УДК 514.76

©2001 р. **Р.Ф. Домбровський**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

МЕТОД Г.Ф.ЛАПТЄВА У ПОБУДОВІ ТЕОРІЇ КРИВИНИ ЛОКАЛЬНО ОДНОРІДНИХ ЛІНІЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ПРОСТОРУ

Аналітичним теоретико-груповим методом Г.Ф.Лаптєва побудована теорія інваріантів-кривин локально однорідних простороподібних ліній чотиривимірного нейтрального простору.

The theory of invariants-curvatures of local uniform spacelike lines of four-dimensioned neutral space was formed by analytic theory group method of G.F.Laptev.

1. У диференціальній геометрії відомі два основні інваріантні аналітичні методи, які застосовуються при дослідженні довільних класів диференціально-геометричних структур. За першим методом до досліджуваного об'єкта інваріантно приєднуються система функцій і диференціальних операторів так, що подальше дослідження зводиться до дій над приєднаними функціями і операторами. Другий метод полягає у приєднанні до досліджуваного об'єкта системи функцій та диференціальних форм. Перший метод систематично застосовував С.Лі, а другий створив і розвинув Е.Картан [1]. На основі методів С.Лі та Е.Картана С.П.Фініков і Г.Ф.Лаптєв створили універсальний інваріантний теоретико-груповий метод дослідження диференціально-геометричних структур на диференційовних многовидах [2,3]. Г.Ф. Лаптєв розробив інваріантний метод продовжень і охоплень, який успішно застосовується при розв'язанні задач теорії зображень груп та при побудові геометрії розшарованих просторів. У теорії геометричних об'єктів, створеній Г.Ф. Лаптєвим [4], закони скінченних перетворень компонент геометричних об'єктів заміняються відповідними системами диференціальних рівнянь.

Геометричним об'єктом, приєднаним до деякої групи Лі G, називається точка простору лінійного зображення групи G. Якщо в n-вимірному просторі лінійного зображення r-членної групи Лі G ввести локальну систему координат $\{x^I\}(I,K,L,...=\overline{1,n})$, то група G є групою аналітичних перетворень компонент об'єкта $\{x^I\}$:

$$\tilde{x}^I = f^I(u^s, x^K), \quad (s=\overline{1,r}). \qquad (1)$$

При цьому $f^I(0,x)=x^I$, $f^I(u,f^K(v,x))=f^I(\varphi(u,v),x)$ і $x^I=\tilde{f}^I(\overset{*}{u},\tilde{x})$, де $\overset{*}{u}$ — параметри елемента групи G, оберненого до елемента з параметрами u.

Формули (1) визначають перетворення абсолютних координат $\tilde{x}^I$ точки. Якщо групові параметри u^s замінити нескінченно малими величинами, то зміняться відносні компоненти x^I геометричного об'єкта за умови, що його абсолютні компоненти $\tilde{x}^I$ не змінилися:

$$\tilde{x}^I = f^I(u+du, x+dx), \quad u^s+du^s \approx \varphi^s(u,w).$$

Отже,

$$\tilde{x}^I = f^I(\varphi(u,w), x+dx) = f^I(u, f(w,x+dx)).$$

Таким чином,

$$\tilde{x}^I \approx f^I\left(u, f(0,x) + \left.\frac{\partial f(w,x)}{\partial w^s}\right|_{w=0}\omega^s + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(0,x)}{\partial x^K}dx^K\right) = f^I(u,x) + \frac{\partial f^I(u,x)}{\partial x^K}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial f^K(0,x)}{\partial x^L}dx^L + \left.\frac{\partial f^k(w,x)}{\partial w^s}\right|_{w=0}\omega^s\right).$$

Оскільки при $u=0$

$$\frac{\partial f^K(0,x)}{\partial x^L}=\frac{\partial x^K}{\partial x^L}=\delta^K_L=$$

$$=\begin{cases}1, & K=L,\\ 0, & K\neq L,\end{cases}$$

$\det\left(\dfrac{\partial f^I(u,x)}{\partial x^K}\right)\neq 0$, то для малих u маємо

$$\tilde{x}^I\approx f^I(u,x)+\frac{\partial f^I(u,x)}{\partial x^K}(dx^K+\xi^K_s(x)\omega^s).$$

Отже,

$$dx^K+\xi^K_s(x)\omega^s=0. \qquad (2)$$

Система (2) цілковито інтегровна і має назву рівнянь інваріантності геометричного об'єкта з відносними компонентами $\{x^I\}$. Лінійні лінійно незалежні диференціальні форми ω^s є лівоінваріантними формами групи Лі G.

