УДК 517.982

©2001 р. Т.І. Готинчан, Р.М. Атаманюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

РІЗНІ ФОРМИ ОЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРІВ ТИПУ W

Наведені еквівалентні форми означення просторів типу W.

Equivalent forms of definition of W type spaces are presented.

Простори типу W були введені Б.Л. Гуревичем у 50-х роках. Важливість цих просторів полягає в тому, що вони широко використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності розв'язків задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від часу) коефіцієнтами та рівнянь, що містять псевдодиференціальні оператори, а також проблеми про розвинення самоспряженних диференціальних операторів за власними функціями.

При вирішенні цих проблем важливо мати оцінки похідних функцій з класів типу W на дійсній осі, оскільки фундаментальні розв'язки задачі Коші для вказаних рівнянь, як правило, є елементами тих чи інших просторів типу W.

Розглянемо функцію ω: $[0,+\infty) \to \to [0,+\infty)$, яка є неперервною і монотонно зростаючою, причому $\omega(0)=0$, $\omega(1)>1$, $\omega(\infty)=\infty$. Очевидно, що для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ рівняння $x\omega(x)=n$ має єдиний розв'язок $\rho_n<n$ при $n\geq 1$ і $\rho_0=0$ при $n=0$. Послідовність $\{\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ є зростаючою і необмеженою.

Для $x\geq 0$ розглянемо $\Omega(x)=\int\limits_0^x \omega(\eta)d\eta$. Функція Ω є диференційовною, зростаючою, опуклою вниз на $[0,+\infty)$, причому $\Omega(0)=0$, $\Omega(+\infty)=+\infty$. Довизначимо парним чином її на $(-\infty,0]$.

Розглянемо також функцію $\mu:[0,+\infty)\to \to [0,+\infty)$, яка має ті ж властивості, що й функція ω. Для $x\geq 0$ визначимо

$$M(x)=\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi,\ M(-x)=M(x).$$

За функціями M,Ω побудуємо основні простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ [1], де

$$(\varphi\in W_M)\Longleftrightarrow (\exists n>0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists C_n>0$$
$$\forall x\in\mathbb{R}: |\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n\exp\{-M(ax)\});$$
$$(\varphi\in W^\Omega)\Longleftrightarrow (\exists b>0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists C_k>0$$
$$\forall z=x+iy\in\mathbb{C}: |z^{(k)}\varphi(z)|\leq C_k\exp\{\Omega(by)\});$$
$$(\varphi\in W_M^\Omega)\Longleftrightarrow (\exists a>0 \quad \exists b>0 \quad \exists C>0$$
$$\forall z=x+iy\in\mathbb{C}:$$
$$|\varphi(z)|\leq C\exp\{-M(ax)+\Omega(by)\}).$$

Теорема 1. *Для функції $\varphi\in W_M$ наступні твердження еквівалентні:*

$$1)\ \exists a>0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists C_n>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}:$$
$$|\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n\exp\{-M(ax)\};$$
$$2)\ \exists a_1>0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists C_n^{(1)}>0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+$$
$$\exists \nu_k\in[0,\,k),\ \nu_0=0,\ \forall x\in\mathbb{R}:$$
$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n^{(1)}\left(\frac{\nu_k}{a_1}\right)^k\exp\{-M(\nu_k)\},$$

де ν_k - розв'язок рівняння $x\mu(x)=k$, $k\in \in\mathbb{Z}_+$.

Доведення. Доведемо, що з першого твердження випливає друге. Нехай справджується твердження 1). Розглянемо довільне $k\in\mathbb{Z}_+$ і домножимо обидві частини даної нерівності на $|x|^k$, $x\neq 0$. Тоді

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n|x|^k\exp\{-M(ax)\}.$$

Знайдемо $\sup\limits_{x>0} x^k\exp\{-M(ax)\}$.

