УДК 517.576

©2001 р. Ю.М. Галь, О.М. Мулява

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Дрогобич

ПРО ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Для цілої функції нульового порядку в термінах класу збіжності встановлений зв'язок між зростанням максимуму модуля, спаданням тейлорових коефіцієнтів і розподілом нулів.

For an entire function of zero order a connection between the growth of the maximum of modulus and the decrease of Taylor coefficients and the zeroes distribution is established in terms of a convergence class.

1. Нехай f — ціла функція з тейлоровими коефіцієнтами a_n і нулями z_k, $f(0)\neq 0$, а $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$. Ж.Валірон [1] показав, що якщо f має порядок $\varrho\in(0,+\infty)$ і належить до класу збіжності, тобто $\int\limits_1^\infty r^{-(\varrho+1)}\ln M_f(r)dr<+\infty$, то $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_n|^{\varrho/n}<+\infty$ і $\sum\limits_{k=1}^\infty |z_k|^{-\varrho}<+\infty$. Якщо $|a_n/a_{n+1}|\nearrow+\infty$, то умова $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_n|^{\varrho/n}<+\infty$ є достатньою для належності f до класу збіжності [2], а якщо ϱ – неціле число, то й умова $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|z_k|^{-\varrho}<+\infty$ є достатньою для належності f до класу збіжності [3].

У випадку, коли $\varrho=+\infty$ або $\varrho=0$, для характеристики зростання цілих функцій вводять інші шкали зростання (наприклад, логарифмічні порядки, k-логарифмічні порядки, узагальнені порядки) і в їх термінах встановлюють зв'язок між зростанням $M_f(r)$, поводженням коефіцієнтів a_n і розподілом нулів z_k. Тут для випадку $\varrho=0$ встановлюється такий зв'язок в термінах певних класів збіжності.

2. Нехай

$$f(z)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^n,\quad f(0)\neq 0,\tag{1}$$

— ціла функція нульового порядку, а l — додатна неперервна неспадна на $[x_0,+\infty)$ функція така, що $\int\limits_{x_0}^\infty\frac{\ln x}{l(x)}dx<+\infty$. Будемо говорити, що f належить до l-класу збіжності, якщо

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{l(r)}dr<+\infty.\tag{2}$$

Очевидно, що чим швидше функція l зростає, тим ширшим є l-клас збіжності, а валіронів клас збіжності є l-класом збіжності з $l(r)=r^\varrho$. Зрозуміло, що ціла функція нульового порядку належить до l-класу збіжності з $l(r)=r^\varepsilon$ для будь-якого числа $\varepsilon>0$. Що стосується умови $\int\limits_{x_0}^\infty\frac{\ln x}{l(x)}dx<+\infty$, то її не уникнути, оскільки для кожної трансцендентної цілої функції $(\ln M_f(r))/(\ln r)\to+\infty$, $r\to+\infty$.

Нашою метою є доведення двох таких теорем.

Теорема 1. *Нехай l — додатна неперервна неспадна на $[x_0,+\infty)$ функція така, що $l(x)/x\nearrow+\infty$, $(x\to+\infty)$ і $\int\limits_{x_0}^\infty\frac{\ln x}{l(x)}dx<+\infty$. Для того, щоб ціла функція (1) скінченного порядку (і тим більше нульового порядку) належала до l-класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли $|a_n/a_{n+1}|\nearrow+\infty$, $(n\to$*

$+\infty$), *і досить, щоб* $\sum_{n=n_0}^{\infty} L(|a_n|^{-1/n}) < +\infty$,

де $L(x) = \int_x^{\infty} \frac{\ln r - \ln x}{l(r)} dr$.

Теорема 2. *Нехай функція l така, як в теоремі 1. Для того, щоб ціла функція (1) нульового порядку належала до l-класу збіжності, необхідно й досить, щоб* $\sum_{n=n_0}^{\infty} L(|z_n|) < +\infty$.

3. Для доведення цих теорем використаємо результати з [4], отримані для рядів Діріхле. Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

є цілим і $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ — його максимальний член. Припустимо, що функція β задовольняє вищевказані умови. Тоді правильною є наступна лема.

Лема. *Нехай β – додатна неперервна неспадна на $[\sigma_0, +\infty)$ функція така, що* $\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\sigma d\sigma}{\beta(\sigma)} < +\infty$. *Для того, щоб* $\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\beta(\sigma)} d\sigma < +\infty$, *необхідно й досить, щоб*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0}\right) < +\infty,$$

$$B(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sigma - x}{\beta(\sigma)} d\sigma, \tag{4}$$

а також необхідно й досить, щоб

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B\left(\varkappa_{n-1}^0(F)\right) < +\infty,$$

де a_n^0 – коефіцієнти мажоранти Ньютона ряду Діріхле (3), а $\varkappa_n^0(F) = \frac{\ln a_n^0 - \ln a_{n+1}^0}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$.

