УДК 517.95

©2001 р. **Г.П. Доманська**

Львівський національний університет імені івана Франка, Львів

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНІЄЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянуто мішану задачу для нелінійної псевдопараболічної системи в необмеженій (за просторовими змінними) області. Встановлено умови існування розв'язку вказаної задачі.

The initial-boundary value problem for a nonlinear pseudoparabolic system in unbounded (with respect to space variables) domain is considered. Conditions of the existence of solution for the problem are obtained.

Математичне описання багатьох фізичних та механічних процесів зводиться до крайових задач для псевдопараболічних рівнянь та систем. Прикладами таких процесів є фільтрація рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], передача тепла в гетерогенному середовищі [2], перенесення вологи в грунті [3], дифузія у тріщинуватому середовищі з поглинанням або частковим насиченням, процес застигання клею [4] та ін. Саме тому, починаючи з 50-х років двадцятого століття, вивченню різноманітних задач для вказаних рівнянь та систем присвячено чимало праць [5—10]. Проте у згаданих вище роботах досліджувалися лише лінійні рівняння. Ми ж розглянемо нелінійну систему і доведемо існування розв'язку мішаної задачі для цієї системи.

Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею Γ. Щодо геометрії області Ω зробимо таке припущення: вважатимемо, що існує послідовність областей $\{\Omega^\tau\}$, які залежать від параметра $\tau \in \Pi$ (тут Π – зліченна множина додатних чисел) і мають властивості:

1) $\Omega = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Omega^\tau$, $\Omega^\tau = \Omega \cap B_\tau$, де B_τ – n-вимірна куля радіуса τ з центром у нулі;

2) $\partial\Omega^\tau = \Gamma_1^\tau \cup \Gamma_2^\tau$, де $\Gamma_1^\tau, \Gamma_2^\tau$ – кусково-гладкі поверхні; $\mathrm{mes}\{\Gamma_1^\tau \cap \Gamma_2^\tau\} = 0$, $\Gamma_1^\tau \neq \varnothing$, $\Gamma_1^\tau \cap \Gamma \neq \varnothing$, $\forall \tau \in \Pi$; $\Gamma = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Gamma_1^\tau$.

Нехай $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T < \infty$; $S_T = \Gamma \times (0,T)$. Введемо потрібні простори. Говоритимемо, що деяка функція належить до $L^\gamma_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ($\gamma > 2$), якщо вона належить до простору $L^\gamma(\Omega^\tau)$ для довільного τ з множини Π. Позначимо через $L^\gamma_{\mathrm{loc}}(Q_T)$ простір $L^\gamma\left((0,T); L^\gamma_{\mathrm{loc}}(\Omega)\right)$. Для просторів Соболєва використовуватимемо стандартні позначення H^1 та $W^{1,\gamma}$.

В області Q_T розглянемо систему

$$|u_t|^{\gamma-2}u_t - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}\right)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} + D(x,t)\,|u|^{\gamma-2}\,u = F(x,t) \qquad (1)$$

з умовами

$$u\big|_{\Gamma\times[0,T]} = 0, \qquad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0. \qquad (3)$$

Тут A_{ij}, B_{ij}, D – квадратні матриці розміру $m\times m$, причому матриця D діагональна з елементами $d_s(x,t)$ ($s=\overline{1,m}$) на головній діагоналі; $u = (u_1,...,u_m)^T$, $F = (F_1,...,F_m)^T$; $\gamma > 2$. Нехай надалі $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$; $|\cdot|$ – модуль в $\mathbb{R}^m$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (1) – (3) називатимемо функцію u, яка має такі властивості:*

1) функція u належить до простору $W^{1,\gamma}\left((0,T); L^\gamma_{\mathrm{loc}}(\Omega)\right) \cap H^1\left((0,T); H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega)\right)$;

2) функція u задовольняє тотожність

$$\int\limits_{Q_T} \Big[\left(|u_t|^{\gamma-2}\,u_t, v\right) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}+B_{ij}(x,t)u_{x_i},v_{x_j}\right)+$$

$$+\left(D(x,t)\,|u|^{\gamma-2}\,u,v\right)\Big]dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_T}(F(x,t),v)\,dxdt \tag{4}$$

для довільної функції v з простору $C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega))$.

