УДК 517.956.4

© 2001 р. **В.С. Дронь, С.Д. Івасишен**
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

СТРУКТУРА ТА ОЦІНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Застосовано нову модифікацію методу Леві для поглибленого вивчення структури фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку. Одержано оцінки інтегралів від цього фундаментального розв'язку.

A new modification of the Levi method was used for deepen study of the structure of fundamental solution of the Cauchy problem for a class of degenerate parabolic second-order equations of Kolmogorov type. Estimates of integrals of this fundamental solution were obtained.

У 1934 р. А.М.Колмогоров [1] при вивченні випадкових рухів узагальнив класичну теорію броунівського руху А.Ейнштейна і прийшов до рівняння дифузії з інерцією, яке є виродженим параболічним рівнянням. Узагальненнями класичного рівняння Колмогорова, в тому числі й на випадок рівнянь довільного порядку, та їх дослідженням займались М. Вебер, Т.Г. Генчев, А.М. Ільїн, Р.З. Хасьмінський, І.М. Сонін, Я.І. Шатиро, Л.П.Купцов, С.Д.Ейдельман, Г.П.Малицька, Л.М. Тичинська, В. Скорнацані, С.Д. Івасишен, Л.М.Андросова, С.Г.Пятков, О.Г.Возняк та ін.

Як і в теорії задачі Коші для невироджених параболічних рівнянь, для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова одним з основних понять є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК). Тому найважливішими питаннями, які стояли перед дослідниками задачі Коші для таких рівнянь, були питання, що стосувалися існування, оцінок і властивостей ФРЗК [2—7].

Стаття присвячена поглибленому вивченню структури ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку з трьома групами просторових змінних і змінними коефіцієнтами. У [3—5] знайдено умови існування та оцінки ФРЗК, в [6] подано аналітичний вираз і властивості ФРЗК для рівняння у випадку, коли його коефіцієнти можуть залежати тільки від часової змінної і параметрів. Ці результати широко використовуються у даній роботі.

Але при дослідженні потенціалів, породжених ФРЗК, зокрема об'ємних потенціалів, потрібно мати такі, як у [8], властивості ФРЗК. Тому постала необхідність детальнішого вивчення структури ФРЗК та властивостей інтегралів від нього.

1. Позначення, постановка задачі та припущення. Нехай T – задане додатне число; n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$; $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$; $N \equiv (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2$; $M \equiv \{1, 2, 3\}$; $\mathbb{R}^l$ – l-вимірний евклідів простір; x – точка простору $\mathbb{R}^n$, $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, де x_l – точка простору $\mathbb{R}^{n_l}$, $l \in M$; x_{lj} – координата точки x_l, $j \in \{1, ..., n_l\}$, $l \in M$; $\Pi_H \equiv H \times \mathbb{R}^n$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $\theta(r) \equiv 0$ при $r < 0$ і $\theta(r) \equiv 1$ при $r \ge 0$; $\Delta_x^{x'} f(\cdot, x, \cdot) \equiv f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, x', \cdot)$.

Розглядатимемо рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv (\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} -$$

$$- \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,x)\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} -$$

$$-a_0(t,x))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

з такими умовами на коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{k, j\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і a_0:

A. Існує стала $\delta_0 > 0$ така, що для всіх $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \equiv (\sigma_1, ..., \sigma_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$

справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,x)\sigma_k\sigma_j \geq \delta_0|\sigma|^2.$$

Б. Коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{k,j\} \subset \{1,...,n_1\}$, і a_0 в $\Pi_{[0,T]}$ є неперервними й обмеженими функціями разом зі своїми похідними за x_2 і x_3 та за x_1 задовольняють рівномірну умову Гельдера з показником $\alpha_1 \in (0,1]$.

2. Відома інформація про ФРЗК. За умов **А** і **Б** в [4,5] доведено існування єдиного ФРЗК $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, для рівняння (1), який має такі властивості:

1) $Z(t,x;\tau,\xi) = G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))+$

$$+W(t,x;\tau,\xi),\ 0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $G_0(t,x;\tau,\xi;y)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, – ФРЗК для рівняння з параметром $y \in \mathbb{R}^n$

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} -$$

$$- \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,y)\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}})u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}; \tag{3}$$

