УДК 517.929

©2001 р. І.І. Клевчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ ТА ДИНАМІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається система нелінійних диференціально-функціональних рівнянь. Права частина системи задовольняє інтегральну умову Ліпшиця. Доведено існування інтегральних многовидів. Показано, що вихідну систему за допомогою гомеоморфної заміни можна звести до простішого вигляду.

We consider a system of nonlinear functional differential equations. The right-hand side of the system satisfies the integral Lipschitz condition. We prove the existence of an integral manifolds. It is shown that the initial system can be reduced into simpler form by homeomorphic substitution.

Нехай $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний простір, $\mathbf{C} = \mathbf{C}[-\Delta, 0]$ — простір неперервних на $[-\Delta, 0]$ n-вимірних вектор-функцій. Через x_t позначимо елемент простору $\mathbf{C}$, заданий при кожному фіксованому t функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x_t) + F(t, x_t), \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$; $x_t \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbb{R}$; $f(x_t)-$ лінійний неперервний функціонал, заданий в $\mathbf{C}$; $F(t, x_t)-$ нелінійний функціонал від x_t із значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Поряд з (1) розглянемо лінійне автономне диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{du}{dt} = f(u_t). \tag{2}$$

Наведемо деякі відомості із загальної теорії таких рівнянь [1 – 3].

Згідно з теоремою Рісса функціонал f можна зобразити у вигляді інтеграла Стілтьєса $f(u_t) = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]u(t+\theta)$, де матриця $\eta(\theta)$ має обмежену варіацію відносно θ. Позначимо через $u_t(\varphi)$ розв'язок рівняння (2) з початковою функцією $\varphi \in \mathbf{C}$ при $t = 0$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (2) співвідношенням $T(t)\varphi = u_t(\varphi)$.

Характеристичне рівняння для рівняння (2) має вигляд

$$\det \Lambda(\lambda) = 0, \quad \Lambda(\lambda) = \lambda E - \int\limits_{-\Delta}^{0} \exp(\lambda\theta) d\eta(\theta). \tag{3}$$

Припустимо, що рівняння (3) має l коренів на уявній осі і в правій півплощині (з урахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у лівій комплексній півплощині. Позначимо власний підпростір в $\mathbf{C}$, що відповідає кореням на уявній осі та в правій півплощині, через $\mathbf{P}$, а доповнювальний до нього підпростір — через $\mathbf{Q}$. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0-$ базис в $\mathbf{P}$. Розглядаючи спряжене до (2) рівняння, можна аналогічно визначити функцію $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \le \theta \le \Delta$. Тоді кожний елемент $x_t \in \mathbf{C}$ єдиним способом можна зобразити у вигляді

$$x_t = x_t^P + x_t^Q = \Phi y(t) + z_t, y \in \mathbb{R}^l, z_t \in \mathbf{Q}, \tag{4}$$

де x_t^P, x_t^Q- проекції x_t відповідно на $\mathbf{P}$ і $\mathbf{Q}$. Рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = By + \Psi(0)F(t, \Phi y + z_t), \quad z_t =$$

$$= T(t-\sigma)z_\sigma + \int\limits_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q F(s, \Phi y(s) + z_s)ds, \tag{5}$$

де $\sigma-$ довільне дійсне число (початковий момент для задачі Коші); X_0^Q- проекція на підпростір $\mathbf{Q}$ функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$; $B-$ стала матриця, власні значення якої збігаються із згаданими вище коренями рівняння (3) з невід'ємними дійсними частинами.

Корені, що лежать у лівій півплощині та корені з невід'ємними дійсними частинами можна, очевидно, розділити деякою прямою $Re\lambda = -\alpha$, де $\alpha > 0$. Справджуються нерівності

$$|T(t)\varphi^P| \le K|\varphi^P| \exp[(\beta - \alpha)t],$$

$$|T(t)X_0^P| \le K \exp[(\beta - \alpha)t], t \le 0,$$

$$|T(t)\varphi^Q| \le K|\varphi^Q| \exp[-(\beta + \alpha)t],$$

$$|T(t)X_0^Q| \le K \exp[-(\beta + \alpha)t], t \ge 0, \qquad (6)$$

де $K \ge 1$, $\alpha > \beta > 0$, $\varphi \in \mathbf{C}$, $|\cdot|-$ норма в $\mathbf{C}$.