Перша частина леми є безпосереднім наслідком теореми 1 з [4] (з $A = +\infty$), а друга є таким же наслідком рівності (23), одержаної при доведенні цієї теореми.

4. Щоб довести теорему 1, зробимо в ряді (1) заміну $z = e^s$. Тоді отримаємо ряд Діріхле (3) з $\lambda_n = n$. Оскільки для такого ряду Діріхле $\mu(\ln r, F) = \mu_f(r)$, де $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1), і для цілих функцій скінченного порядку за теоремою Бореля $\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r)$, $r \to +\infty$, то (2) виконується лише тоді, коли $\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\ln \mu(\ln r, F)}{l(r)} dr < +\infty$, тобто, коли $\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{l(e^\sigma)} e^\sigma d\sigma < +\infty$. За лемою останнє співвідношення виконується тоді й тільки тоді, коли виконується умова (4) з $\lambda_n = n$ і

$$B(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sigma - x}{l(e^\sigma)} e^\sigma d\sigma = \int_{e^x}^{\infty} \frac{\ln r - x}{l(r)} dr = L(e^x),$$

тобто, коли $\sum_{n=n_0}^{\infty} L((a_n^0)^{-1/n}) < +\infty$, де a_n^0 — коефіцієнти мажоранти Ньютона ряду (1). Оскільки $|a_n| \leq a_n^0$ для кожної цілої функції і $|a_n| = a_n^0$ у випадку, коли $|a_n/a_{n+1}| \nearrow +\infty$, то звідси легко отримуємо твердження теореми 1.

5. Доведемо, нарешті, теорему 2. Нехай $r_k = |z_k|$, $n(t) = \sum_{r_k \leq t} 1$ — лічильна функція нулів функції f, а $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ — неванліннівська лічильна функція. Оскільки функція f має нульовий порядок, то $N(r) \sim \ln M_f(r)$, $r \to +\infty$ [5]. Тому в співвідношенні (2) $\ln M_f(r)$ можна замінити на $N(r)$.

Неважко показати (і це добре відомо), що $N(r) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{r_k} + n \ln r$ для $r_n \leq r \leq r_{n+1}$.

З іншого боку, ряд Діріхле

$$F^*(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}\right)e^{sn} \qquad (5)$$

завдяки монотонному прямуванню r_k до $+\infty$ є цілим, а $\ln\mu(\sigma,F^*)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{1}{r_k}+n\sigma$ при $\ln r_n\le\sigma\le\ln r_{n+1}$. Тому $N(r)=\ln\mu(\ln r,F^*)$. Отже, у співвідношенні (2) замість $\ln M_f(r)$ можна поставити $\ln\mu(\ln r,F^*)$.

Застосуємо до ряду Діріхле (5) другу частину леми. Оскільки $\varkappa_n^0(F^*)=\ln r_{n+1}\nearrow+\infty$, то для того, щоб $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(\sigma,F^*)d\sigma}{\beta(\sigma)}<+\infty$, необхідно й досить, щоб $\sum\limits_{n=1}^{\infty}B(\ln r_n)<+\infty$. Оскільки $B(x)=L(e^x)$, якщо $\beta(\sigma)=e^{-\sigma}l(e^{\sigma})$, то теорема 2 доведена.

6. На завершення наведемо одне твердження для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку. Логарифмічним порядком цілої функції (1) називається величина $p=\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}$, а клас збіжності визначається умовою $\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r\ln^{p+1}r}dr<+\infty$. Виберемо $l(r)=r\ln^{p+1}r$. Тоді $L(x)=\frac{1}{p(p-1)}\ln^{1-p}r$ і з теорем 1 та 2 випливає таке твердження.

Наслідок. *Нехай ціла функція (1) має скінченний логарифмічний порядок $p>1$. Тоді для того, щоб $\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r\ln^{p+1}r}dr<+\infty$, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|a_{n-1}/a_n|)$ неспадна, й досить, щоб $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)^{1-p}<+\infty$, а також необхідно й досить, щоб $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln|z_n|)^{1-p}<+\infty$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Valiron G.* General theory of integral functions.— Toulouse, 1923.— 382 p.

2. *Kamthan P.K.* A theorem of step functions (III) // Istambul univ. fen. fac. mecm. A.— 1963.— **28**.— P. 65-69.

3. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции.— М.: ГИТЛ, 1941.— 292 с.

4. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн.— 1999.— **51**, N 11.— С. 1485—1494.

5. *Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки.— 1983.— **34**, N 2.— С. 227—236.

Стаття надійшла до редколегії 03.07.2000