$\tilde{\xi}(t) \equiv (\tilde{\xi}_1(t), \tilde{\xi}_2(t), \tilde{\xi}_3(t))$,
$\tilde{\xi}_l(t) \equiv (\tilde{\xi}_{l1}(t), ..., \tilde{\xi}_{ln_l}(t)),\ l \in M$;
$\tilde{\xi}_{1j}(t) \equiv \xi_{1j},\quad j \in \{1,...,n_1\}$;
$\tilde{\xi}_{2j}(t) \equiv \xi_{2j} - t\xi_{1j},\quad j \in \{1,...,n_2\}$;
$\tilde{\xi}_{3j}(t) \equiv \xi_{3j} - t\xi_{2j} + \frac{1}{2}t^2\xi_{1j},\quad j \in \{1,...,n_3\}$;

2) правильні з деякими $C > 0$, $0 < c < \bar{c}$ оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))| \leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-N-(|m_1|+3|m_2|+5|m_3|)/2}\times$$
$$\times \exp\{-\bar{c}\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$
$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\quad m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l},\ l \in M;$$
$$|\partial_{x_l}^{m_l} W(t,x;\tau,\xi)| \leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-N+(\alpha_1-(2l-1)|m_l|)/2}\times$$
$$\times \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$
$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\quad |m_l| \leq r_l,\quad l \in M;$$
$$|\partial_{x_l}^{m_l} Z(t,x;\tau,\xi)| \leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-N-(2l-1)|m_l|/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ |m_l| \leq r_l,\ l \in M, \tag{4}$$

де $\partial_{x_l}^{m_l} \equiv \partial_{x_{l1}}^{m_{l1}}...\partial_{x_{ln_l}}^{m_{ln_l}}$; $m_l \equiv (m_{l1},...,m_{ln_l})$ – n_l-вимірний мультиіндекс, $|m_l| \equiv m_{l1} + ... + m_{ln_l}$; $r_1 \equiv 2$, $r_2 = r_3 \equiv 1$; $\rho(t,x,\xi) \equiv \sum_{l=1}^{3} t^{1-2l} \sum_{j=1}^{n_l} |\overline{x}_{lj}(t) - \xi_{lj}|^2$; $\overline{x}_{1j}(t) \equiv x_{1j}$, $j \in \{1,...,n_1\}$; $\overline{x}_{2j}(t) \equiv x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in \{1,...,n_2\}$; $\overline{x}_{3j}(t) \equiv x_{3j} + tx_{2j} + (t^2/2)x_{1j}$, $j \in \{1,...,n_3\}$;

Зауваження 1. *Оцінки (4) залишаються правильними, якщо в них замінити функцію ρ на функцію $\tilde{\rho}$, задану виразом*

$$\tilde{\rho}(t,x,\xi) \equiv \sum_{l=1}^{3} t^{1-2l} \sum_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - \tilde{\xi}_{lj}(t)|^2.$$

Це випливає з оцінок

$$\delta_1\tilde{\rho}(t,x,\xi) \leq \rho(t,x,\xi) \leq \delta_2\tilde{\rho}(t,x,\xi),$$
$$t \in [0,T],\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де δ_1 і δ_2 – деякі додатні сталі.

Для вивчення властивостей ФРЗК Z для рівняння (1) потрібні такі властивості функції G_0:

1) $|\Delta_y^{y'}\partial_{x_l}^{m_l} G_0(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C(|y_1 - y_1'|^{\alpha_1}+$

$$+|y_2 - y_2'|^{\alpha_2} + |y_3 - y_3'|^{\alpha_3})(t-\tau)^{-N-(2l-1)|m_l|/2}\times$$
$$\times \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\ 0 \leq \tau < t \leq T,$$
$$\{x,\xi,y,y'\} \subset \mathbb{R}^n,\ m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l},\quad l \in M; \tag{5}$$

2) $|\partial_{y_{ij}}\partial_{x_l}^{m_l} G_0(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$

$$\leq C(t-\tau)^{-N-(2l-1)|m_l|/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$0 \leq \tau < t \leq T,\quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n,\ m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l},$$
$$l \in M,\ j \in \{1,...,n_i\},\ i \in \{2,3\}; \tag{6}$$