Поряд із звичайною нормою $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^l$ ми будемо використовувати далі також норму $|y|_1 = |\Phi y|$, $y \in \mathbb{R}^l$.

Теорема 1. *Нехай функція F неперервна за t і задовольняє умови*

$$F(t, 0) = 0, |F(t, \varphi) - F(t, \varphi')| \le p(t)|\varphi - \varphi'|,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \le \nu\tau_0, \qquad (7)$$

де $\nu > 0$, $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbf{C}$, $\varphi' \in \mathbf{C}$. Тоді при

$$\nu < \frac{1 - exp(-\beta\tau_0)}{4K^2\tau_0} \qquad (8)$$

існує функція $g(t, y) \in \mathbf{Q}$, що визначена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$, задовольняє умови

$$g(t, 0) = 0, |g(t, y) - g(t, y')| \le 0,5|y - y'|_1 \quad (9)$$

і така, що множина $S^- = \{(t, \varphi)|t \in \mathbb{R}, \varphi = \Phi y + \zeta, y \in \mathbb{R}^l, \zeta = g(t, y), \zeta \in \mathbf{Q}\}$ є інтегральним многовидом рівняння (1).

Для кожного розв'язку $x_t = \Phi y(t) + g(t, y(t))$ рівняння (1), що лежить на S^-, виконується оцінка

$$|x_t| \le 2K|y(\sigma)|_1 \exp(-\alpha(t - \sigma)), t \le \sigma. \quad (10)$$

Доведення. Поряд із системою (5) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$y(t) = e^{B(t-\sigma)}c - \int\limits_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s, \Phi y(s)+$$

$$+z_s)ds, z_t = \int\limits_{-\infty}^t T(t - s)X_0^Q F(s, \Phi y(s)+$$

$$+z_s)ds, \qquad (11)$$

звідки одержимо

$$\Phi y(t) = T(t-\sigma)\Phi c - \int\limits_t^\sigma T(t-s)X_0^P F(s, \Phi y(s)+$$

$$+z_s)ds, z_t = \int\limits_{-\infty}^t T(t - s)X_0^Q F(s, \Phi y(s) + z_s)ds.$$

Додаючи ці рівності, з урахуванням (4) знаходимо

$$x_t = T(t - \sigma)\Phi c - \int\limits_t^\sigma T(t - s)X_0^P F(s, x_s)ds+$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t T(t - s)X_0^Q F(s, x_s)ds. \qquad (12)$$

Навпаки, із рівняння (12) можна одержати систему рівнянь (11).

Існування розв'язку рівняння (12) доведемо за допомогою методу послідовних наближень:

$$x_t^{(0)} = 0, x_t^{(n+1)} = T(t-\sigma)\Phi c - \int\limits_t^\sigma T(t-s)X_0^P \times$$

$$\times F(s, x_s^{(n)})ds + \int\limits_{-\infty}^t T(t - s)X_0^Q F(s, x_s^{(n)})ds,$$

$$n = 0, 1, 2, ...$$

Індукцією доведемо, що справджується нерівність

$$|x_t^{(m)} - x_t^{(m-1)}| \le K|c|_1(\nu\gamma)^{m-1} \exp[-\alpha(t - \sigma)], \qquad (13)$$

де $m = 1, 2, ..., t \le \sigma$, $\gamma = 2K\tau_0/[1 - \exp(-\beta\tau_0)]$.

При $m = 1$ нерівність (13) випливає із (6).

Нехай нерівність (13) правильна при $m = n$. Тоді, враховуючи (6) та (7), одержимо

$$|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| \le \int_t^\sigma K \exp[(\beta - \alpha)(t-s)]p(s) \times$$

$$\times |x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds + \int_{-\infty}^t K \exp[-(\beta+\alpha)(t-s)] \times$$

$$\times p(s)|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds \le K|c|_1(\nu\gamma)^n \times$$

$$\times \exp[-\alpha(t-\sigma)].$$

Отже, нерівність (13) правильна при $m = n+1$, тому вона справджується при всіх натуральних m. Послідовні наближення збігаються до розв'язку $x_t(\sigma, c)$ рівняння (12) за умови $\nu\gamma < 1$.

