mathbb{C}$ — вимірна за x при кожному $t \in [0, T]$ функція, норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p \equiv \sum_{i=1}^{2} \|u^i(t, \cdot)\|_p, \ 1 \le p \le \infty.$$

Простір усіх неперервних функцій $f : V \to \mathbb{C}$ таких, що $|f(x)| \to 0$, $|x| \to \infty$, позначатимемо через $C_0(V)$.

Функція Гріна G задачі (1)—(3) породжує інтеграл Пуассона $P\varphi$ елемента $\varphi \in \Phi_p$, $1 \le p \le \infty$, тобто

$$(P\varphi)(t, x) \equiv \begin{cases} (P_1\varphi)(t, x), & (t, x) \in Q^1, \\ (P_2\varphi)(t, x), & (t, x) \in Q^2, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$(P_i\varphi)(t, x) \equiv \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)\varphi^j(\xi)d\xi, & 1 < p \le \infty, \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)d\varphi^j(\xi), & p = 1, \end{cases}$$
$$(t, x) \in Q^i, \quad i \in \{1, 2\}. \tag{9}$$

Через $U_p, 1 \le p \le \infty$, позначимо клас усіх класичних розв'язків u задачі (1), (2) в $\bar{Q}$, які задовольняють умову

$$\|u\|_{U_p} \equiv \sup_{t \in (0,T]} \|u(t, \cdot)\|_p < \infty, 1 \le p \le \infty. \tag{10}$$

Правильною є така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови А, Б, В і $1 \le p \le \infty$. Тоді клас U_p є множиною значень оператора Пуассона P (8), визначеного на просторі Φ_p. При цьому оператор P здійснює ізоморфізм між просторами Φ_p та U_p. Якщо $\varphi \in \Phi_p$ і $u \in U_p$ — відповідні елементи, то u задовольняє умову (3) в такому розумінні: при $1 < p < \infty$*

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t, \cdot) - \varphi(\cdot)\|_p = 0, \tag{11}$$

при $p = 1$ і $p = \infty$ $u(t, \cdot) \to \varphi$, $t \to 0+$, слабко, тобто для будь-якої функції ψ такої, що ψ^j, $j \in \{1, 2\}$, належать відповідно до просторів $C_0(\Omega^j)$ і $L_1(\Omega^j)$, справджуються співвідношення

$$\lim_{t \to 0+} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} \psi^j(x)\overline{u^j(t, x)}dx =$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} \psi^j(x)d\overline{\varphi^j(x)}, & p = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} \psi^j(x)\overline{\varphi^j(x)}dx, & p = \infty. \end{cases} \tag{12}$$

3. Доведемо сформульовану в п.2 теорему.

1) Нехай $\varphi \in \Phi_p$. Доведемо, що функція

$$u = P\varphi \tag{13}$$

є єдиним розв'язком з класу U_p і задовольняє умову (3) в розумінні (11), (12).

На підставі властивостей ФГ G та означення інтеграла Пуассона (8), (9) функція (13) є розв'язком задачі (1), (2) в $\bar{Q}$. Враховуючи (9), за допомогою оцінки (4) і нерівності Гельдера (у випадку $1 < p < \infty$) одержуємо

$$|u^i(t,x)| \leq$$

$$\leq \begin{cases} C\|\varphi\|_{\Phi_\infty}, p = \infty, \\ C\sum\limits_{j=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{\Omega^j}\Bigg(|\varphi^j(\xi)|t^{-n/2b}\times \\ \times E_{c/2}(t,|x-\xi|)\Bigg)^p d\xi\Bigg)^{1/p}, 1 < p < \infty, \\ C\sum\limits_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} t^{-n/(2b)}\times \\ \qquad \times E_c(t,|x-\xi|)d|\varphi^j|(\xi), p = 1, \end{cases}$$

$$(t,x) \in Q^i, \quad i \in \{1,2\},$$

звідки

$$\forall\, t \in (0,T]: \quad \|u(t,\cdot)\|_p \leq C\|\varphi\|_{\Phi_p}, \qquad (14)$$

тобто виконується умова (10). Отже, $u \in U_p$.

Доведення співвідношень (11) і (12) для розв'язку (13) здійснюється за допомогою методики доведення аналогічних тверджень для розв'язків параболічної за Петровським [7, с.230—241] і $2\vec{b}$-параболічної [9] систем та властивостей середніх функцій з використанням (14).

