УДК 517.983

©2001р. Т.І.Звоздецький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛІВИХ ОБЕРНЕНИХ ДО СТЕПЕНЯ ІНТЕГРУВАННЯ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено еквівалентність двох операторів, які є лівими оберненими до степеня інтегрування, у просторі аналітичних функцій.

It is obtained the similarity of two operators which are left inverse to a degree of integration in a space of analytic functions.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$, а G – зіркова відносно нуля область комплексної площини, для якої $\omega G = G$. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{I}$ та ∂ – відповідно оператори інтегрування та диференціювання на цьому просторі, тобто

$$(\mathcal{I}f)(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta,$$

$$(\partial f)(z) = f'(z), \quad f \in \mathcal{H}(G).$$

У даній роботі встановлено еквівалентність у $\mathcal{H}(G)$ оператора A виду

$$(Af)(z) = (\partial^n f)(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) f^{(k)}(0), \quad (1)$$

де $a_k(z)$, $k = \overline{0, n-1}$, – фіксовані функції з $\mathcal{H}(G)$, та оператора ∂^n, тобто побудовано такий ізоморфізм T простору $\mathcal{H}(G)$ на себе, що

$$AT = T\partial^n. \quad (2)$$

Крім цього, побудований оператор T задовольняє умови

$$(Tf)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), k = \overline{0, n-1}, f \in \mathcal{H}(G).$$

Зауважимо, що формулою (1) дається загальний вигляд операторів, які є лівими оберненими до $\mathcal{I}^n$.

Відзначимо, що для випадку $n = 1$ ця задача була розв'язана в [1]. Крім цього, в [2] встановлено еквівалентність двох операторів загальнішого виду, ніж (1), але в просторах функцій, аналітичних у кругових областях.

Для побудови лінійного неперервного оператора T, який задовольняє рівняння (2), використаємо запропонований у [3] апарат характеристичних функцій для лінійних неперервних операторів.

Нехай $t(\lambda, z) = T(e^{\lambda z})$, де $\lambda \in \mathbb{C}$. Подіявши обома частинами рівності (2) на функцію $e^{\lambda z}$, отримаємо

$$\frac{\partial^n t}{\partial z^n}(\lambda, z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \frac{\partial^k t}{\partial z^k}(\lambda, 0) = \\ = \lambda^n t(\lambda, z). \quad (3)$$

Покладаючи

$$b_k(\lambda) = \frac{\partial^k t}{\partial z^k}(\lambda, 0), k = \overline{0, n-1},$$

матимемо, що функція $t(\lambda, z)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^n t}{\partial z^n}(\lambda, z) - \lambda^n t(\lambda, z) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) b_k(\lambda).$$

Розв'яжемо це рівняння методом варіації сталих. Тому шукатимемо $t(\lambda, z)$ у вигляді

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\lambda, z) e^{\omega^k \lambda z},$$

де $c_k(\lambda, z)$, $k=\overline{0,n-1}$, знайдемо із систем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{km} e^{\omega^k \lambda z} \frac{\partial c_k}{\partial z}(\lambda, z) = 0, m=\overline{0,n-2}, \\ \lambda^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{k(n-1)} e^{\omega^k \lambda z} \frac{\partial c_k}{\partial z}(\lambda, z) = \\ = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(z) b_k(\lambda) \end{cases} \quad (4)$$

і

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^m \omega^{km} c_k(\lambda, 0) = b_m(\lambda), m=\overline{0,n-1}. \quad (5)$$