3) $\partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\tau,\xi;y) = -(\partial_{\xi_{1j}} + (t-\tau)\times$

$$\times\theta(n_2 - j)\partial_{\xi_{2j}} + \frac{1}{2}(t-\tau)^2\theta(n_3 - j)\partial_{\xi_{3j}})\times$$
$$\times G_0(t,x;\tau,\xi;y),\quad j \in \{1,...,n_1\};$$
$$\partial_{x_{2j}} G_0(t,x;\tau,\xi;y) = -(\partial_{\xi_{2j}} + (t-\tau)\times$$
$$\times\theta(n_3 - j)\partial_{\xi_{3j}})G_0(t,x;\tau,\xi;y),\quad j \in \{1,...,n_2\};$$

$$\partial_{x_{3j}} G_0(t,x;\tau,\xi;y) = -\partial_{\xi_{3j}} G_0(t,x;\tau,\xi;y),$$
$$j \in \{1,...,n_3\}; \quad (7)$$

4) $$|\partial_{x_i}^{m_i} \int_{\mathbb{R}^{n_l+\dots+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;y) d\xi_l ... d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N-(2i-1)|m_i|/2} \times$$
$$\times \exp\{-c\rho_{l-1}(t-\tau,x,\xi)\}, i \in \{1,...,l-1\},$$
$$|\partial_{x_i}^{m_i} \int_{\mathbb{R}^{n_l+\dots+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;y) d\xi_l ... d\xi_3| \le 0,$$
$$i \in \{l,...,3\},\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$m_i \in \mathbb{Z}_+^{n_i},\ l \in M; \quad (8)$$

5) $$|\partial_{x_i}^{m_i} \int_{\mathbb{R}^{n_l+\dots+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi_l ... d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N-(2i-1)|m_i|/2} \times$$
$$\times \exp\{-c\rho_{l-1}(t-\tau,x,\xi)\}, \quad i < l,$$
$$|\partial_{x_i}^{m_i} \int_{\mathbb{R}^{n_l+\dots+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi_l ... d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N-(2i-1)|m_i|/2} \sum_{k=i}^{3} (t-\tau)^{(2k-1)\alpha_k/2} \times$$
$$\times \exp\{-c\rho_{l-1}(t-\tau,x,\xi)\}, i \ge l,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, m_i \in \mathbb{Z}_+^{n_i},$$
$$\{l,i\} \subset M; \quad (9)$$

6) $$|\partial_t G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N-1} \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\} \times$$
$$\times (1 + (t-\tau)^{-1/2}|x_1| + (t-\tau)^{-3/2}|x_2|),$$
$$|\partial_t \int_{\mathbb{R}^{n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N_2-1} \exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\} \times$$
$$\times (1 + (t-\tau)^{-1/2}|x_1| + |x_2|),$$
$$|\partial_t \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi_2 d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N_1-1} \exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\} \times$$
$$\times (1 + |x_1| + |x_2|),$$
$$|\partial_t \int_{\mathbb{R}^{n}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-1+\alpha_1/2}(1 + |x_1| + |x_2|),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (10)$$

7) якщо неперервна й обмежена функція $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ на кожному компакті $K \subset \Pi_{[0,T]}$ задовольняє за 1-ю, 2-ю і 3-ю групами просторових змінних рівномірну щодо t умову Гельдера з показниками відповідно $\beta_1 \in (0,1]$, $\beta_2 \in (1/3,1]$ і $\beta_3 \in (3/5,1]$, то інтеграл

$$v_0(t,x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) \times$$
$$\times f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

має неперервні похідні, що входять у рівняння (3), причому

$$\partial_{x_{1j}} v_0(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-$$
$$-\tau)) f(\tau,\xi) d\xi, \quad j \in \{1,...,n_1\};$$
$$\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1k}} v_0(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1k}} \times$$
$$\times G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) \Delta_\xi^{X_1(t-\tau)} f(\tau,\xi) d\xi +$$
$$+ \int_0^t \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1k}} \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi \times$$
$$\times f(\tau, X_1(t-\tau)) d\tau, \quad \{j,k\} \subset \{1,...,n_1\};$$
$$\partial_{x_{2j}} v_0(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{2j}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-$$
$$-\tau)) \Delta_\xi^{X_2(t-\tau)} f(\tau,\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \partial_{x_{2j}} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau)) d\xi_2 d\xi_3 \times$$
$$\times f(\tau, X_2(t-\tau)) d\xi_1, \quad j \in \{1,...,n_2\};$$

$$\partial_{x_{3j}} v_0(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{3j}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-$$

$$-\tau))\Delta_\xi^{X_3(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \partial_{x_{3j}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))d\xi_3\times$$

$$\times f(\tau, X_3(t-\tau))d\xi_1 d\xi_2, \quad j\in\{1,...,n_3\};$$

$$\partial_t v_0(t,x) = f(t,x) + \int\limits_0^t d\tau\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))\Delta_\xi^{X_3(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)} f(\tau, X_3(t-\tau))d\xi_1 d\xi_2+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))d\xi_2\times$$

$$\times d\xi_3 \Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)} f(\tau, X_2(t-\tau))d\xi_1+$$

$$+\int\limits_0^t \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))d\xi\times$$

$$\times f(\tau, X_1(t-\tau))d\tau,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{11}$$

Доведення всіх цих властивостей аналогічне доведенню відповідних властивостей для невироджених параболічних рівнянь [9]. Деякі з них наведені та використані в [3–6,8].