Цілковита інтегровність системи (2) випливає з тотожностей, в які перетворюються структурні рівняння С.Лі для функцій $\xi^I_s(x)$:

$$\frac{\partial \xi^I_p}{\partial x^K}\xi^K_q-\frac{\partial \xi^I_q}{\partial x^K}\xi^K_p=\xi^I_s C^s_{pq},$$

де C^s_{pq} — структурні константи групи G.

Виявляється, що тензори — це лінійні однорідні геометричні об'єкти, приєднані до конкретної групи перетворень. Розширюючи чи редукуючи цю групу, ми можемо спостерігати за геометричними об'єктами: чи залишаються вони інваріантними при змінених умовах, чи інваріантність втрачається.

Для прикладу розглянемо схему дослідження геометрії диференціального рівняння. Нехай на диференційовному многовиді M задано диференціальне рівняння E та діє група G. Потрібно знайти ті властивості сукупності інтегральних многовидів рівняння E, які інваріантні відносно групи G.

Тоді рівняння E інтерпретується як рівняння підмноговиду N простору $T^k(N)$ дотичних елементів необхідного порядку в многовиді M. На $T^k(N)$ діє продовжена група G. Продовжуючи фундаментальний об'єкт підмноговиду N, отримуємо послідовність геометричних об'єктів, яка описує геометрію підмноговиду N, тобто геометрію рівняння E.

Зауважимо, що 1) група G, як правило, є нескінченною (псевдогрупою) групою Лі; 2) метод Г.Ф.Лаптєва дозволяє знайти геометричні образи і конструкції, інваріантно приєднані до рівняння E: зв'язності, диференціально-геометричні структури і асоційовані з рівнянням многовиди, оснащені спеціальними структурами, і т.п.; 3) у багатьох випадках процес знаходження інваріантів рівняння E значно прискорюється можливістю канонізації рухомого базису.

Проілюструємо застосування методу Г.Ф.Лаптєва в побудові теорії кривини неперервно диференційовних локально однорідних ліній чотиривимірного псевдоевклідового простору нульової сигнатури. Окремі результати з теорії кривини локально однорідних часоподібних ліній чотиривимірного нейтрального простору анонсовані в працях [5—10].

2. Якщо Ω^I — головні форми точкового простору $A_n(g)$ лінійного зображення деякої групи Лі G з інваріантними формами $\bar{\Omega}^K_I=\Omega^K_I|_{\Omega^L=0}$, то рівняння

$$d\Omega^I=\Omega^L\wedge\Omega^I_L,\quad d\Omega^I_L=\Omega^K_L\wedge\Omega^I_K$$

будуть структурними рівняннями простору $A_n(g)$, якщо він псевдоевклідів. Умови інваріантності поля метричного тензора g на A_n набувають вигляду

$$dg_{IK}-g_{LK}\Omega^L_I-g_{IL}\Omega^L_K=g_{IKL}\Omega^L. \qquad (3)$$

Здійснимо перетворення форм

$$\Omega^L_I=\omega^L_I+\Gamma^L_{IK}\Omega^K$$

і підберемо функції Γ^L_{IK} так, щоб у термінах форм ω^L_I умови (3) набули вигляду

$$dg_{IK}-g_{LK}\omega^L_I-g_{IL}\omega^L_K=0. \qquad (4)$$

Такі функції існують

$$\Gamma^L_{IK}=-\frac{1}{2}g^{LJ}(g_{JIK}+g_{JKI}-g_{IKJ}),$$

їх називають компонентами нейтральної зв'язності, а форми ω_I^L стають формами нейтральної зв'язності [9].

Система (4) виражає факт коваріантної сталості метричного тензора $\{g_{IK}\}$ відносно нейтральної зв'язності.