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи виконуються умови (A), (B), (D), якщо:

$$\begin{aligned}
(A):\ & a\sum_{i=1}^{n}|\xi^i|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right),a>0;\\
& \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ijt}\xi^i,\xi^j\right)\le 0;\\
& A_{ij}(x,t)=A_{ji}(x,t),\\
& A_{ij}(x,t)=A_{ij}^T(x,t),\ \forall i,j\in\{1,...,n\};\\
& A_{ij}\in L^\infty(Q_T),\\
& A_{ijt}\in L^\infty(Q_T),\quad \forall i,j\in\{1,...,n\};\\
(B):\ & b\sum_{i=1}^{n}|\xi^i|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right),b>0;\\
& \sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ijt}\xi^i,\xi^j\right)\le 0;\\
& B_{ij}(x,t)=B_{ji}(x,t),\\
& B_{ij}(x,t)=B_{ij}^T(x,t),\ \forall i,j\in\{1,...,n\};\\
& B_{ij}\in L^\infty(Q_T),\\
& B_{ijt}\in L^\infty(Q_T),\quad \forall i,j\in\{1,...,n\};\\
(D):\ & 0<d\le d_s(x,t),d_{st}(x,t)\le 0,s=\overline{1,m};\\
& D\in L^\infty(Q_T),\ D_t\in L^\infty(Q_T);
\end{aligned}$$

для майже всіх точок (x,t) з Q_T та для довільних векторів ξ^i і ξ^j з $\mathbb{R}^m$, $1\le i,j\le n$.

Перш ніж переходити до необмеженої області Q_T, доведемо існування розв'язку задачі (1) – (3) в обмеженому циліндрі. Для цього в $Q_T^*=\Omega^*\times(0,T)$ (тут Ω^* – обмежена підобласть Ω, межа якої Γ^* є кусково-гладкою поверхнею, що має непорожній перетин з Γ) розглянемо задачу

$$\varepsilon u_{tt}+|u_t|^{\gamma-2}u_t-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}\right)_{x_j}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j}+$$

$$+D(x,t)\,|u|^{\gamma-2}\,u=F^*(x,t), \tag{5}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0^*,\quad u\big|_{\Gamma^*\times(0,T)}=0, \tag{6}$$

$$u_t\big|_{t=0}=0. \tag{7}$$

Означення 2. *Розв'язком задачі (5) – (7) називатимемо таку функцію $u^{*,\varepsilon}$ з $W^{1,\gamma}\left((0,T);L^\gamma(\Omega^*)\right)\cap H^1\left((0,T);H_0^1(\Omega^*)\right)$, яка задовольняє тотожність*

$$\int\limits_{Q_T^*}\Big[-\varepsilon\,(u_t^{*,\varepsilon},v_t)+\left(|u_t^{*,\varepsilon}|^{\gamma-2}\,u_t^{*,\varepsilon},v\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{*,\varepsilon}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{*,\varepsilon},v_{x_j}\right)+$$

$$+\left(D(x,t)\,|u^{*,\varepsilon}|^{\gamma-2}\,u^{*,\varepsilon},v\right)\Big]dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_T^*}(F^*(x,t),v)\,dxdt-\varepsilon\int\limits_{\Omega_T^*}(u_t^{*,\varepsilon},v)\,dx \tag{8}$$

для довільної функції v з простору $C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega^*))$.

Лема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (5) виконуються умови (A), (B), (D); $\gamma>2$; $F^*\in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(Q_T^*)$, $u_0^*\in L^\gamma(\Omega^*)\cap H_0^1(\Omega^*)$. Тоді існує розв'язок задачі (5) – (7).*