Зауваження 2. *Нерівності (5), (8) і (9) справджуються в припущенні, що коефіцієнти рівняння (3) є обмеженими й неперервними функціями від t і y, які задовольняють рівномірну щодо t умову Гельдера за групами змінних y_1, y_2 і y_3 з показниками відповідно $\alpha_1 \in (0,1]$, $\alpha_2 \in (1/3,1]$ і $\alpha_3 \in (3/5,1]$. Для правильності нерівностей (6) і (10) треба додатково вимагати існування неперервних і обмежених похідних за y_2 і y_3 від коефіцієнтів рівняння (3). Оскільки припускається виконання умови* **Б** *для коефіцієнтів рівняння (1), то всі вищенаведені припущення виконуються для коефіцієнтів рівняння (3) з будь-якими $\alpha_2 \in (1/3,1]$ і $\alpha_3 \in (3/5,1]$.*

Зауваження 3. *Якщо замість параметричної точки y в G_0 підставляти тільки частину груп координат точки $\tilde{\xi}(t-\tau)$, то вирази для похідних від v_0 можуть спрощуватися. Якщо залишити групу y_3, то вираз справа в (11) для $\partial_{x_{3j}} v_0$ міститиме тільки перший доданок. На підставі (6) дорівнює нулеві й другий доданок у виразі для $\partial_{x_{2j}} v_0$, якщо залишаються недоторканими групи y_2 і y_3.*

3. Оцінки інтегралів від ФРЗК.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **А** *і* **Б**. *Тоді справджуються такі оцінки:*

$$|\partial_{x_{3j}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-N_2}\times$$

$$\times(t-\tau)^{(5\alpha_3-5)/2}\exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$j\in\{1,...,n_3\};$$

$$|\partial_{x_{2j}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C\times$$

$$\times(t-\tau)^{-N_1+(3\alpha_2-3)/2}\exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$j\in\{1,...,n_2\};$$

$$|\partial_{x_1}^{m_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{(\alpha_1-|m_1|)/2}, \quad 1\le|m_1|\le 2,$$

$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{12}$$

де α_1 – число з умови **Б**, *а α_2 і α_3 – довільні числа відповідно з інтервалів $(1/3,1]$ і $(3/5,1]$;*

$$|\partial_t Z(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-N-1}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}\times$$

$$\times(1+(t-\tau)^{-1/2}|x_1| + (t-\tau)^{-3/2}|x_2|),$$

$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N_2-1}\exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\}\times$$
$$\times(1+(t-\tau)^{-1/2}|x_1|+|x_2|),$$
$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-N_1-1}\times$$
$$\times\exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\}(1+|x_1|+|x_2|),$$
$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{\alpha_1/2-1}(1+|x_1|+|x_2|),$$
$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (13)$$

Доведення. Рівність (2) та оцінки (8) – (10) зводять доведення даної властивості до доведення нерівностей типу (12) і (13) для функції W.

Оцінки (4) для W є достатніми, щоб одержати для W третю з нерівностей (12), тобто оцінку

$$|\partial_{x_1}^{m_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} W(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C(t-\tau)^{(\alpha_1-|m_1|)/2},$$
$$1\le|m_1|\le 2, \quad 0\le\tau<t\le T, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Але їх недостатньо, щоб довести для W перші дві нерівності з (12). Тому виникає необхідність додаткового дослідження структури W. Для цього здійснимо дії, які є трикратним повторенням процедури, подібної до побудови ФРЗК Z в [4,5].