Якщо $n = 4$ і $\{\underset{xI}{\vec{e}}\}$ — той базис у точці $x \in A_4(g)$, в якому

$$g_{ij} = (\underset{x_i}{\vec{e}}, \underset{x_j}{\vec{e}}) = \delta_{ij}, \quad i, j, k, ... = 1, 2;$$

$$g_{i\alpha} = g_{\alpha i} = (\underset{x_i}{\vec{e}}, \underset{x_\alpha}{\vec{e}}) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, ... = 3, 4;$$

$$g_{\alpha\beta} = (\underset{x_\alpha}{\vec{e}}, \underset{x_\beta}{\vec{e}}) = -\delta_{\alpha\beta},$$

то числа $(\underset{xI}{\vec{e}}, \underset{xK}{\vec{e}})$ визначають псевдоскалярний добуток у лінеалі нейтрального простору $A_4(g)$.

Умови інваріантності псевдоскалярного добутку набувають вигляду

$$\omega_i^j = \omega_j^i, \quad \omega_i^\alpha = \omega_\alpha^i, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha. \qquad (5)$$

Для чотиривимірного нейтрального простору умови (5) — це залежності між інваріантними формами нейтральної зв'язності. Маємо

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1,$$

$$\omega_1^3 = \omega_3^1, \quad \omega_1^4 = \omega_4^1$$

$$\omega_2^3 = \omega_3^2, \quad \omega_2^4 = \omega_4^2, \quad \omega_3^4 = -\omega_4^3.$$

Отже, лінійно незалежними формами нейтральної зв'язності простору $A_4(g)$ стають форми $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^3, \omega_2^4, \omega_3^4$.

Рівняння структури цих форм такі:

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^4, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 - \omega_1^4 \wedge \omega_3^4,$$

$$d\omega_1^4 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4, \quad d\omega_2^3 = \omega_1^3 \wedge \omega_1^2 - \omega_2^4 \wedge \omega_3^4,$$

$$d\omega_2^4 = \omega_1^4 \wedge \omega_1^2 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^4, \quad d\omega_3^4 = \omega_1^3 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_2^4.$$

3. Розглянемо в $A_4(g)$ локально однорідну неперервно диференційовну лінію (γ), визначену системою зовнішніх диференціальних рівнянь

$$\Omega^I = \Lambda^I \theta,$$

де $\theta = dt$, t — дійсна змінна.

Векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \Lambda^I \underset{xI}{\vec{e}}$ на лінії (γ) буде полем дотичних векторів, якщо функції $\Lambda^I = \Lambda^I(x)$ задовольняють рівняння

$$d\Lambda^I + \Lambda^K \omega_K^I = \Lambda_1^I \theta,$$

$$d\Lambda_1^I + \Lambda_1^K \omega_K^I = \Lambda_{11}^I \theta,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d\Lambda^I_{\underbrace{1...1}_{m}} + \Lambda^K_{\underbrace{1...1}_{m}} \omega_K^I = \Lambda^I_{\underbrace{1...1}_{m+1}} \theta.$$

Функції $\{\Lambda^I\}$, $\{\Lambda^I, \Lambda_1^I\}$, $\{\Lambda^I, \Lambda_1^I, \Lambda_{11}^I\}$, ... $\{\Lambda^I, \Lambda_1^I, ..., \Lambda^I_{\underbrace{1...1}_{m}}\}$ утворюють фундаментальні геометричні об'єкти лінії (γ) у нейтральному просторі $A_4(g)$. Порядок фундаментального об'єкта $\{\Lambda^I, \Lambda_1^I, ..., \Lambda^I_{\underbrace{1...1}_{m}}\}$ дорівнює $(m+1)$.