Доведення. Нехай $\left\{\varphi^{*,k}(x)\right\}$ — ортонормована база простору $L^\gamma(\Omega^*)\cap H_0^1(\Omega^*)$. Приймемо, що $u^{*,\varepsilon,N}=\sum\limits_{k=1}^{N}\varphi^{*,k}(x)c_k(t)$, де $c_k(t)$ визначається із задачі

$$\varepsilon\sum_{k=1}^{N}c_k''\int\limits_{\Omega^*}\left(\varphi^{*,k},\varphi^{*,s}\right)dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega^*}\Bigg[\left(\left|\sum_{k=1}^{N}c_k'\varphi^{*,k}\right|^{\gamma-2}\sum_{k=1}^{N}c_k'\varphi^{*,k},\varphi^{*,s}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)\sum_{k=1}^{N}c'_k\varphi^{*,k}_{x_i},\varphi^{*,s}_{x_j}\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,t)\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi^{*,k}_{x_i},\varphi^{*,s}_{x_j}\right)+$$
$$+\left(D(x,t)\left|\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi^{*,k}\right|^{\gamma-2}\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi^{*,k},\varphi^{*,s}\right)-$$
$$-\left(F^*(x,t),\varphi^{*,s}\right)]\,dx\equiv\Phi\left(c'_k,c_k,t\right),\qquad(9)$$
$$c_k(0)=\left(u^*_0,\varphi^{*,k}\right)_{L^\gamma(\Omega^*)\cap H^1_0(\Omega^*)},\qquad(10)$$
$$c'_k(0)=0,\quad (k=\overline{1,N}).\qquad(11)$$

За теоремою Каратеодорі [11, с.54] задача (9) – (11) має розв'язок. Після нескладних перетворень з системи (9) можна отримати оцінку

$$\int_{\Omega^*_T}\left[\frac{\varepsilon}{2}|u^{*,\varepsilon,N}_t|^2+\frac{d}{\gamma}|u^{*,\varepsilon,N}|^\gamma+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,T)u^{*,\varepsilon,N}_{x_i},u^{*,\varepsilon,N}_{x_j}\right)\right]dx+$$
$$+\int_{Q^*_T}\left[\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)|u^{*,\varepsilon,N}_t|^\gamma+\right.$$
$$\left.+a\sum_{i=1}^{n}|u^{*,\varepsilon,N}_{x_it}|^2\right]dxdt\le$$
$$\le\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_{Q^*_T}|F^*(x,t)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dxdt+$$
$$+\int_{\Omega^*_0}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,0)u^*_{0x_i},u^*_{0x_j}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\hat{D}}{\gamma}|u^*_0|^\gamma\right]dx,\qquad(12)$$

де $\hat{D}=\max\limits_{1\le i\le m}\sup\limits_{Q_T}d_i(x,t)$. З (12) випливає, що норми $\|u^{*,\varepsilon,N}_t\|$, $\|u^{*,\varepsilon,N}\|$, $\|u^{*,\varepsilon,N}_{x_i}\|$ і $\|u^{*,\varepsilon,N}_{x_it}\|$, $i\in\{1,...,n\}$, — обмежені відповідно в в $L^\gamma(Q^*_T)$, $L^\infty\left((0,T);L^\gamma(\Omega^*)\right)$, $L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega^*)\right)$ і $L^2(Q^*_T)$.

Оскільки $2<\gamma<\infty$, то для обмеженої області Ω^*

$$L^\infty(\Omega^*)\subset L^\gamma(\Omega^*)\subset L^2(\Omega^*),$$

вкладення $W^{1,\gamma}(Q^*_T)$ в $L^\gamma(Q^*_T)$ є компактним. Отже, з послідовності $\{u^{*,\varepsilon,N}\}$ можна вибрати підпослідовність $\{u^{*,\varepsilon,N_k}\}$, яка збігається слабко до деякої функції $u^{*,\varepsilon}$ в просторі $H^1\left((0,T);H^1_0(\Omega^*)\right)$, а в просторі $L^\gamma(Q^*_T)$ збігається сильно і майже скрізь. Користуючись методом монотонності [12, с.233–239], можна довести, що $\left|u^{*,\varepsilon,N_k}_t\right|^{\gamma-2}u^{*,\varepsilon,N_k}_t$ слабко збігається в $L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(Q^*_T\right)$ до $|u^{*,\varepsilon}_t|^{\gamma-2}u^{*,\varepsilon}_t$. Таким чином, $u^{*,\varepsilon}$ є розв'язком (5)—(7), тобто задовольняє (8).