Засобами диференціального числення знаходимо, що $x_k = \nu_k/a$ - точка максимуму і

$$\underset{x>0}{sup}\, x^k \exp\{-M(ax)\} = \left(\frac{\nu_k}{a}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\}.$$

Отже,

$$\exists a > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+\, \exists C_n > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\exists \nu_k \in [0,\, k),\, \nu_0 = 0,\, \forall x \in \mathbb{R}\, :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le C_n \left(\frac{\nu_k}{a}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\},$$

де ν_k - розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Нехай тепер є правильним твердження 2). Тоді для $x \neq 0$ отримуємо

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+\, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+\, : |\varphi^{(n)}(x)| \le$$

$$\le C_n^{(1)} \left(\frac{\nu_k}{a_1|x|}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\} = C_n^{(1)} f_{a_1|x|}(\nu_k),$$

де $f_\xi(\nu_k) = \left(\frac{\nu_k}{\xi}\right)^{\nu_k\mu(\nu_k)} \exp\{-M(\nu_k),\, k \in \mathbb{Z}_+$, $\xi > 0$, оскільки $k = \nu_k\mu(\nu_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Отже,

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\, \forall\, x \in \mathbb{R}\, :$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le C_n^{(1)} \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} f_{a_1|x|}(\nu_k).$$

Зазначимо, що $\nu_k \le k$, $M(\nu_k) \le k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і

$$ln(f_\xi(\nu_k)) = k ln\left(\frac{\nu_k}{\xi}\right) - M(\nu_k) =$$

$$= k\left(ln\left(\frac{\nu_k}{\xi}\right) - \frac{M(\nu_k)}{k}\right) \ge$$

$$\ge k\left(ln\left(\frac{\nu_k}{\xi}\right) - 1\right) = k ln\left(\frac{\nu_k}{\xi e}\right).$$

Тоді

$$\lim_{k\to+\infty} ln f_\xi(\nu_k) = +\infty,$$

а, отже,

$$\lim_{k\to+\infty} f_\xi(\nu_k) = +\infty.$$

Оскільки

$$\lim_{k\to 0+} ln f_\xi(\nu_k) = 0,$$

то

$$\lim_{k\to 0+} f_\xi(\nu_k) = 1.$$

Таким чином, для довільного $\xi > 0$ справджується нерівність $\underset{k\in\mathbb{Z}_+}{inf}\, f_\xi(\nu_k) \le 1$.

Одержимо точнішу оцінку. Для цього зафіксуємо $\xi > 0$. Зрозуміло, що

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}_+} f_\xi(\nu_k) \le \inf_{k:\nu_k\le\xi} f_\xi(\nu_k).$$

Оскільки

$$\exists\, a_0 > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+\, : \nu_k \le a_0 + M(\nu_k),$$

то для вказаних k

$$f_\xi(\nu_k) = \left(\frac{\nu_k}{\xi}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\} \le$$

$$\le \exp\{a_0\}\left(\frac{\nu_k}{\xi}\right)^k \exp\{-\nu_k\} \le$$

$$\le \exp\{a_0\}\left(\frac{\nu_k}{\xi e}\right)^{\nu_k},$$

тобто

$$\inf_{k:\nu_k\le\xi} f_\xi(\nu_k) \le \exp\{a_0\}\left(\frac{\nu_k}{\xi e}\right)^{\nu_k}.$$

Позначимо $g_\xi(\nu_k) = \left(\frac{\nu_k}{\xi e}\right)^{\nu_k}$, $k \in \mathbb{N}$, і розглянемо функцію

$$g_\xi(x) = \left(\frac{x}{\xi e}\right)^\xi,\ 0 \le x \le \xi.$$

Тоді

$$ln g_\xi(x) = x(ln x - ln \xi e),$$

$$x_{min} = \xi \text{ і } g_\xi(x_{min}) = \exp\{-\xi\}.$$

Оскільки ми розглядаємо найменше значення не для всіх $x \in [0, \xi]$, а саме для ν_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, то мінімум досягається у найближчому $\nu_{k_\xi} \in (\xi - 1,\, \xi)$.