Функція $s = g_{IK}\Lambda^I\Lambda^K$ є тензором типу $(0,0)$. За умов (5) $s = (\Lambda^1)^2 - (\Lambda^2)^2 - (\Lambda^3)^2 - (\Lambda^4)^2 = \|\vec{\Lambda}_x\|^2$. Оскільки s — дійсна змінна, то вона може набувати додатних, від'ємних та нульового значень. Локальна однорідність лінії (γ) означає існування околу довільної звичайної точки x лінії, в якому зберігається тип її дотичного вектора. Якщо $s > 0$, то $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$ — часоподібний вектор, якщо $s < 0$, то $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$ — простороподібний і якщо $s = 0$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}} \neq 0$, то $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$ — ізотропний. Очевидно, що для локально однорідної часоподібної лінії при $s = 1$, а для локально однорідної простороподібної лінії при $s = -1$ змінна t є натуральним параметром відповідної лінії.

Базис $\{\underset{xI}{\vec{e}}\}$ лінеалу нейтрального простору $A_4(g)$, в якому квадратична форма g має нормальний вигляд, назвемо стандартним базисом нейтрального простору $A_4(g)$. Вектори $\{\underset{x_i}{\vec{e}}\}$ стандартного базису нейтрального простору часоподібні, а вектори $\{\underset{x_\alpha}{\vec{e}}\}$ — простороподібні. Диференціальна геометрія локально однорідної часоподібної лінії будується як геометрія інтегральної кривої векторного поля $\{\underset{x_i}{\vec{e}}\}$ при фіксованому i. Оскільки результати дослідження локально однорідної часоподібної лінії в $A_4(g)$ опубліковані в [9], то ми зупинимося на простороподібних кривих.

4. Нехай (γ) — інтегральна крива векторного поля $\underset{x4}{\vec{e}}, x \in (\gamma)$. Тоді компоненти фундаментального об'єкта першого порядку цієї локально однорідної простороподібної лінії набувають значень

$$\Lambda^1 = \Lambda^2 = \Lambda^3 = 0, \quad \Lambda^4 = 1. \tag{6}$$

За умов (6) маємо

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \underset{x4}{\vec{e}}, \quad \Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \quad \Omega^4 = \theta = dt.$$

Система диференціальних рівнянь локально однорідної простороподібної лінії, віднесеної до натуральної параметризації у нейтральному просторі $A_4(g)$, така:

$$\begin{gathered}\Omega^1 = 0, \Omega^2 = 0, \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0,\\ \omega_1^4 = \Lambda_1^1\theta, \omega_2^4 = \Lambda_1^2\theta, \omega_3^4 = -\Lambda_1^3\theta, \Lambda_1^4 = 0,\\ d\Lambda_1^1 - \Lambda_1^2\omega_1^2 + \Lambda_1^3\omega_1^3 = \Lambda_{11}^1\theta,\\ d\Lambda_1^2 + \Lambda_1^1\omega_1^2 + \Lambda_1^3\omega_2^3 = \Lambda_{11}^2\theta,\\ d\Lambda_1^3 + \Lambda_1^1\omega_1^3 + \Lambda_1^2\omega_2^3 = \Lambda_{11}^3\theta,\\ \Lambda_{11}^4 = (\Lambda_1^1)^2 + (\Lambda_1^2)^2 - (\Lambda_1^3)^2.\\ d\Lambda_{11}^I + \Lambda_{11}^K\omega_K^I = \Lambda_{111}^I\theta, ...\end{gathered} \tag{7}$$

Якщо $\Lambda_1^1 = 0$, $\Lambda_1^2 = 0$, то $d\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \Lambda_1^3\underset{x3}{\vec{e}}\,\theta$ і система (7) спрощується

$$\begin{gathered}\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0,\\ \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = 0, \omega_3^4 = -\Lambda_1^3\theta,\\ \Lambda_1^1 = 0, \Lambda_1^2 = 0, \Lambda_1^4 = 0,\\ \Lambda_1^3\omega_1^3 = \Lambda_{11}^1\theta, \Lambda_1^3\omega_2^3 = \Lambda_{11}^2\theta,\\ d\Lambda_1^3 = \Lambda_{11}^3\theta, \Lambda_{11}^4 = -(\Lambda_1^3)^2,\\ d\Lambda_{11}^I + \Lambda_{11}^K\omega_K^I = \Lambda_{111}^I\theta, \ldots .\end{gathered} \tag{8}$$

Отже, функція Λ_1^3 є відносним інваріантом уздовж локально однорідної простороподібної лінії (γ) — інтегральної кривої поля $\underset{x4}{\vec{e}}$. Назвемо цю функцію першою кривиною лінії (γ) і позначимо її через k_1. Оскільки $k_1 = \Lambda_1^3$, то рівність $d\underset{x}{\vec{\Lambda}} = k_1\underset{x3}{\vec{e}}\,\theta$ є першою формулою Френе лінії (γ).