Етап I. Будуємо ФРЗК для рівняння

$$(L_1u)(t,x)\equiv(\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}-$$
$$-\sum_{k,j=1}^{n_1}a_{kj}(t,(x_1,y_2,y_3))\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,(x_1,y_2,y_3))\partial_{x_{1j}}-a_0(t,(x_1,y_2,y_3)))\times$$
$$\times u(t,x)=0, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (14)$$

у вигляді

$$G_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)=$$
$$=G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2,y_3))+W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3),$$
$$W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)\equiv\int\limits_\tau^t d\beta\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda. \qquad (15)$$

Припускається, що для невідомої функції Φ_1 справджуються такі апріорні оцінки:

$$|\Phi_1(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(2-\alpha_1)/2}\times$$
$$\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$|\Delta_{x_1}^{x_1'}\Phi_1(t,x;\tau,\xi)|\le$$
$$\le C|x_1-x_1'|^{\alpha_1'}(t-\tau)^{-N-(2-\alpha_1'')/2}(\exp\{-c\rho(t-$$
$$-\tau,x,\xi)\}+\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)|_{x_1=x_1'}\}),$$
$$|\partial_{x_{2j}}\Phi_1(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(5-\alpha_1)/2}\times$$
$$\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}, \quad j\in\{1,...,n_2\},$$
$$|\partial_{x_{3j}}\Phi_1(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(7-\alpha_1)/2}\times$$
$$\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}, \quad j\in\{1,...,n_3\},$$
$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (16)$$

де $0<\alpha_1'<\alpha_1$, $\alpha_1''\equiv\alpha_1-\alpha_1'$.

За допомогою гельдеровості коефіцієнтів і очевидної нерівності

$$\sum_{i=l}^{3}|x_i-\tilde{\xi}_i(t-\tau)|^{\alpha_i}\exp\{-\bar{c}\rho(t-\tau,x,\xi)\}\le$$
$$\le C\sum_{i=l}^{3}(t-\tau)^{(2i-1)\alpha_i/2}\exp\{-\bar{c}_1\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad l\in M, \qquad (17)$$

$\bar{c}_1\in(0,\bar{c})$, оцінимо

$$K_1(t,x;\tau,\xi)\equiv L_1G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2,y_3))=$$
$$=(\sum_{k,j=1}^{n_1}\Delta_{\xi_1}^{x_1}a_{kj}(t,(\xi_1,y_2,y_3))\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,(x_1,y_2,y_3))\partial_{x_{1j}} - a_0(t,(x_1,y_2,y_3)))\times$$

$$\times G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2,y_3)).$$

У результаті одержимо

$$|K_1(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-N-(2-\alpha_1)/2}\exp\{-\bar{c}_1\rho(t-\tau,x,\xi)\}.$$

Формули для похідних від об'ємного потенціалу з (15), які аналогічні формулам (11), дозволяють одержати рівність

$$L_1G_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3) =$$

$$= L_1G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2,y_3)) + \Phi_1(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} L_1G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\times$$

$$\times\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Тому функція G_1 буде розв'язком рівняння (14) при $t>\tau$, якщо Φ_1 є розв'язком інтегрального рівняння

$$\Phi_1(t,x;\tau,\xi) = -K_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (-K_1(t,x;\beta,\lambda))\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

За допомогою методу послідовних наближень маємо

$$\Phi_1(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j K_{1j}(t,x;\tau,\xi), \quad (18)$$

де

$$K_{11}(t,x;\tau,\xi) \equiv K_1(t,x;\tau,\xi),$$

$$K_{1j}(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda)K_{1(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Для повторних ядер K_{1j} одержуються оцінки

$$|K_{1j}(t,x;\tau,\xi)| \le C^j\left(\frac{\pi}{c}\right)^{j-1}\frac{\Gamma^j(\alpha_1/2)}{\Gamma(j\alpha_1/2)}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-N-(2-j\alpha_1)/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$j\ge 1,$$

де Γ – гамма-функція Ейлера, $c\in(0,\bar{c}_1)$. Ці оцінки дозволяють довести рівномірну й абсолютну збіжність ряду (18) при $t-\tau\ge\varepsilon>0$ і першу з апріорних оцінок (16).

За допомогою (7) і (8) доводиться правильність решти апріорних оцінок з (16), а також рівностей

$$\partial_{x_{ij}} \int_{\mathbb{R}^{n_l+\dots+n_3}} \Phi_1(t,x;\tau,\xi)d\xi_l\dots d\xi_3 = 0,$$

$$j\in\{1,\dots,n_i\},\quad i>\max\{1,l-1\},\quad l\in M. \quad (19)$$

Процедура побудови ФРЗК G_1 дає можливість одержати наступні властивості $\mathbf{I}_1$-$\mathbf{I}_7$ функцій W_1 і G_1.