Лема 2. *За припущень леми 1 існує розв'язок задачі (5)—(6) при* $\varepsilon=0$.

Доведення. Зауважимо, що для розв'язку $u^{*,\varepsilon}$ задачі (5)—(7) оцінка (12) також правильна. Далі вибираємо $\{u^{*,\varepsilon_m}\}$, яка збігається до u^* при $\varepsilon_m\to+0$, і переходимо у (8) до границі при $\varepsilon_m\to 0$. Легко помітити, що

$$\varepsilon\int_{\Omega^*}(u^{*,\varepsilon}_t,v)\,dx\le\varepsilon\left(\int_{\Omega^*}|u^{*,\varepsilon}_t|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(\int_{\Omega^*}|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{2}\int_{\Omega^*}|u^{*,\varepsilon}_t|^2dx+$$
$$+\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{2}\int_{\Omega^*}|v|^2dx\to 0,\quad\varepsilon\to 0,$$

а тому u^* буде розв'язком (5)—(6) при $\varepsilon=0$, а, отже, і розв'язком задачі (1)—(3) в обмеженому циліндрі Q^*_T.

Теорема. *Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови (A), (B), (D);* $\gamma>2$;

$$F\in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}_{\mathrm{loc}}(Q_T);\quad u_0\in L^\gamma_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Тоді існує розв'язок задачі (1) – (3).

Доведення. Область Ω була введена спеціальним способом, тому ми можемо вибрати послідовність вкладених циліндрів

$Q_T^\tau = \Omega^\tau \times (0,T)$ і в кожному з них розглянути задачу

$$|u_t|^{\gamma-2}u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x,t)u_{x_i t}\right)_{x_j} -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} -$$

$$+D(x,t)\,|u|^{\gamma-2}\,u = F^\tau(x,t), \qquad (13)$$

$$u|_{t=0} = u_0^\tau, \quad u|_{\Gamma^\tau\times(0,T)} = 0, \qquad (14)$$

де функція F^τ є звуженням функції F на область Q_T^τ, тобто

$$F^\tau(x,t) \;=\; \begin{cases} F(x,t), & (x,t)\in Q_T^\tau, \\ \quad 0, & (x,t)\in Q_T\setminus Q_T^\tau; \end{cases}$$

а за функцію u_0^τ візьмемо $u_0(x)\zeta^\tau(|x|)$, причому функція ζ^τ належить до $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ і така, що $\zeta^\tau(r)=1$ при $|r|\le\tau-\delta$, $\zeta^\tau(r)=0$ при $|r|\ge\tau$, $0\le\zeta^\tau(r)\le 1$ при $\tau-\delta<|r|<\tau$; фіксоване додатне число δ менше за будь-яке $\tau\in\Pi$.

За лемою 2 задача (13)—(14) має розв'язок u^τ, що належить до $W^{1,\gamma}\left((0,T);L^\gamma(\Omega^\tau)\right) \cap H^1\left((0,T);H_0^1(\Omega^\tau)\right)$. Продовжимо його нулем на всю область Q_T. Зрозуміло, що для довільної функції $v\in C^\infty\left([0,T];C_0^\infty(\Omega)\right)$ та будь-якого числа η з проміжку $(0,T)$ правильною є така тотожність:

$$\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta} \Big[\left(|u_t^\tau|^{\gamma-2}\,u_t^\tau, v\right) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u^\tau_{x_i t} + B_{ij}(x,t)u^\tau_{x_i}, v_{x_j}\right) +$$

$$+\left(D(x,t)\,|u^\tau|^{\gamma-2}\,u^\tau, v\right)\Big]\,dxdt =$$

$$= \int_0^\eta\int_{\Omega_\eta} \left(F^\tau(x,t), v\right)dxdt. \qquad (15)$$

Зауважимо, що рівність (15) буде правильною і для довільної функції v з простору $L^\gamma\left(Q_T^\tau\right)\cap H^1\left((0,T);H_0^1(\Omega^\tau)\right)$. Приймемо в (15) $v=(u^\tau+u_t^\tau)\psi(x)$, $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ і оцінимо кожен з доданків зокрема:

$$I_1 = \int_0^\eta\int_{\Omega_\eta} \big(|u_t^\tau|^{\gamma-2}u_t^\tau +$$

$$+ D(x,t)|u^\tau|^{\gamma-2}u^\tau, (u^\tau+u_t^\tau)\psi\big)\,dxdt \ge$$

$$\ge \int_{\Omega_\eta}\frac{d}{\gamma}|u^\tau|^\gamma\psi dx - \int_{\Omega_0}\frac{\hat{D}}{\gamma}|u_0^\tau|^\gamma\psi dx +$$

$$+\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[|u_t^\tau|^\gamma + d|u^\tau|^\gamma\right]\psi dxdt -$$

$$-\left(\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left(|u_t^\tau|^{\gamma-1}\delta_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\psi dxdt\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \times$$

$$\times\left(\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}|u^\tau|^\gamma\left(\delta_1^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^\gamma\psi dxdt\right)^{\frac{1}{\gamma}} \ge$$

$$\ge \int_{\Omega_\eta}\frac{d}{\gamma}|u^\tau|^\gamma\psi dx - \int_{\Omega_0}\frac{\hat{D}}{\gamma}|u_0^\tau|^\gamma\psi dx +$$

$$+\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[\left(1-\frac{(\gamma-1)\delta_1}{\gamma}\right)|u_t^\tau|^\gamma +\right.$$

$$\left.+\left(d-\frac{1}{\gamma\delta_1^{\gamma-1}}\right)|u^\tau|^\gamma\right]\psi dxdt,$$

$$I_2 = \int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\sum_{i,j=1}^{n}\big(A_{ij}(x,t)u^\tau_{x_i t} +$$

$$+ B_{ij}(x,t)u^\tau_{x_i}, \left((u^\tau+u_t^\tau)\psi\right)_{x_j}\big)\,dxdt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\eta}\sum_{i,j=1}^{n}\big((A_{ij}(x,t)+$$

$$+\;B_{ij}(x,t))\,u^\tau_{x_i}, u^\tau_{x_j}\big)\,\psi dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n}\big((A_{ij}(x,0)+$$

$$+\;B_{ij}(x,0))\,u^\tau_{0x_i}, u^\tau_{0x_j}\big)\,\psi dx +$$

$$+\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[\left(a-\hat{A}n\delta_2\right)\sum_{i=1}^n\left|u^\tau_{x_it}\right|^2+\right.$$

$$+\left(b-\hat{B}n\delta_2\right)\sum_{i=1}^n\left|u^\tau_{x_i}\right|^2-$$

$$\left.-\frac{2n^2\delta_2}{\gamma}\left(|u^\tau_t|^2+|u^\tau|^2\right)\right]\psi dxdt-T\Psi,$$

$$I_3=\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left(F^\tau(x,t),(u^\tau_t+u^\tau)\psi\right)dxdt\leq$$

$$\leq\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[\frac{\delta_3}{\gamma}\left(|u^\tau_t|^\gamma+|u^\tau|^\gamma\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2(\gamma-1)}{\gamma\delta_3^{\frac{1}{\gamma-1}}}|F^\tau(x,t)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]\psi dxdt,$$

де

$$\hat{A}=\max_{1\leq i,j\leq n}\sup_{Q_T}\|A_{ij}(x,t)\|^2,$$
$$\hat{B}=\max_{1\leq i,j\leq n}\sup_{Q_T}\|B_{ij}(x,t)\|^2,$$
$$\Psi=\frac{\gamma-2}{2\gamma\delta_2^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{|\psi_{x_i}|^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}}{\psi^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}}dx,$$