Тоді

$$\inf_{k:\nu_k\le\xi} f_\xi(\nu_k) = f_\xi(\nu_{k_\xi}) =$$

$$= \left(\frac{\nu_{k_\xi}}{\xi}\right)^{k_\xi} \exp\{-M(\nu_{k_\xi})\} \le \exp\{-M(\nu_{k_\xi})\},$$

оскільки

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+ :\ (k+1)\mu(k+1) - k\mu(k) > \mu(k+1).$$

Це означає, що на $[k,\, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, існує розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

1) Якщо $\xi \le 2$, то $0 \le \nu_{k_\xi} \le \xi$ і

$$\inf_{k:\nu_k \le \xi} f_\xi(\nu_k) \le \exp\{-M(\nu_{k_\xi})\} \le$$

$$\le \exp\{M(1)\}\exp\{-M(\xi/2)\}.$$

2) Якщо $\xi > 2$, то, оскільки $\xi - 1 > \xi/2$, маємо

$$\inf_{k:\nu_k \le \xi} f_\xi(\nu_k) \le \exp\{-M(\xi/2)\}.$$

Отже,

$$\forall\, \xi > 0 : \inf_{k:\nu_k \le \xi} f_\xi(\nu_k) \le$$

$$\le \exp\{M(1)\}\exp\{-M(\xi/2)\}.$$

Тоді

$$\exists a > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+\, \exists C_n > 0\, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le C_n \exp\{-M(ax)\},$$

де $a = a_1/2$, $C_n = C_n^{(1)}\exp\{M(1)\}$.

Теорема 2. *Для функції $\varphi \in W_M^\Omega$ наступні твердження еквівалентні:*

$$1)\, \exists C > 0\, \exists a > 0\, \exists b > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \le C\exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}.$$

$$2)\, \exists C_1 > 0\, \exists a_1 > 0\, \exists b_1 > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\exists \rho_n \in [0, n),\ \rho_0 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le C_1 \frac{n!b_1^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n) - M(a_1 x)\},$$

де ρ_n - розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Доведемо, що з першого твердження випливає друге. Згідно з формулою Коші

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R - коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$.

Тоді

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{\Gamma_R} \frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{n+1}}ds \le$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\max_{z \in |z-x|=R} \frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{n+1}}\oint_{\Gamma_R} ds =$$

$$= n!R\max_{z \in |z-x|=R} \frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{n+1}}.$$

Оскільки $\varphi \in W_M^\Omega$, то, врахувавши твердження 1), одержимо, що

$$|\varphi^{(n)}(z)| \le \frac{Cn!}{R^n}\exp\{-M(ax_0) + \Omega(bR)\},$$

де x_0 - точка максимуму функції $\exp\{-M(a\xi)\}$, $\xi \in [x-R, x+R]$.

Оскільки M є зростаючою на $[0, +\infty)$ функцією, то $x_0 \in \{0,\ x-R,\ x+R\}$. Тому $x_0 = x + \theta R$, де $\theta \in \{0; 1; -1\}$, причому $\theta = 0$, коли $x = 0$.

Враховуючи опуклість вниз і парність функції M, отримуємо

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le \frac{Cn!}{R^n}\exp\{-M(ax) - M(a\theta R)\}\times$$

$$\times \exp\{\Omega(bR)\},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_n(R) = \exp\{\Omega(bR)\}/R^n$, $R \in (0, +\infty)$, є диференційовною, причому

$$\lim_{R\to\infty} g_n(R) = \infty,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

і

$$\lim_{R\to 0+} g_n(R) = \begin{cases} \infty, & n \ge 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_n(R) \ge 0$, $R \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то дана функція досягає свого мінімуму. Знайдемо його. Маємо

$$g_n'(R) = \frac{\exp\{\Omega(bR)\}(bR\omega(bR) - n)}{R^{n+1}}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Прирівняємо до нуля і дістанемо $bR\omega(bR) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Воно має розв'язок $\rho_n = bR_n < n$, коли $n \ge 1$ і $\rho_0 = 0$, коли $n = 0$.

Безпосередньо переконуємось у тому, що кожна функція g_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, досягає свого мінімуму в точці $R_n = \dfrac{\rho_n}{b}$.