$\mathbf{I}_1$. $|\partial_{x_l}^{m_l}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)| \le C(t-\tau)^{-N}\times$

$$\times(t-\tau)^{-(2l-1)|m_l|/2+\alpha_1/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ (y_2,y_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3},$$

$$|m_l|\le r_l,\quad l\in M. \quad (20)$$

Справді, на підставі формул, які аналогічні (11), оцінок (16) і формул (7) маємо вирази

$$\partial_{x_{1j}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3) = \int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1j}}\times$$

$$\times G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3) =$$

$$= \int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\times$$

$$\times\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\times$$

$$\times\Delta_\lambda^{X_1(t-\beta)}\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^t \partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}\int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))d\lambda\times$$

$$\times\Phi_1(\beta, X_1(t-\beta);\tau,\xi)d\beta,\ \{k,j\}\subset\{1,...,n_1\};$$

$$\partial_{x_{2j}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{2j}}\times$$

$$\times G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))(\partial_{\lambda_{2j}}+$$

$$+(t-\beta)\theta(n_3-j)\partial_{\lambda_{3j}})\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$j\in\{1,...,n_2\};$$

$$\partial_{x_{3j}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{3j}}\times$$

$$\times G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\times$$

$$\times\partial_{\lambda_{3j}}\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,\ j\in\{1,...,n_3\},$$

де $t_1\equiv(t+\tau)/2$, оцінюючи які, одержимо необхідні оцінки (20).

$\mathbf{I}_2$. $|\Delta_{y_l}^{y_l'}\partial_{x_i}^{m_i}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)|\le$

$$\le C|y_l-y_l'|^{\alpha_l}(t-\tau)^{-N-(2i-1)|m_i|/2+\alpha_1/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \{y_l,y_l'\}\subset\mathbb{R}^{n_l}, l\in\{2,3\},$$

$$|m_i|\le r_i,\ i\in M. \tag{21}$$

Ці оцінки випливають з (5).

$\mathbf{I}_3$. $|\partial_{y_{lj}}\partial_{x_i}^{m_i}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)|\le$

$$\le C(t-\tau)^{-N-(2i-1)|m_i|/2+\alpha_1/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ (y_2,y_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3},\ j\in\{1,...,n_l\},$$

$$l\in\{2,3\},\quad |m_i|\le r_i,\ i\in M.$$

Властивість доводиться за допомогою (6).

$\mathbf{I}_4$. $\partial_{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)d\xi_2d\xi_3=0,$

$$j\in\{1,...,n_2\};$$

$$\partial_{x_{3j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)d\xi_3=0,$$

$$j\in\{1,...,n_3\}.$$

Доведення продемонструємо на прикладі перших нерівностей. Використовуючи (7), (8), (19) та інтегрування частинами, одержимо

$$\partial_{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)d\xi_2d\xi_3=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\partial_{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\times$$

$$\times d\lambda_2d\lambda_3\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3\Big)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(G_0(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_1,y_2,y_3))\times$$

$$\times(\partial_{\lambda_{2j}}+(t-\beta)\theta(n_3-j)\partial_{\lambda_{3j}})\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Phi_1(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3\Big)d\lambda=0.$$

$\mathbf{I}_5$. $|\partial_{x_1}^{m_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}W_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-$

$$-\tau))d\xi|\le C(t-\tau)^{(\alpha_1-|m_1|)/2},\ 1\le|m_1|\le r_1;$$

$$|\partial_{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}W_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-$$

$$-\tau))d\xi_2d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-N_1-(3-3\alpha_2)/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_2\};$$

$$|\partial_{x_{3j}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}W_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-$$

$$-\tau))d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-N_2-(5-5\alpha_3)/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_3\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{22}$$

Перша оцінка з (22) випливає з (4) (див. доведення нерівності (20)). Дві наступні оцінки одержуються за допомогою нерівностей (17) і (21).

$\mathbf{I}_6$. Оцінки (10) правильні й тоді, коли в них $G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))$ замінити на $G_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-\tau))$.

Для доведення треба скористатися формулою

$$\partial_t G_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-\tau)) = \Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2}\xi_{1j}\partial_{y_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3}(\xi_{2j}-(t-\tau)\xi_{1j})\partial_{y_{3j}}\Big)\times G_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)|_{y_l=\tilde{\xi}_l(t-\tau),l\in\{2,3\}} \qquad (23)$$

і тим, що функція $G_1(t,x;\tau,\xi;y_2,y_3)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є розв'язком рівняння (14).