Вибираючи в рівності (12) замість c іншу сталу c', одержимо розв'язок $x_t(\sigma, c')$. Аналогічно нерівності (13) можна довести, що при $\nu\gamma < 0,5$ справджуються нерівності $|x_t^{(m)}(\sigma, c) - x_t^{(m)}(\sigma, c')| \le 2K|c - c'|_1 \exp[-\alpha(t-\sigma)]$, $m = 1, 2, ..., t \le \sigma$. Отже,

$$|x_t(\sigma, c) - x_t(\sigma, c')| \le 2K|c - c'|_1 \exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

$$t \le \sigma. \tag{14}$$

Підставляючи в (11) $t = \sigma$, одержимо зображення інтегрального многовиду

$$y(\sigma) = c, \quad g(\sigma, c) = \int_{-\infty}^\sigma T(\sigma - s)X_0^Q \times$$

$$\times F(s, x_s(\sigma, c))ds.$$

Доведемо оцінку з (9). Маємо

$$|g(\sigma, c) - g(\sigma, c')| \le \int_{-\infty}^\sigma K \exp[-(\alpha+\beta)(\sigma - s)] \times$$

$$\times p(s)|x_s(\sigma, c) - x_s(\sigma, c')|ds \le$$

$$\le \frac{2K^2\nu\tau_0}{1 - exp(-\beta\tau_0)}|c - c'|_1.$$

Якщо задовольняється умова (8), то виконується нерівність (9). Оцінка (10) випливає із (14), якщо покласти $c' = 0$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує функція $r(t, \zeta) \in \mathbb{R}^l$, що визначена на $\mathbb{R} \times \mathbf{Q}$, задовольняє умови $r(t, 0) = 0$, $|r(t, \zeta) - r(t, \zeta')|_1 \le 0,5|\zeta - \zeta'|$ і така, що множина $S^+ = \{(t, \varphi)|t \in \mathbb{R}, \varphi = \Phi y + \zeta, \zeta \in \mathbf{Q}, y = r(t, \zeta), y \in \mathbb{R}^l\}$ є інтегральним многовидом рівняння (1). Для кожного розв'язку $x_t = \Phi r(t, W_t) + W_t$ рівняння (1), що лежить на S^+, виконується оцінка $|x_t| \le 2K|W_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)]$, $t \ge \sigma$.*

Доведення теореми 2 можна провести тим самим шляхом, що й доведення теореми 1.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує гомеоморфна заміна змінних, яка зводить систему (5) до вигляду*

$$\frac{du}{dt} = Bu + \Psi(0)F(t, \Phi u + g(t, u)),$$

$$v_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_1(s, u(s), v_s)ds, \tag{15}$$

де $F_1(t, u, v)$− деяка неперервна за сукупністю аргументів функція, що визначається через функцію F і задовольняє умови

$$F_1(t, u, 0) = 0, |F_1(t, u, v) - F_1(t, u, v')| \le$$

$$\le 2Kp(t)|v - v'|. \tag{16}$$

Доведення. Позначимо через $U(t, u)$ розв'язок першого рівняння системи (15) з початковою умовою $U(\sigma, u) = u$. У системі (5) зробимо заміну змінних $\xi = y - u$, $v_t = z_t - g(t, u)$, тоді

$$\frac{d\xi}{dt} = B\xi + F_3(t, w_t, P_t), \quad v_t = T(t-\sigma)v_\sigma +$$

$$+ \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds, \tag{17}$$

де $w_t = \Phi\xi(t) + v_t$, $P_t = \Phi U(t, u) + g(t, U(t, u))$, $F_2(t, \varphi, \chi) = F(t, \varphi + \chi) - F(t, \chi)$, $F_3(t, \varphi, \chi) = \Psi(0)F_2(t, \varphi, \chi)$.