Оскільки основний визначник системи (4) дорівнює

$$\lambda^{n-1} \begin{vmatrix} e^{\lambda z} & e^{\omega \lambda z} & \cdots & e^{\omega^{n-1} \lambda z} \\ e^{\lambda z} & \omega e^{\omega \lambda z} & \cdots & \omega^{n-1} e^{\omega^{n-1} \lambda z} \\ e^{\lambda z} & \omega^2 e^{\omega \lambda z} & \cdots & \omega^{2(n-1)} e^{\omega^{n-1} \lambda z} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\lambda z} & \omega^{n-1} e^{\omega \lambda z} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} e^{\omega^{n-1} \lambda z} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{n-1} e^{\lambda z(1+\omega+\ldots+\omega^{n-1})} \prod_{0 \le j < i \le n-1} (\omega^i - \omega^j) =$$

$$= \lambda^{n-1} \prod_{0 \le j < i \le n-1} (\omega^i - \omega^j),$$

а відповідні допоміжні визначники Δ_k, $k=\overline{0,n-1}$, мають вигляд

$$\Delta_k = (-1)^{n+k+2} \sum_{m=0}^{n-1} a_m(z) b_m(\lambda) \times$$

$$\times \prod_{0 \le j < i \le n-1, i,j \ne k} (\omega^i - \omega^j) e^{-\omega^k \lambda z},$$

то для $k=\overline{0,n-1}$

$$\frac{\partial c_k}{\partial z}(\lambda, z) = -\sum_{m=0}^{n-1} a_m(z) b_m(\lambda) e^{-\omega^k \lambda z} \times$$

$$\times \left(\lambda^{n-1} \prod_{0 \le j \le n-1, j \ne k} (\omega^k - \omega^j) \right)^{-1} =$$

$$= -\frac{\omega^k}{n\lambda^{n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} a_m(z) b_m(\lambda) e^{-\omega^k \lambda z}.$$

Враховуючи, що визначник системи (5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & \lambda\omega & \cdots & \lambda\omega^{n-1} \\ \lambda^2 & \lambda^2\omega^2 & \cdots & \lambda^2\omega^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{n-1} & \lambda^{n-1}\omega^{2(n-1)} & \cdots & \lambda^{n-1}\omega^{(n-1)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0 \le j < i \le n-1} (\omega^i - \omega^j)$$

відмінний від тотожного нуля і для кожного $m=\overline{0,n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^m \omega^{km} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s(\lambda)}{\lambda^s \omega^{ks}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} b_s(\lambda) \lambda^{m-s} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(m-s)k} = b_m(\lambda),$$

одержуємо

$$c_k(\lambda, 0) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s(\lambda)}{\lambda^s \omega^{ks}} =$$

$$= \frac{\omega^k}{n\lambda^{n-1}} \sum_{s=0}^{n-1} (\lambda\omega^k)^{n-s-1} b_s(\lambda), k=\overline{0,n-1}.$$

Отже, для $k=\overline{0,n-1}$

$$c_k(\lambda, z) = \frac{\omega^k}{n\lambda^{n-1}} \left[\sum_{s=0}^{n-1} (\lambda\omega^k)^{n-s-1} b_s(\lambda) - \right.$$

$$\left. - \int_0^z \sum_{s=0}^{n-1} a_s(t) b_s(\lambda) e^{-\omega^k \lambda t} dt \right].$$

Тому

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{n\lambda^{n-1}} \times$$

$$\times \left[\sum_{s=0}^{n-1} (\lambda\omega^k)^{n-s-1} b_s(\lambda) e^{-\omega^k \lambda z} - \right.$$

$$\left. - \int_0^z \sum_{s=0}^{n-1} a_s(t) b_s(\lambda) e^{\omega^k \lambda (z-t)} dt \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s(\lambda)}{n\lambda^s} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-ks} e^{\omega^k \lambda z} -$$

$$-\int_0^z \sum_{s=0}^{n-1} a_s(t)\frac{b_s(\lambda)}{n\lambda^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k e^{\omega^k\lambda(z-t)}dt.$$