Перша оцінка для G_1 типу (10) одержується оцінюванням доданків з (23). Для одержання наступних оцінок для G_1 типу (10) потрібно перед оцінюванням доданків з (23) зінтегрувати їх відповідно по $\xi_3\in\mathbb{R}^{n_3}$, по $(\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$ та по $\xi\in\mathbb{R}^n$, а також урахувати обмеженість, а в останньому випадку – гельдеровість коефіцієнтів.

$\mathbf{I}_7$. Якщо $f:\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}$ – неперервна й обмежена функція, яка на кожному компакті $K\subset\Pi_{(0,T]}$ задовольняє за групами x_1, x_2 і x_3 просторових змінних рівномірну відносно t умову Гельдера відповідно з показниками $\beta_1\in(0,1]$, $\beta_2\in(1/3,1]$ і $\beta_3\in(3/5,1]$, то інтеграл

$$v_1(t,x)\equiv\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} G_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-\tau))f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

має неперервні похідні, що входять у рівняння (14), причому вирази для цих похідних мають таку саму форму, як і формули (11) для похідних від v_0.

Доведення властивості проводиться аналогічно доведенню рівностей (11).

Наведені властивості функцій W_1 і G_1 дозволяють виконати наступний етап дослідження структури ФРЗК Z.

Етап II. Будуємо ФРЗК для рівняння

$$(L_2u)(t,x)\equiv\Big(\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}-\sum_{k,j=1}^{n_1}a_{kj}(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}-\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1j}}-a_0(t,(x_1,x_2,y_3))\Big)\times u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad (24)$$

у вигляді

$$G_2(t,x;\tau,\xi;y_3)= G_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),y_3)+W_2(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)\equiv\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}G_1(t,x;\beta,\lambda;\tilde{\lambda}_2(t-\beta),y_3)\Phi_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Побудова G_2 здійснюється так само, як побудова ФРЗК G_1 для рівняння (14). Тільки тут для невідомої функції Φ_2 виконуються дещо кращі оцінки

$$|\Phi_2(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(2-3\alpha_2)/2}\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$|\partial_{x_{1j}}\Phi_2(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(3-3\alpha_2)/2}\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_1\},$$
$$|\partial_{x_{2j}}\Phi_2(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(5-3\alpha_2)/2}\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_2\},$$
$$|\partial_{x_{3j}}\Phi_2(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N-(7-3\alpha_2)/2}\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_3\},$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Це має місце завдяки кращій оцінці для першого наближення розв'язку інтегрального рівняння для Φ_2. Дійсно,

$$K_2(t,x;\tau,\xi)\equiv L_2G_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),y_3)= -\Big(\sum_{k,j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\tilde{\xi}_2(t-\tau)}a_{kj}(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\tilde\xi_2(t-\tau)}a_j(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta_{x_2}^{\tilde\xi_2(t-\tau)}a_0(t,(x_1,x_2,y_3))\Big)\times$$

$$\times G_1(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_2(t-\tau),y_3)$$

і

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-N-(2-3\alpha_2)/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}.$$

Повторюючи дії етапу I, можна побудувати ФРЗК G_2 для рівняння (24) і встановити такі властивості для нього та складової W_2:

II$_1$. $|\partial_{x_l}^{m_l}W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(t-\tau)^{-N}\times$

$$\times(t-\tau)^{-(2l-1)|m_l|/2+3\alpha_2/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad y_3\in\mathbb{R}^{n_3},$$

$$|m_l|\le r_l,\quad l\in M;$$

II$_2$. $|\Delta_{y_3}^{y_3'}\partial_{x_l}^{m_l}W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le$

$$\le C|y_3-y_3'|^{\alpha_3}(t-\tau)^{-N-(2l-1)|m_l|/2+3\alpha_2/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$|\partial_{y_{3j}}\partial_{x_l}^{m_l}W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(t-\tau)^{-N}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(2l-1)|m_l|/2+3\alpha_2/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \{y_3,y_3'\}\subset\mathbb{R}^{n_3},$$

$$j\in\{1,...,n_3\},\quad |m_l|\le r_l,\ l\in M.$$

II$_3$. $\partial_{x_{3j}}\int_{\mathbb{R}^{n_3}}W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3=0,$

$$j\in\{1,...,n_3\}.$$

II$_4$. $|\partial_{x_1}^{m_1}\int_{\mathbb{R}^n}W_2(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_3(t-\tau))d\xi|\le$

$$\le C(t-\tau)^{(3\alpha_2-|m_1|)/2},\quad 1\le|m_1|\le r_1;$$

$$|\partial_{x_{2j}}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}W_2(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_3(t-\tau))d\xi_2d\xi_3|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-N_1-(3-3\alpha_2)/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_2\};$$

$$|\partial_{x_{3j}}\int_{\mathbb{R}^{n_3}}W_2(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_3(t-\tau))d\xi_3|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-N_2-(5-5\alpha_3)/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_3\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.\qquad(25)$$