Те, що функція (13) є єдиним розв'язком задачі (1)—(3), встановлюється за допомогою формули Гріна (5) аналогічно тому, як в [9]. Для цього фіксується точка $(t,x) \in Q$ і в (5) за u береться розв'язок задачі (1)—(3) в $\bar{\bar{Q}}$, який задовольняє умову (3) в розумінні (11), (12), ставиться $v^j = G_j^{i*}$, $j \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2\}$, $t_0 = h$, $t_1 = t - \varepsilon$, де $0 < h < t/2$, $0 < \varepsilon < t/2$. На підставі властивостей ФГ і формул (7) одержуємо співвідношення

$$\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t,x;t-\varepsilon,\xi)u^j(t-\varepsilon,\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t,x;h,\xi)u^j(h,\xi)d\xi,$$

$$i \in \{1,2\},$$

звідки, перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0+$, маємо

$$u^i(t,x) = \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t,x;h,\xi)u^j(h,\xi)d\xi,$$

$$i \in \{1,2\}. \qquad (15)$$

Далі переходимо до границі при $h \to 0+$. Розглянемо різницю

$$\left|\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t,x;h,\xi)u^j(h,\xi)d\xi - (P_i\varphi)(t,x)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t,x;0,\xi)(u^j(h,\xi) - \varphi^j(\xi))d\xi\right| +$$

$$+ \left|\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega^j} (G_i^j(t,x;h,\xi) -\right.$$

$$\left. - G_i^j(t,x;0,\xi))u^j(h,\xi)d\xi\right| \equiv I_{ih}^{(1)} + I_{ih}^{(2)},$$

$$i \in \{1,2\}. \qquad (16)$$

Оскільки

$$I_{ih}^{(2)} \leq \begin{cases} Cht^{-(1+n/(2bp))}\|u(h,\cdot)\|_p, \\ \qquad\qquad 1 \leq p < \infty, \\ Cht^{-1}\|u(h,\cdot)\|_\infty, \quad p = \infty, \end{cases}$$

то

$$I_{ih}^{(2)} \to 0, \quad h \to 0+. \qquad (17)$$

При $1 < p < \infty$ $I_{ih}^{(1)} \leq Ct^{-n/(2bp)}$ $\|u(h,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p$, звідки на підставі (11)

$$I_{ih}^{(1)} \to 0, \quad h \to 0+. \qquad (18)$$

У випадку $p = 1$ та $p = \infty$ одержимо (18), використавши (12) з $\psi^j = G_i^j$, оскільки внаслідок (4)

$$G_i^j \in L_1(\Omega^j) \cap C_0(\Omega^j), \quad j \in \{1,2\}.$$

Таким чином, з (15)—(18) при $h \to 0+$ одержується зображення (13) для функції $u \in U_p$.

2) Клас U_p складається тільки з функцій (13), які є інтегралами Пуассона елементів $\varphi \in \Phi_p$. Для цього ще треба довести, що для кожної функції $u \in U_p$ існує єдиний елемент $\varphi \in \Phi_p$, з яким є правильним зображення (13). Використаємо методику з праці [9].

Нехай $1 < p \leq \infty$. На підставі умови (10) послідовність

$$\{u(1/s, x), x \in \Omega : \ s \geq 1\} \tag{19}$$

обмежена в просторі $L_p(\Omega)$, який ізометричний просторові $L_{p'}(\Omega)$, $p' \equiv p/(p-1)$. За теоремою про слабку компактність обмеженої множини у спряженому просторі послідовність (19) слабко компактна в $L_p(\Omega)$. Отже, існує підпослідовність

$$\{u(1/s_r, x), x \in \Omega : \ r \geq 1\} \tag{20}$$

і функція $\varphi \in \Phi_p$ такі, що для будь-якої функції ψ з $\psi^j \in L_{p'}(\Omega^j)$, $j \in \{1,2\}$, виконуються співвідношення

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} u^j(1/s_r, \xi)\overline{\psi^j(\xi)}d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} \varphi^j(\xi)\overline{\psi^j(\xi)}d\xi. \tag{21}$$

Візьмемо фіксовану точку $(t, x) \in Q$ і

$$\psi^j(\xi) = G_j^{i*}(0, \xi; t, x), \xi \in \Omega^j, j \in \{1,2\}. \tag{22}$$

На підставі (6) $\psi^j \in L_{p'}(\Omega^j)$, $j \in \{1,2\}$. Тому з (21), враховуючи (7) та (9), одержимо