Теорема 1. *Локально однорідна простороподібна лінія нульової першої кривини є простороподібною прямою.*

Дійсно, оскільки $k_1 = \Lambda_1^3 = 0$, то $\Lambda_1^I = 0$, $\Lambda_{11}^I = 0$, ... і лінія (γ) є простороподібною прямою з напрямним вектором $\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \underset{x4}{\vec{e}}$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \overrightarrow{\text{const}}$, бо $d\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \vec{0}$.

Розглянемо локально однорідні простороподібні лінії ненульової першої кривини. Для таких ліній система (8) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0, \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0,\\ \omega_3^4 = -k_1\theta, \omega_1^3 = \frac{\Lambda_{11}^1}{k_1}\theta, \omega_2^3 = \frac{\Lambda_{11}^2}{k_1}\theta, dk_1 = \Lambda_{11}^3\theta,\\ \Lambda_1^1 = \Lambda_1^2 = \Lambda_1^4 = 0, \Lambda_{11}^4 = -k_1^2,\\ d\Lambda_{11}^1 - \Lambda_{11}^2\omega_1^2 = \left(\Lambda_{111}^1 - \frac{\Lambda_{11}^1\Lambda_{11}^3}{k_1}\right)\theta,\\ d\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{11}^1\omega_1^2 = \left(\Lambda_{111}^2 - \frac{\Lambda_{11}^2\Lambda_{11}^3}{k_1}\right)\theta,\\ d\Lambda_{11}^3 =\\ = \left(\Lambda_{111}^3 - \frac{1}{k_1}\left((\Lambda_{11}^1)^2 + (\Lambda_{11}^2)^2 + (\Lambda_{11}^4)^2\right)\right)\theta,\\ \Lambda_{111}^4 = -3k_1\Lambda_{11}^3, d\Lambda_{111}^I + \Lambda_{111}^K\omega_K^I = \Lambda_{1111}^I\theta, \ldots .\end{gathered} \tag{9}$$

Якщо $\Lambda_{11}^1 = 0$, то функцію

$$k_2 := \frac{\Lambda_{11}^2}{k_1} \tag{10}$$

назвемо другою кривиною локально однорідної простороподібної лінії. Диференціали $d\underset{x3}{\vec{e}}$ мають будову

$$d\underset{x3}{\vec{e}} = (k_2\underset{x2}{\vec{e}} - k_1\underset{x4}{\vec{e}})\theta. \tag{11}$$

Формулу (8) назвемо другою формулою Френе. За умов (10) і $\Lambda_{11}^1 = 0$ система (9) зводиться до вигляду

$$\begin{gathered}\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0,\\ \omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_1^3 = 0, \omega_3^4 = -k_1\theta, \omega_2^3 = k_2\theta,\end{gathered}$$

$$dk_1 = \Lambda^3_{11}\theta, \Lambda^1_1 = \Lambda^2_1 = \Lambda^4_1 = 0, \Lambda^3_1 = k_1,$$
$$\Lambda^1_{11} = 0, \Lambda^2_{11} = k_1 k_2, \Lambda^4_{11} = -k_1^2,$$
$$\Lambda^4_{111} = -3k_1\Lambda^3_{11}, k_1 k_2 \omega^2_1 = -\Lambda^1_{111}\theta,$$
$$dk_2 = \frac{1}{k_1}(\Lambda^2_{111} - 2k_2\Lambda^3_{11})\theta,$$
$$d\Lambda^3_{11} = (\Lambda^3_{111} - k_1 k_2^2 - k_1^3)\theta,$$
$$d\Lambda^I_{111} + \Lambda^K_{111}\omega^I_K = \Lambda^I_{(4)}\theta, \dots . \qquad (12)$$

Локально однорідні простороподібні лінії з нульовою першою кривиною назвемо однорідними простороподібними лініями роду 1. Очевидно, що однорідні простороподібні лінії роду 1 згідно з теоремою 1 є простороподібними прямими і для них друга кривина не визначена. Такі ж властивості має пряма евклідової площини. Локально однорідні простороподібні лінії ненульової першої кривини і нульової другої кривини назвемо однорідними простороподібними лініями роду 2. Для однорідних простороподібних ліній роду 2 $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ і тому третя кривина k_3 не визначена.