Розглянемо також систему інтегральних рівнянь

$$\xi(t) = -\int_t^\infty \exp[B(t-s)]F_3(s, w_s, P_s)ds,$$

$$v_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds. \tag{18}$$

Домноживши першу рівність з системи (18) на Φ і додавши ці рівності, одержимо

$$w_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds -$$

$$-\int_t^\infty T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds. \tag{19}$$

Навпаки, із рівняння (19) можна одержати систему рівнянь (18).

Існування розв'язку рівняння (19) доведемо за допомогою методу послідовних наближень:

$$w_t^{(0)} = 0, \quad w_t^{(n+1)} = T(t-\sigma)v_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)\times$$

$$\times X_0^Q F_2(s, w_s^{(n)}, P_s)ds - \int_t^\infty T(t-s)\times$$

$$\times X_0^P F_2(s, w_s^{(n)}, P_s)ds, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Індукцією доведемо, що справджується нерівність

$$|w_t^{(m+1)} - w_t^{(m)}| \leq K2^{1-m}|v_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)], \tag{20}$$

де $m = 1, 2, ..., t \geq \sigma$.

При $m = 1$ нерівність (20) випливає із (6).

Нехай нерівність (20) справджується при $m = n$. Тоді, враховуючи (6) і (7), одержимо

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \leq \int_\sigma^t |T(t-s)X_0^Q|p(s)|w_s^{(n)} -$$

$$-w_s^{(n-1)}|ds + \int_t^\infty |T(t-s)X_0^P|p(s)|w_s^{(n)} -$$

$$-w_s^{(n-1)}|ds \leq \mu K 2^{1-n}|v_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

де $\mu = 2\nu K\tau_0/[1 - \exp(-\beta\tau_0]$. Виберемо ν так, щоб виконувалась умова $\mu < 0,5$. Тоді нерівність (20) справджується при $m = n+1$, отже, вона правильна при всіх натуральних m.

Із (20) випливає, що послідовність $\{w_t^{(m)}\}$ збігається рівномірно при $0 \leq t < \infty$ до функції $w_t = w_t(u, v_\sigma)$– розв'язку рівняння (19). Вибираючи в рівності (19) замість v_σ іншу сталу v'_σ, одержимо розв'язок $w_t(u, v'_\sigma)$. При $\mu < 0,5$ справджується оцінка

$$|w_t(u, v_\sigma) - w_t(u, v'_\sigma)| \leq$$

$$\leq 2K|v_\sigma - v'_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)]. \tag{21}$$

Вважаючи в (18) $t = \sigma$, позначимо

$$j(\sigma, u, v_\sigma) = -\int_\sigma^\infty \exp[B(\sigma - s)]\times$$

$$\times F_3(s, w_s(u, v_\sigma), P_s)ds.$$

Функція $j(\sigma, u, v_\sigma)$ неперервна за сукупністю аргументів як рівномірна границя послідовності неперервних функцій. Крім того, функція $j(\sigma, u, v_\sigma)$ задовольняє умову $j(\sigma, u, 0) = 0$, а також умову Ліпшиця за третім аргументом

$$|j(\sigma, u, v_\sigma) - j(\sigma, u, v'_\sigma)|_1 \leq 0,5|v_\sigma - v'_\sigma|. \tag{22}$$

Позначимо

$$V(t, u, v_\sigma) = T(t-\sigma)v_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q\times$$

$$\times F_2(s, w_s(u, v_\sigma), P_s)ds.$$

Функція $w_s(u, v_\sigma)$ має півгрупову властивість: $w_s(U(t, u), V(t, u, v_\sigma)) = w_{s+t}(u, v_\sigma)$, тому

$$j(t, U(t, u), V(t, u, v_\sigma)) = -\int_t^\infty \exp[B(t-s)]\times$$

$$\times F_3(s, w_s(u, v_\sigma), P_s)ds.$$

Враховуючи (17), одержимо, що $(U(t,u) + j(t, U(t,u), V(t,u,v_\sigma)), V(t,u,v_\sigma) + g(t, U(t,u)))$ буде розв'язком системи (5) з початковою умовою $(u + j(\sigma, u, v_\sigma), v_\sigma + g(\sigma, u))$.