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)u^j(1/s_r, \xi)d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)\varphi^j(\xi)d\xi =$$

$$= (P_i\varphi)(t, x), \quad i \in \{1,2\}. \tag{23}$$

За допомогою (15) з $h = 1/s_r$ та (23) маємо

$$|u^i(t, x) - (P_i\varphi)(t, x)| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 1/s_r, \xi)u^j(1/s_r, \xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)\varphi^j(\xi)d\xi \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} \Big(G_i^j(t, x; 1/s_r, \xi) - \right.$$

$$\left. - G_i^j(t, x; 0, \xi) \Big) u^j(1/s_r, \xi)d\xi \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)u^j(1/s_r, \xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega^j} G_i^j(t, x; 0, \xi)\varphi^j(\xi)d\xi \right| \equiv$$

$$\equiv J_{ir}^{(1)} + J_{ir}^{(2)}, \quad i \in \{1,2\}. \tag{24}$$

З (23) випливає, що $J_{ir}^{(2)} \to 0$, $r \to \infty$. Використавши (4), нерівність Гельдера (при $1 < p < \infty$) і те, що можна припускати $1/s_r \leq t/2$ для будь-якого $r \geq 1$, одержимо

$$J_{ir}^{(1)} \leq \begin{cases} C(1/s_r)t^{-(1+n/(2bp))}\|u(1/s_r, \cdot)\|_p, \\ \qquad\qquad 1 < p < \infty, \\ C(1/s_r)t^{-1}\|u(1/s_r, \cdot)\|_\infty, \quad p = \infty, \end{cases}$$

звідки з урахуванням (10) $J_{ir}^{(1)} \to 0$, $r \to \infty$.

Таким чином, з (24) одержується зображення (13) з $\varphi \in \Phi_p$, $1 < p \leq \infty$.

У випадку $p = 1$ з умови (10) випливає, що послідовність (19) обмежена в просторі $L_1(\Omega)$. Цей простір, як уже зазначалось, вкладається у простір $M(\Omega)$ скінченних узагальнених мір, який ізометричний просторові $C_0(\Omega)$. З обмеженості в $L_1(\Omega)$ послідовності (19) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір у $M(\Omega)$

і, отже, слабка компактність останньої. Тому існує підпослідовність (20) та узагальнена міра $\varphi \in \Phi_1$ такі, що для будь-якої функції ψ з $\psi^j \in C_0(\Omega^j)$, $j \in \{1,2\}$, виконуються співвідношення

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega^j} \psi^j(\xi)\overline{u^j(1/s_r,\xi)}d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega^j} \psi^j(\xi)d\overline{\varphi^j(\xi)}. \qquad (25)$$

Як випливає з оцінок (6), функції (22) належать до просторів $C_0(\Omega^j)$, $j \in \{1,2\}$, для будь-якої фіксованої точки $(t,x) \in Q$. Тому на підставі (7) і (25) одержуємо (23) для випадку $p = 1$. Далі, як і при $p > 1$, записуємо нерівність (24), доводимо, що $J_{ir}^{(1)} \to 0$, $r \to \infty$, $i \in \{1,2\}$, а з (25) маємо $J_{ir}^{(2)} \to 0$, $r \to \infty$.

Таким чином, доведено існування елемента $\varphi \in \Phi_p$ такого, що $u = P\varphi$. Єдиність φ випливає з доведеного в частині 1).

Наслідок. *Простори $\Phi_p, 1 \le p \le \infty$, є множинами початкових значень класичних розв'язків задачі (1), (2) в $\bar{Q}$ і за допомогою елементів цих просторів розв'язки зображуються інтегралами Пуассона (8) тоді й тільки тоді, коли виконується умова (10).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* Формула Гріна та умови розв'язності нелокальних еліптичних граничних задач // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, N4.— С.475—487.

2. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Об одной нелокальной параболической граничной задаче // Мат. исследования.— Кишинев, 1970.— **5**, N3.— С.83—100.

3. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Параболические граничные задачи.— Кишинев: Штиинца, 1992.— 328 с.

4. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* L_p-теория одного класса нелокальных параболических граничных задач // Докл. РАН.— 1997.— **356**, N4.— С.445—448.

5. *Дубровская А.П.* О функциях Грина нелокальной параболической граничной задачи, удовлетворяющей условию нормальности // Тр. НИИ математики Воронежского ун-та.— 1975.— Вып.19.— С.66—75.

6. *Кондур О.С.* Нормальні параболічні крайові задачі для систем з розривними коефіцієнтами // Доп. АН України.— 1994.— N12.— С.18—22.

7. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

8. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.— К.: Выща шк., 1990.— 200 с.

9. *Ивасишен С.Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, N4.— С.500—506.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.1999