Теорема 2. *Для того, щоб однорідна простороподібна лінія роду 2 у чотиривимірному нейтральному просторі була простороподібним колом, необхідно і досить, щоб відносний інваріант Λ^3_{11} дорівнював нулеві.*

Доведення. Система диференціальних рівнянь (12) для однорідної простороподібної лінії роду 2 спрощується і набуває вигляду

$$\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0,$$
$$\omega^4_1 = 0, \omega^4_2 = 0, \omega^3_1 = 0, \omega^4_3 = -k_1\theta, \omega^3_2 = 0,$$
$$dk_1 = \Lambda^3_{11}\theta, \Lambda^1_1 = \Lambda^2_1 = \Lambda^4_1 = \Lambda^1_{11} = \Lambda^2_{11} = 0,$$
$$\Lambda^3_1 = k_1, \Lambda^4_{11} = -k_1^2, \Lambda^1_{111} = \Lambda^2_{111} = 0,$$
$$\Lambda^4_{111} = -3k_1\Lambda^3_{11}, \Lambda^1_{(4)} = 0, \Lambda^2_{(4)} = 0,$$
$$d\Lambda^3_{11} = (\Lambda^3_{111} - k_1^3)\theta, d\Lambda^3_{111} = (\Lambda^3_{(4)} - k_1\Lambda^4_{111})\theta,$$
$$d\Lambda^4_{111} = (\Lambda^4_{(4)} + k_1\Lambda^3_{111})\theta,$$
$$d\Lambda^I_{(4)} + \Lambda^K_{(4)}\omega^I_K = \Lambda^I_{(5)}\theta, \dots . \qquad (13)$$

Тому, якщо однорідна лінія роду 2 є простороподібним колом, то її перша кривина $k_1 = c_1$, де $c_1 = \mathrm{const} \neq 0$. Отже, $\Lambda^3_{11} = 0$. Навпаки, якщо для деякої однорідної простороподібної лінії роду 2 відносний інваріант Λ^3_{11} нульовий, то зі співвідношень (13) випливає, що $dk_1 = 0$ і тому $k_1 = \mathrm{const} \neq 0$.

Наслідок. *Локально однорідне простороподібне коло радіуса $\dfrac{1}{k_1}$ у чотиривимірному нейтральному просторі характеризується системою зовнішніх диференціальних рівнянь*

$$\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0,$$
$$\omega^4_1 = \omega^4_2 = \omega^3_1 = \omega^3_2 = 0, \omega^4_3 = -k_1\theta$$

та сукупністю скінченних співвідношень для компонент його фундаментальних об'єктів

$$\Lambda^1 = \Lambda^2 = \Lambda^3 = 0, \Lambda^4 = 1,$$
$$\Lambda^1_1 = \Lambda^2_1 = \Lambda^4_1 = 0, \Lambda^3_1 = k_1,$$
$$\Lambda^1_{11} = \Lambda^2_{11} = \Lambda^3_{11} = 0, \Lambda^4_{11} = -k_1^2,$$
$$\Lambda^1_{111} = \Lambda^2_{111} = \Lambda^4_{111} = 0, \Lambda^3_{111} = k_1^3,$$
$$\Lambda^1_{(4)} = \Lambda^2_{(4)} = \Lambda^3_{(4)} = 0, \Lambda^4_{(4)} = -k_1^4,$$
$$\Lambda^1_{(5)} = \Lambda^2_{(5)} = \Lambda^4_{(5)} = 0, \Lambda^3_{(5)} = -k_1^5,$$
$$\Lambda^1_{(6)} = \Lambda^2_{(6)} = \Lambda^3_{(6)} = 0, \Lambda^4_{(6)} = k_1^6,$$
$$\Lambda^1_{(7)} = \Lambda^2_{(7)} = 0, \Lambda^3_{(7)} = k_1^7, \Lambda^4_{(7)} = 0,$$
$$\Lambda^1_{(8)} = \Lambda^2_{(8)} = \Lambda^3_{(8)} = 0, \Lambda^4_{(8)} = -k_1^8, \dots .$$