δ_i $(i\in\{1,2,3\})$ – довільні додатні числа. Із наведених оцінок та рівності (15) отримуємо

$$\int_{\Omega_\eta}\frac{d}{\gamma}|u^\tau|^\gamma\psi dx+$$

$$+\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[\left(a-\hat{A}n\delta_2\right)\sum_{i=1}^n|u^\tau_{x_it}|^2+\right.$$

$$+\left(b-\hat{B}n\delta_2\right)\sum_{i=1}^n|u^\tau_{x_i}|^2+$$

$$+\left(1-\frac{(\gamma-1)\delta_1}{\gamma}-\frac{2n^2\delta_2}{\gamma}-\frac{\delta_3}{\gamma}\right)|u^\tau_t|^\gamma+$$

$$+\left(d-\frac{1}{\gamma\delta_1^{\gamma-1}}-\frac{2n^2\delta_2}{\gamma}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\delta_3}{\gamma}\right)|u^\tau|^\gamma\right]\psi dxdt\leq\Phi^\tau \qquad (16)$$

де

$$\Phi^\tau=T\Psi+\int_{\Omega_0}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n((A_{ij}(x,0)+\right.$$

$$\left.+B_{ij}(x,0))u^\tau_{0x_i},u^\tau_{0x_j})+\frac{\hat{D}}{\gamma}|u^\tau_0|^\gamma\right]\psi dx$$

$$+\frac{2(\gamma-2)}{\gamma\delta_3^{\frac{1}{\gamma-1}}}\int_{Q_T}|F^\tau(x,t)|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\psi dxdt.$$

Якщо підібрати δ_i $(i\in\{1,2,3\})$ з умов

$$\delta_1\leq\tfrac{\gamma}{8(\gamma-1)},\quad \delta_2\leq\min\left\{\tfrac{a}{2\hat{A}n},\tfrac{b}{2\hat{B}n},\tfrac{\gamma}{8n^2}\right\},$$
$$\delta_3\leq\tfrac{\gamma}{8},$$

то справджується нерівність

$$\int_{\Omega_\eta}\frac{d}{\gamma}|u^\tau|^\gamma\psi dx+$$

$$+\frac{1}{2}\min\{a,b,1\}\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[\sum_{i=1}^n|u^\tau_{x_it}|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n|u^\tau_{x_i}|^2+|u^\tau_t|^\gamma\right]\psi dxdt\leq$$

$$\leq\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left(\hat{D}+\frac{1}{\gamma\delta_1^{\gamma-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2n^2\delta_2}{\gamma}+\frac{\delta_3}{\gamma}\right)|u^\tau|^\gamma\psi dxdt+\Phi^\tau.$$

За лемою Гронуолла-Белмана отримуємо

$$\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}|u^\tau|^\gamma\psi dx\leq\frac{\gamma\Phi^\tau T}{d}e^{\frac{MT}{d}},$$

$$\min\left\{\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{1}{2}\right\}\int_0^\eta\int_{\Omega_\eta}\left[\sum_{i=1}^n|u^\tau_{x_it}|^2+\sum_{i=1}^n|u^\tau_{x_i}|^2+\right.$$

$$\left.+|u^\tau_t|^\gamma\right]\psi dxdt\leq\frac{M\Phi^\tau T}{d}e^{\frac{MT}{d}}+\Phi^\tau, \qquad (17)$$

де

$$M=\hat{D}\gamma+\frac{1}{\delta_1^{\gamma-1}}+2n^2\delta_2+\delta_3.$$

Нехай $\alpha > 0$, $R \in \Pi$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \left(\frac{R^2-|x|^2}{R}\right)^{\alpha}, & 0 \le |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Тоді

$$\psi_{x_i}(x) = \begin{cases} -\alpha \left(\frac{R^2-|x|^2}{R}\right)^{\alpha-1} \frac{2x_i}{R} & 0 \le |x| \le R, \\ 0 & |x| > R, \end{cases}$$

а, отже,

$$|\psi| \le (2R)^{\alpha}, \qquad |\psi_{x_i}| \le \alpha 2^{\alpha} R^{\alpha-1}.$$

З наведених оцінок випливає, що

$$\Psi = \frac{\gamma-2}{2\gamma\delta_2^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\psi_{x_i}|^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}}{\psi^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}} dx \le$$

$$\le \frac{\gamma-2}{2\gamma\delta_2^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}} n 2^{\alpha} \alpha^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}} R^{\alpha-\frac{2\gamma}{\gamma-2}} \int\limits_{B_R} dx =$$

$$= \frac{\gamma-2}{2\gamma\delta_2^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}} n 2^{\alpha} \alpha^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}} R^{n+\alpha-\frac{2\gamma}{\gamma-2}} P_n,$$