Нехай $b_s(\lambda)=\lambda^s$, $s=\overline{0,n-1}$. Тоді

$$t(\lambda,z)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\omega^k\lambda z}\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\omega^{-ks}-$$

$$-\int_0^z\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s(z-t)}{n\lambda^{n-s-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k e^{\omega^k\lambda t}dt=$$

$$=e^{\lambda z}-\int_0^z\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s(z-t)}{n\lambda^{n-s-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k e^{\omega^k\lambda t}dt.$$

Позначивши

$$(P_sf)(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-ks}f(\omega^k z),\, s=\overline{0,n-1},$$

і скориставшись тим, що для $s=\overline{0,n-2}$

$$\mathcal{I}^{n-s-1}P_se^{\lambda t}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-ks}\mathcal{I}^{n-s-1}e^{\omega^k\lambda t}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^{-ks}}{(\lambda\omega^k)^{n-s-1}}\left(e^{\omega^k\lambda t}-\sum_{j=0}^{n-s-2}\frac{(\omega^k\lambda t)^j}{j!}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\lambda^{n-s-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k e^{\omega^k\lambda t}-$$

$$-\frac{1}{n\lambda^{n-s-1}}\sum_{j=0}^{n-s-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k(j+1)}=$$

$$=\frac{1}{n\lambda^{n-s-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k e^{\omega^k\lambda t},$$

отримаємо

$$t(\lambda,z)=e^{\lambda z}-$$

$$-\int_0^z\sum_{s=0}^{n-1}a_s(z-t)\mathcal{I}^{n-s-1}P_se^{\lambda t}dt. \qquad (6)$$

Таким чином, функція $t(\lambda,z)$ вигляду (6) є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^n t}{\partial z^n}(\lambda,z)-\lambda^n t(\lambda,z)=-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k a_k(z),$$

причому

$$\frac{\partial^k t}{\partial z^k}(\lambda,0)=\lambda^k,\quad k=\overline{0,n-1},$$

тобто ця функція задовольняє співвідношення (3).

Розглянемо на $\mathcal{H}(G)$ оператор

$$(Tf)(z)=f(z)-(Bf)(z),$$

де

$$(Bf)(z)=\int_0^z\sum_{s=0}^{n-1}a_s(z-t)(\mathcal{I}^{n-s-1}P_sf)(t)dt.$$

Очевидно, що оператори B і T лінійні й неперервні на $\mathcal{H}(G)$. Доведемо, що T оборотний. Для цього оцінимо $|(B^mf)(z)|$ при $f\in\mathcal{H}(G)$, $m\in\mathbf{N}$ і $z\in G$.

Зафіксуємо $f\in\mathcal{H}(G)$ і $z\in G$. Тоді

$$|(Bf)(z)|=\left|\int_0^z[a_{n-1}(z-t)(P_{n-1}f)(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{n-2}a_s(z-t)\int_0^t\frac{(t-\tau)^{n-s-2}}{(n-s-2)!}(P_sf)(\tau)d\tau]dt\right|\le$$