5. Розглянемо локально однорідні простороподібні лінії з ненульовими кривинами k_1 і k_2. Диференціальні рівняння та скінченні співвідношення системи (12) містять рівняння

$$\omega^2_1 = -\frac{1}{k_1 k_2}\Lambda^1_{111}\theta,$$
$$d\Lambda^1_{111} = \left(\Lambda^1_{(4)} - \frac{\Lambda^1_{111}\Lambda^2_{111}}{k_1 k_2}\right)\theta,$$
$$d\Lambda^2_{111} = \left(\Lambda^2_{(4)} + \frac{1}{k_1 k_2}(\Lambda^1_{111})^2 - k_2\Lambda^3_{111}\right)\theta,$$
$$d\Lambda^3_{111} = (\Lambda^3_{(4)} - k_1\Lambda^4_{111} - k_2\Lambda^2_{111})\theta,$$
$$d\Lambda^4_{111} = (\Lambda^4_{(4)} + k_1\Lambda^3_{111})\theta,$$
$$d\Lambda^I_{(4)} + \Lambda^K_{(4)}\omega^I_K = \Lambda^I_{(5)}\theta, \dots .$$

Отже, величини $\{\Lambda^1_{111}\}, \{\Lambda^2_{111}\}, \{\Lambda^3_{111}\}$ і $\{\Lambda^4_{111}\}$ утворюють самостійні геометричні об'єкти. Вони є відносними інваріантами вздовж кожної локально однорідної простороподібної лінії з $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$.

Третьою кривиною лінії цього класу назвемо інваріант

$$k_3 := -\frac{1}{k_1 k_2}\Lambda^1_{111}.$$

Локально однорідні простороподібні лінії з ненульовими першою і другою кривинами та з визначеною у всіх точках лінії третьою кривиною назвемо однорідними простороподібними лініями загального положення у чотиривимірному нейтральному просторі. Однорідні простороподібні лінії загального положення з нульовою третьою кривиною складають клас однорідних простороподібних ліній роду 3.

Теорема 3. *Рід однорідної простороподібної лінії в нейтральному чотиривимірному просторі збігається з найменшим числом, яке є вимірністю тієї афінної площини, що містить усі точки цієї лінії.*

Теорема 4. *Для однорідної простороподібної лінії загального положення в чотиривимірному нейтральному просторі компоненти фундаментальних об'єктів набувають значень*

$$\Lambda^1 = \Lambda^2 = \Lambda^3 = 0, \Lambda^4 = 1,$$

$$\Lambda^1_1 = \Lambda^2_1 = \Lambda^4_1 = 0, \Lambda^3_1 = k_1,$$

$$\Lambda^1_{11} = 0, \Lambda^2_{11} = k_1 k_2, \Lambda^4_{11} = -k_1^2,$$

$$\Lambda^1_{111} = -k_1 k_2 k_3, \Lambda^4_{111} = -3k_1\Lambda^3_{11}, ..., \qquad (14)$$

Λ^3_{11}, Λ^2_{111}, Λ^3_{111} — довільні функції.

Теорема 5. *Для однорідної простороподібної лінії загального положення в чотиривимірному нейтральному просторі правильні формули Френе*

$$d\underset{x_1}{\vec{e}} = k_3 \underset{x_2}{\vec{e}}\,\theta,$$

$$d\underset{x_2}{\vec{e}} = (-k_3\underset{x_4}{\vec{e}} + k_2\underset{x_3}{\vec{e}})\theta,$$

$$d\underset{x_3}{\vec{e}} = (k_2\underset{x_2}{\vec{e}} - k_1\underset{x_4}{\vec{e}})\theta,$$