де P_n — коефіцієнт, який визначається з рівності

$$\int\limits_{B_R} dx = P_n R^n =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}, & n = 2k, \\ \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!} R^{2k+1}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Оцінимо інтеграли з лівої частини (17) через інтеграли по вужчій області Ω^{R_0}, $R_0 \in \Pi$, $R_0 < R$, а саме

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^{R_0}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i t}^{\tau}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{\tau}|^2 + |u_t^{\tau}|^{\gamma}\right] \times$$
$$\times (R-R_0)^{\alpha} \, dxdt \le$$
$$\le \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i t}^{\tau}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{\tau}|^2 + |u_t^{\tau}|^{\gamma}\right] \times$$
$$\times \left(\frac{R^2-|x|^2}{R}\right)^{\alpha} dxdt \le$$
$$\le \frac{2}{\min\{a,b,1\}} \left[\frac{M\Phi^R T}{d} e^{\frac{MT}{d}} + \Phi^R\right],$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^{R_0}} |u^{\tau}|^{\gamma} (R-R_0)^{\alpha} \, dxdt \le$$
$$\le \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^{R}} |u^{\tau}|^{\gamma} \left(\frac{R^2-|x|^2}{R}\right)^{\alpha} dx \le$$
$$\le \frac{\gamma \Phi^R T}{d} e^{\frac{MT}{d}}.$$

Очевидно, що існує така підпослідовність $\{u^{\tau_k}\}$ послідовності $\{u^{\tau}\}$, що
$u^{\tau_k} \to u$ слабко в $W_1^{\gamma}\left((0,T); L_{\text{loc}}^{\gamma}(\Omega)\right)$,
$u_{x_i}^{\tau_k} \to u_{x_i}$ слабко в $H^1\left((0,T); L_{\text{loc}}^{2}(\Omega)\right)$
$(i = 1, ...n)$.

Перейдемо в (15) до границі при $\tau_k \to \infty$, використовуючи вже згадуваний метод монотонності й компактність вкладення $W^{1,\gamma}(Q_T^{\tau})$ в $L^{\gamma}(Q_T^{\tau})$ в кожній обмеженій області Q_T^{τ}. Знайдена функція u і є розв'язком вихідної задачі (1)—(3). Теорему доведено.

Дослідження даної задачі було б повним, якби вдалося довести ще й єдиність розв'язку. На жаль, для системи типу (1) такий результат ще не встановлений.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех.— I960.— **24**, вып. 5.— С. 852—864.

2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. "География и геофизика".— 1948.— **12**, N1.— С. 27—45.

3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв.— М.: Наука, 1976.— 352 с.

4. *Majchrowski M.* On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equatons and pseudoparabolic equations // Demonstr. math.— 1993.— **26**, N1.— P. 255—275.

5. *Хилькевич Г.И.* О поведении решений псевдопараболических уравнений в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности // Дифференциальные уравнения и их приложения: Сб. тр.— М., 1984.— С. 170—175.

6. *Showalter R.E.* Pseudoparabolic partial differential equations: Doct. diss. Univ. Ill.— 1968.— 75 p. // Dissert. Abstrs.— 1969.— **29**, N8.— P. 2994.

7. *Showalter R.E.* Partial differential equations of Sobolew-Galperin type // Pacif. J. Math.— 1969.— **31**, N3.— P.787—793.

8. *Ляшко С.І.* Аналог методу Гальоркіна для розв'язання псевдопараболічних рівнянь // Доп. АН УРСР.— 1991.— N8.— С.54—55.

9. *Кожанов А.И.* Смешанная задача для одного класса вырождающихся псевдопараболических систем // Труды Международного семинара "Дифференциальные уравнения и приложения".— Самара: СамГУ, 1997.— С.47—59.

10. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— **76**, N2.— P. 253—257.

11. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.— 336 с.

12. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 608 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.2000