II$_5$. оцінки (10) правильні, коли в них $G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi(t-\tau))$ замінити на $G_2(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_3(t-\tau))$;

II$_6$. якщо функція f така ж, як у властивості **I**$_7$, то інтеграл

$$v_2(t,x)\equiv\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G_2(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_3(t-\tau))\times$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi,\quad(t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

має неперервні похідні, що входять у рівняння (24), причому вирази для цих похідних мають таку саму форму, як і вирази (11) для похідних від v_0.

Етап III. Будуємо ФРЗК Z для рівняння (1) у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=G_2(t,x;\tau,\xi;\tilde\xi_3(t-\tau))+W_3(t,x;\tau,\xi),$$

$$W_3(t,x;\tau,\xi)\equiv\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}G_2(t,x;\beta,\lambda;\tilde\lambda_3(t-$$

$$-\beta))\Phi_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda$$

і аналогічно попередньому встановлюємо такі властивості для функцій W_3 і Z:

III$_1$. $|\partial_{x_l}^{m_l}W_3(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-N}\times$

$$\times(t-\tau)^{-(2l-1)|m_l|/2+5\alpha_3/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |m_l|\le r_l,$$

$$l\in M;$$

III$_2$. $|\partial_{x_1}^{m_1}\int_{\mathbb{R}^n}W_3(t,x;\tau,\xi)d\xi|\le$

$$\le C(t-\tau)^{(5\alpha_3-|m_1|)/2},\quad 1\le|m_1|\le r_1;$$

$$|\partial_{x_{2j}}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}W_3(t,x;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-N_1-(3-5\alpha_3)/2}\times$$

$$\times\exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\},\quad j\in\{1,...,n_2\};$$

$$|\partial_{x_{3j}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} W_3(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N_2-(5-5\alpha_3)/2}\times$$
$$\times \exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\}, \quad j\in\{1,...,n_3\},$$
$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \qquad (26)$$

$\mathbf{III}_3$. оцінки (10) правильні, коли в них $G_0(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}(t-\tau))$ замінити на $Z(t,x;\tau,\xi)$.

Підсумовуючи результати здійснення всіх трьох етапів нової процедури побудови ФРЗК Z для рівняння (1), одержуємо, що функцію W із зображення (2) можна подати у вигляді

$$W(t,x;\tau,\xi) =$$
$$= W_1(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_2(t-\tau),\tilde{\xi}_3(t-\tau))+$$
$$+W_2(t,x;\tau,\xi;\tilde{\xi}_3(t-\tau)) + W_3(t,x;\tau,\xi),$$
$$0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (27)$$

З (27) та оцінок (22), (25) і (26) випливають для W необхідні оцінки типу (12). Властивість $\mathbf{III}_3$ означає, що справджуються також оцінки (13).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kolmogorov A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math.— 1934.— **35**.— P.116—117.

2. *Ильин А.М., Хасьминский Р.З.* Об уравнениях броуновского движения // Теория вероятн. и ее примен.— 1964.— **9**, N3.— С.466—491.

3. *Івасишен С.Д., Тичинська Л.М., Ейдельман С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Доп. АН УРСР. Сер.А.— 1990.— N5.— С.6—8.

4. *Малицька Г.П., Федорів М.П.* Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Вісник Прикарпатського ун-ту. Сер. природн.-мат. наук.— Івано-Франківськ: Плай, 1995.— Вип.1.— С.10—16.

5. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Malytska H.P.* A modified Levi method: development and application // Доп. НАН України.— 1998.— N5.— С.14—19.

6. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений.— Черновиц. ун-т.— Черновцы, 1989.— 62 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, N 1762-Ук89.

7. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн.— 1998.— **50**, N11.— С.1482—1496.

8. *Дронь В.С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика.— Чернівці: Рута, 2000.— С.32—41.

9. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.10.2000