$$d\underset{x_4}{\vec{e}} = k_1\underset{x_3}{\vec{e}}\,\theta.$$

Теорема 6. *Система зовнішніх диференціальних рівнянь для однорідних простороподібних ліній загального положення в чотиривимірному нейтральному просторі має вигляд*

$$\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \Omega^4 = \theta, d\theta = 0,$$

$$\omega^4_1 = \omega^4_2 = \omega^3_1 = 0, \omega^4_3 = -k_1\theta, \omega^3_2 = k_2\theta,$$

$$\omega^2_1 = k_3\theta, dk_1 = \Lambda^3_{11}\theta, dk_2 = \frac{1}{k_1}(\Lambda^2_{111} - 2k_2\Lambda^3_{11})\theta,$$

$$d\Lambda^3_{11} = (\Lambda^3_{111} - k_1k_2^2 - k_1^3)\theta,$$

$$dk_3 = \frac{1}{k_1k_2}(k_2k_3\Lambda^3_{11} - 2k_3\Lambda^2_{111} - \Lambda^1_{(4)})\theta,$$

$$d\Lambda^1_{111} = (\Lambda^1_{(4)} + k_3\Lambda^2_{111})\theta,$$

$$d\Lambda^2_{111} = (\Lambda^2_{(4)} + k_1k_2k_3^2 - k_2\Lambda^3_{111})\theta,$$

$$d\Lambda^3_{111} = (\Lambda^3_{(4)} - k_1\Lambda^4_{111} - k_2\Lambda^2_{111})\theta,$$

$$d\Lambda^4_{111} = (\Lambda^4_{(4)} + k_1\Lambda^3_{111})\theta,$$

$$d\Lambda^I_{(p)} + \Lambda^K_{(p)}\omega^I_K = \Lambda^I_{(p+1)}\theta, p = 4, 5, \ldots .$$

Твердження теорем 4 і 6 доводяться ходом інваріантних побудов для однорідних простороподібних ліній загального положення. Якщо компоненти фундаментальних об'єктів мають значення, вказані в формулах (14), то стає очевидним твердження теореми 5. Доведемо теорему 3. Якщо a ($a = 1, 2, 3$) — рід однорідної простороподібної лінії, то в кожній звичайній точці кривої роду a існує a кривин та a формул Френе. Отже, усі точки лінії роду a містяться в деякій a-вимірній афінній площині нейтрального чотиривимірного простору.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана.— М.: Гостехиздат, 1948.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1953.— N2.— С.275—382.

3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геометр. семинара: Сб. науч. тр.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— **1**.— 1966.— С.133—190.

4. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Труды Геометр. семинара: Сб. науч. тр.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— **4**.— 1973.— С.7—70.

5. *Петруняк О.М.* Про властивості однорідних ліній простору Мінковського // Матеріали студ. наук. конф. Чернівецького держуніверситету. Кн.2.— Чернівці: Рута, 1998.— С.102—103.

6. *Петруняк О.М.* Ізотропні лінії n-вимірного простору Мінковського // Матеріали студ. наук. конф. Чернівецького університету. Кн.3. Фізико-математичні науки.— Чернівці: Рута, 1999.— С.32—33.

7. *Домбровський Р.Ф., Мудряк Н.А.* Диференціально-геометрична характеристика гвинтових ліній простору Мінковського // Матеріали міжвузівської регіональної наук. конф. "Математика, її застосування та викладання".— Кіровоград: РВГІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 1999.— С.29—31.

8. *Домбровський Р.Ф., Кирницька Н.Ф.* Про одну властивість поля нормалей лінії квазікватерніонного простору // Тези доп. VIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука.— К.: КТУ, 2000.— С.273.

9. *Домбровский Р.Ф., Мироник В.И., Осадца И.С.* Фундаментальные объекты и кривизна локально однородных времениподобных линий нейтрального пространства // Материалы Международн. школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В.Ефимова.— Абрау-Дюрсо: МГУ им. М.В.Ломоносова и Ростовский ун-т, 2000.— С.49—51.

10. *Домбровський Р.Ф., Юрочко О.М.* Диференціальна геометрія однорідних ліній n-вимірного простору Мінковського // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 2000.— Вип.5.— С.108—125.

Стаття надійшла до редколегії 08.12.2000