$$\le|z|\int_0^1[|a_{n-1}(z(1-u))||(P_{n-1}f)(zu)|+$$

$$+\sum_{s=0}^{n-2}|a_s(z(1-u))|\times$$

$$\times\int_0^1\frac{(|z|u(1-v))^{n-s-2}}{(n-s-2)!}|(P_sf)(zuv)||z|udv]du\le$$

$$\le\sum_{s=0}^{n-1}|z|^{n-s}M(z,a_s)M(z,f)=|z|CM(z,f),$$

де для $g\in\mathcal{H}(G)$

$$M(z,g)=\max_{\zeta\in L_z}|g(\zeta)|$$

(тут $L_z=\{\zeta:\zeta=\omega^jtz, 0\le t\le1, 0\le j\le n-1\}$), а

$$C=\sum_{s=0}^{n-1}|z|^{n-s-1}M(z,a_s).$$

Припустимо, що для $m \in \mathbb{N}$
$$|(B^m f)(z)| \le \frac{|z|^m C^m}{m!} M(z,f),$$
і доведемо, що
$$|(B^{m+1} f)(z)| \le \frac{|z|^{m+1} C^{m+1}}{(m+1)!} M(z,f).$$
Справді,
$$|(B^{m+1} f)(z)| \le |z| \int\limits_0^1 |a_{n-1}(z(1-u))| \times$$
$$\times |(P_{n-1} B^m f)(zu)| du + \sum_{s=0}^{n-2} \int\limits_0^1 |a_s(z(1-u))| \times$$
$$\times \int\limits_0^1 \frac{(|z|u(1-v))^{n-s-2}}{(n-s-2)!} \times$$
$$\times |(P_s B^m f)(zuv)| |z|^2 u dv du \le$$
$$\le M(z, a_{n-1}) \frac{|z|^{m+1} C^m}{m!} M(z,f) \int\limits_0^1 u^m du +$$
$$+ \sum_{s=0}^{n-2} M(z, a_s) |z|^{n-s} \frac{|z|^m C^m}{m!} M(z,f) \int\limits_0^1 v^m dv =$$
$$= \frac{|z|^{m+1} C^{m+1}}{(m+1)!} M(z,f).$$

Нехай K — такий зірковий відносно нуля компакт із G, що $\omega K = K$. Тоді, очевидно, для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$
$$\max_{z \in K} |(B^m f)(z)| \le \frac{C^m}{m!} \max_{z \in K} |f(z)|, m \in \mathbb{N},$$
де C — деяка стала, що залежить від функцій $a_s(z)$, $s = \overline{0, n-1}$, та компакта K. Отже, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B^m f$ збігається в $\mathcal{H}(G)$ для кожної функції $f \in \mathcal{H}(G)$. Тому, згідно з теоремою Банаха-Штейнгауза, оператор $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B^m$ лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$. Оскільки він є, очевидно, оберненим до T, то T – ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$.

Перевіримо тепер, чи оператор T задовольняє рівняння (2), тобто, чи
$$ATf = T\partial^n f, \quad f \in \mathcal{H}(G).$$
Зрозуміло, що досить довести правильність цієї рівності для функцій із повної в $\mathcal{H}(G)$ системи $\{e^{\lambda z} : \lambda \in \mathbb{C}\}$, тобто, що при $\lambda \in \mathbb{C}$
$$\partial^n T e^{\lambda z} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \left[(\partial^k T e^{\lambda z})|_{z=0} \right] =$$
$$= \lambda^n T e^{\lambda z}. \tag{7}$$
Але функція $t(\lambda, z) = Te^{\lambda z}$ має вигляд (6), тому вона задовольняє співвідношення (3), яке збігається з (7).

Таким чином, встановлена така теорема.

Теорема. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$, G – зіркова відносно нуля область комплексної площини, для якої $\omega G = G$, а $a_k(z)$, $k = \overline{0, n-1}$, – довільно зафіксовані функції з простору $\mathcal{H}(G)$. Тоді оператор ∂^n і оператор A вигляду (1) еквівалентні в $\mathcal{H}(G)$. Крім цього, один із операторів перетворення ∂^n в A має вигляд*
$$(Tf)(z) = f(z) -$$
$$- \int\limits_0^z \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z-t) (\mathcal{I}^{n-k-1} P_k f)(t) dt$$
для $f \in \mathcal{H}(G)$, причому
$$(Tf)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Линчук С.С., Нагнибида Н.И.* Об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических в круге функций // Математика сегодня'89: Научн.-метод.сб.— К.: Выща школа, 1989.— Вып.5.— С.47—62.

2. *Фишман К.М.* Об эквивалентности некоторых линейных операторов в аналитическом пространстве // Мат. сб.— 1965.— **68**, N 1.— С.63—74.

3. *Линчук С.С.* О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций многих переменных // Мат. заметки.— 1984.— **35**, N 5.— С.721—727.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.2000