Отже, якщо $\varphi \in W_M^{\Omega}$, то

$$\exists\, C > 0\, \exists\, a > 0\, \exists\, b > 0\, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\exists\, R_n = \frac{\rho_n}{b}\ \forall\, x \in \mathbb{R}:$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le C\frac{n!b^n}{\rho_n^n}\exp\{-M(ax)\}\exp\{\Omega(\rho_n)\},$$

де ρ_n - розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Навпаки, нехай нескінченно диференційовна функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умову 2). Тоді її можна аналітично продовжити на всю площину $\mathbb{C}$. Дійсно, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}(\Delta x)^k +$$

$$+\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},\ x \in \mathbb{R},$$

де $|\xi - x| < |\Delta x|$, допускає оцінку

$$\frac{|\varphi^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1} \le$$

$$\le \frac{C_1|b_1\Delta x|^{n+1}}{\rho_{n+1}^{n+1}}\exp\{-M(a_1x)\}\exp\{\Omega(\rho_{n+1})\},$$

$x \in \mathbb{R}$.

Оскільки $\Omega(\rho_n) = \int\limits_0^{\rho_n}\omega(x)dx$, $n \ge 1$, то згідно з теоремою про середнє значення власного інтеграла

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, \xi_n \in (0, \rho_n):\ \Omega(\rho_n) = \rho_n\omega(\xi_n).$$

Якщо ж $n = 0$, то $\rho_0 = 0$ і $\Omega(0) = \omega(0) = 0$.

Функція ω монотонно зростаюча і неперервна, тому для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\Delta x \in \mathbb{R}_+$

$$\Omega(\rho_n) < \rho_n\omega(\rho_n) = n$$

і

$$\frac{|b_1\Delta x|^n\exp\{\Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n} \le \frac{|b_1\Delta x|^n\exp\{n\}}{\rho_n^n} =$$

$$= \exp\{n(ln(b_1e|\Delta x|) - ln\rho_n)\}.$$

Оскільки $\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то

$$\frac{|b_1\Delta x|^n\exp\{\Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n} = o(s^n),$$

де s — довільне число з проміжку $(0,1)$, тобто $\dfrac{|b_1\Delta x|^n\exp\{\Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n} \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $|\Delta x| \in \mathbb{R}_+$ швидше за загальний член довільної геометричної прогресії.

Отже, залишковий член у формулі Тейлора прямує до нуля для довільних $\Delta x \in \mathbb{C}$, тому φ є цілою аналітичною функцією.

Таким чином,

$$\varphi(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}(iy)^n,\ z = x+iy \in \mathbb{C},$$

і

$$|\varphi(x+iy)| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}|y|^n \le$$

$$\le C_1\exp\{-M(a_1x)\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\},$$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Оцінимо $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}$, $y \in \mathbb{R}$. Знайдемо номер $n_0 \in \mathbb{N}$, починаючи з якого

$$\sup_{n\ge n_0}\frac{|b_1ey|}{\rho_n} \le \frac{1}{2}.$$

Безпосередньо встановлюємо, що $n_0 > \rho_n \ge 2|bey|$. Покладемо $n_0 = [(2|b_1ey|)] + 1$ (тут $[s]$ - ціла частина числа s). Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\} +$$

$$+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\} \le$$

$$\le n_0\sup_{0\le n\le n_0-1}\left[\frac{|b_1y|^n}{\rho_n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}\right] + 1 \le$$

$$\leq C_1|b_1ey| \sup_{0\leq n\leq n_0-1}\left[\frac{|b_1y|^n}{\rho_n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}\right]+1.$$

Запишемо

$$\frac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}=\frac{|b_1y|^{n-\rho_n}}{\rho_n^{n-\rho_n}}\times$$

$$\times\exp\{\Omega(\rho_n)-\rho_n\}\frac{|b_1y|^{\rho_n}}{\rho_n^{\rho_n}}\exp\{\rho_n\},$$

$y\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}_+$. Оскільки

$$\frac{|b_1y|^{n-\rho_n}}{\rho_n^{n-\rho_n}}\exp\{\Omega(\rho_n)-\rho_n\}\leq$$

$$\leq\exp\{(n-\rho_n)(ln|b_1y|+1-ln\rho_n)\}=o(s^n),$$

де $s\in(0,1)$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, то:

1) $\exists\, C_2>0:$

$$\sup_{n\geq\rho_n\geq|b_1ey|}\left[\frac{|by|^{n-\rho_n}}{\rho_n^{n-\rho_n}}\exp\{n-\rho_n\}\right]\leq C_2;$$

2) $$\sup_{0\leq n\leq|b_1ey|}\left[\frac{|b_1y|^{n-\rho_n}}{\rho_n^{n-\rho_n}}\exp\{n-\rho_n\}\right]\leq$$

$$\leq\exp\{|b_1ey|ln|b_1ey|\},\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Використовуючи відоме співвідношення з [2]

$$\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\}\leq\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{k^{k\alpha}}{|\xi|^k}\leq$$

$$\leq\exp\{\frac{\alpha e}{2}\}\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\},\ \alpha>0,\ \xi>0,$$

отримуємо

$$\sup_{0\leq n\leq n_0}\left[\frac{|b_1y|^{\rho_n}}{\rho_n^{\rho_n}}\exp\{\rho_n\}\right]\leq$$

$$\leq\frac{1}{\inf\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{\rho_n}{|b_1ey|}\right)^{\rho_n}}\leq\exp\left\{\frac{|b_1ey|}{e}\right\}=$$

$$=\exp\{|b_1y|\},\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Тоді

$$C_1|b_1ey|\sup_{0\leq n\leq n_0-1}\left[\frac{|b_1y|^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}\right]+1\leq$$

$$\leq C_3\exp\{4|b_1ey|ln|b_1ey|\}\leq$$

$$\leq C_4\exp\{\Omega(4b_1ey)\}, y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

де стала C_4 — не залежить від y. Зауважимо, що для $y=0$ дана нерівність очевидна.

Отже,

$$|\varphi(x+iy)|\leq$$

$$\leq C_5\exp\{-M(a_1x)+\Omega(by)\},\ z=x+iy\in\mathbb{C},$$

де $C_5=C_1C_4$, $b=4b_1e$.

Теорема 3. *Для функції $\varphi\in W^\Omega$ наступні твердження еквівалентні:*

$$1)\ \exists b>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \exists C_k>0$$

$$\forall z=x+iy\in\mathbb{C}:\ |z^{(k)}\varphi(z)|\leq C_k\exp\{\Omega(by)\};$$

$$2)\ \exists b_1>0\,\forall k\in\mathbb{Z}_+\,\exists C_k^{(1)}>0\,\forall n\in\mathbb{Z}_+$$

$$\exists\rho_n\in[0,n),\ \rho_0=0,\ \forall x\in\mathbb{R}:$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq C_k^{(1)}\frac{n!b_1^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n\}\,,$$

де ρ_n - розв'язок рівняння $x\omega(x)=n$, $n\in\in\mathbb{Z}_+$.

Доведення. Нехай справджується твердження 1). Для кожного $k\in\in\mathbb{Z}_+$ покладемо $\varphi_k(z)=z^k\varphi(z)$, $z\in\mathbb{C}$.

Функції φ_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, належать до простору W^Ω і

$$|\varphi_k(z)|\leq C_k\exp\{\Omega(by)\},\ z=x+iy\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

де стала b залежить від φ, стала C_k - від функції φ та k. Застосуємо до функції φ_k теорему 2, коли $a=0$. Тоді

$$\forall\, n\geq 0\ \exists\,\rho_n\in[0,n),\ \rho_0=0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}:$$

$$|\varphi_k^{(n)}(x)|\leq C_k\frac{n!b^n}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\},$$

де ρ_n - розв'язок рівняння $x\omega(x)=n$, $n\in\in\mathbb{Z}_+$.