Розглянемо відображення $J_\sigma(u, v_\sigma) = (u + j(\sigma, u, v_\sigma), v_\sigma + g(\sigma, u))$. Функція J_σ відображає розв'язок системи (15) в розв'язок системи (5), якщо покласти $F_1(\sigma, u, v) = F_2(\sigma, w_\sigma(u, v), \Phi u + g(\sigma, u))$, $w_\sigma(u, v) = v + \Phi j(\sigma, u, v)$. Тоді функція $F_1(\sigma, u, v)$ задовольняє умови (16).

Як доведено в [2], сюр'єктивність відображення J_σ випливає із теореми Брауера.

Доведемо взаємну однозначність відображення J_σ. Припустимо, що J_σ не є однозначним, тобто існують u_1, u_2, v_1, v_2, $u_1 \neq u_2$, для яких $u_1 + j(\sigma, u_1, v_1) = u_2 + j(\sigma, u_2, v_2)$, $v_1 + g(\sigma, u_1) = v_2 + g(\sigma, u_2)$. Тоді $U(t, u_1) + j(t, U(t, u_1), V(t, u_1, v_1)) = U(t, u_2) + j(t, U(t, u_2), V(t, u_2, v_2))$, отже,

$$e^{\alpha t}[U(t, u_1) - U(t, u_2)] = e^{\alpha t}[j(t, U(t, u_2),$$
$$V(t, u_2, v_2)) - j(t, U(t, u_1), V(t, u_1, v_1))]. \quad (23)$$

Згідно з нерівностями (21) та (22) права частина рівності (23) обмежена при $t \in [0, \infty)$. Враховуючи (6) та (7), можна довести, що

$$|U(t, u_1) - U(t, u_2)|_1 \geq K^{-1}|u_1 - u_2|_1 \times$$
$$\times \exp[(\beta - \alpha)(t - \sigma) - \chi \int_\sigma^t p(s)ds],$$

де $t \geq \sigma$, $\chi = K(\Phi + 0,5)$. Отже, при $\nu\chi < \beta$ ліва частина рівності (23) необмежена на півосі $[0, \infty)]$. Суперечність доводить, що наше припущення неправильне. Тому $u_1 = u_2$, отже, $v_1 = v_2$.

Позначимо $J_1(u) = u + j(t, u, v)$, де t та v фіксовані, і розглянемо обернене відображення J_1^{-1}. Для доведення неперервності J_1^{-1} розглянемо точку $u \in \mathbb{R}^l$. Їй відповідає $J_1^{-1}(u) \in \mathbb{R}^l$. Візьмемо замкнуту кулю B_l з центром у точці $J_1^{-1}(u)$. Оскільки B_l- компакт, то J_1- гомеоморфізм на B_l [4, с. 191], а це значить, що J_1^{-1} неперервне в точці u. Оскільки $u-$ довільна точка $\mathbb{R}^l$, то J_1^{-1} неперервне на $\mathbb{R}^l$. Отже, відображення J^{-1} неперервне. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Якщо одну систему диференціальних рівнянь за допомогою гомеоморфної заміни можна звести до іншої, то такі системи називаються динамічно еквівалентними [5].*

Зауваження 2. *Аналогічно [5] можна довести, що система (15) динамічно еквівалентна системі*

$$\frac{du}{dt} = Bu + \Psi(0)F(t, \Phi u + g(t, u)),$$

$$r_t = T(t - \sigma)r_\sigma, \quad r_\sigma \in \mathbf{Q}, \quad t \geq \sigma.$$

Зауваження 3. *У цій статті використовується методика з праць [2, 3, 5 – 7], але на відміну від [2, 5] на функцію F накладаються більш загальні умови.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.

2. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений// Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, N3.— С.334—340.

3. *Фодчук В.І., Бігун Я.Й., Клевчук І.І., Черевко І.М., Якімов І.В.* Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння.— К.: Ін-т математики НАН України, 1996.— 210 с.

4. *Келли Дж.Л.* Общая топология.— М.: Наука, 1968.— 383 с.

5. *Клевчук И.И., Фодчук В.И.* О динамической эквивалентности дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа// Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, N1.— С.31—37.

6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.

7. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М.: Наука, 1987.— 304 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2000