Відомо, що

$$\varphi_k^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(x^k)^{(i)}\varphi^{(n-i)}(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Розглядатимемо випадок $n\geq 2$. Для $k=0$

$$|\varphi_0^{(n)}(x)|=|\varphi(x)^{(n)}|\leq C_0\frac{b^nn!}{\rho_n^n}\exp\{\Omega(\rho_n)\};$$

для $k=1$

$$\varphi_1^{(n)}(x)=x\varphi^{(n)}(x)+n\varphi^{(n-1)}(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Звідси

$$x\varphi^{(n)}(x) = \varphi_1^{(n)}(x) - n\varphi^{(n-1)}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$|x\varphi^{(n)}|(x) \le |\varphi_1^{(n)}(x)| + n|\varphi^{(n-1)}(x)| \le$$

$$\le \max\left(C_1, \frac{C_0}{b}\right) \frac{b^n n!}{\rho_n^n} \exp\{\Omega(\rho_n)\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^{n-1}} \frac{\exp\{\Omega(\rho_{n-1})\}}{\exp\{\Omega(\rho_n)\}}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Оцінимо вираз

$$\frac{\rho_n^n}{\rho_{n-1}^{n-1}} \frac{\exp\{\Omega(\rho_{n-1})\}}{\exp\{\Omega(\rho_n)\}} =$$

$$= \rho_{n-1} \left(\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}\right)^n \frac{\exp\{\Omega(\rho_{n-1})\}}{\exp\{\Omega(\rho_n)\}}.$$

Оскільки

$$\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} = \frac{\rho_n \omega(\rho_n)\omega(\rho_{n-1})}{\rho_{n-1}\omega(\rho_{n-1})\omega(\rho_n)} =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\omega(\rho_{n-1})}{\omega(\rho_n)} < \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1},$$

то

$$\left(\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \le 4.$$

Очевидно, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\rho_{n-1} < \exp\{\varepsilon\rho_{n-1}\} < \exp\{\Omega(\varepsilon\rho_{n-1})\}, \quad n \ge 1.$$

На підставі того, що

$$\rho_{n-1} \exp\{\Omega(\rho_{n-1})\} < \exp\{\Omega((\varepsilon + 1)\rho_{n-1})\},$$

для кожного $n > 2$ виберемо $\varepsilon_n \in \left(0, \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} - 1\right)$ так, щоб

$$\rho_{n-1} \exp\{\Omega(\rho_{n-1})\} \le \exp\{\Omega(\rho_n)\}.$$

Тоді

$$\rho_{n-1} \left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right)^n \frac{\exp\{\Omega(\rho_{n-1})\}}{\exp\{\Omega(\rho_n)\}} < 4,\ n \ge 1.$$

Отже,

$$|x\varphi^{(n)}(x)| \le C_1' b^n n! \frac{\exp\{\Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $C_1' = 5\max\left(C_1, \frac{C_0}{b}\right)$.

У загальному випадку маємо

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le |\varphi_k^{(n)}(x)| + C_n^1 k|x^{k-1}\varphi^{(n-1)}(x)| +$$

$$+ C_n^2 k(k-1)|x^{k-2}\varphi^{(n-2)}(x)| + \ldots \le$$

$$\le \max\left(C_k, \frac{C_{k-1}}{b}k, \frac{C_{k-2}}{b^2}k(k-1), \ldots\right) \frac{b^n n!}{\rho_n^n} \times$$

$$\times \exp\{\Omega(\rho_n)\} \left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \ldots\right) \le$$

$$\le C_k' \frac{b^n n!}{\rho_n^n} \exp\{\Omega(\rho_n)\},$$

де

$$C_k' = e^4 \max\left(C_k, \frac{C_{k-1}}{b}k, \frac{C_{k-2}}{b^2}k(k-1), \ldots\right).$$

Доведення оберненого твердження аналогічне відповідному доведенню в теоремі 2.

На підставі теорем 1 і 2 правильне твердження.

Теорема 4. *Для функції $\varphi \in W_M^\Omega$ наступні твердження еквівалентні:*

1) $\exists a > 0 \quad \exists b > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \quad |\varphi(z)| \le C\exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$.

2) $\exists C_1 > 0 \quad \exists a_1 > 0 \quad \exists b_1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists \nu_k \in [0, k),\ \nu_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists \rho_n \in [0, n),\ \rho_0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad |x^k\varphi^{(n)}(x)| \le C_1 n! \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{\nu_k}{a_1}\right)^k \exp\{\Omega(\rho_n) - M(\nu_k)\}$, *де* ρ_n *- розв'язок рівняння* $x\omega(x) = n$, $n \in \in \mathbb{Z}_+$, ν_k *- розв'язок рівняння* $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.*Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 308 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.1999