УДК 000.00.00

©2001р. О.І.Гайдукевич

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ОДНА ТЕОРЕМА ТИПУ СКОРЦА-ДРАҐОНІ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доведена теорема типу Скорца-Драґоні для многозначних відображень $F : T \times X \to Y$ у випадку, коли X – пряма границя послідовності своїх підпросторів з другою аксіомою зліченності і T – гаусдорфовий локально компактний простір.

A theorem of Scorza Dragoni type has been proved for multivalued functions $F : T \times X \to Y$, when X is a direct limit of sequanse of its second countable subspaces and T is a Hausdorff locally compact space.

1. Відома теорема Скорца-Драґоні [1] узагальнювалася в працях багатьох математиків. Зокрема, в працях [2—5] розглядалися аналоги теореми Скорца-Драґоні для многозначних відображень. Один із останніх результатів на цю тему належить А. Куці [4]. Щоб його сформулювати, введемо деякі поняття.

Нехай $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ – σ-алгебри підмножин множин T і X відповідно. Символом $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ позначимо σ-алгебру підмножин добутку $T \times X$, яка породжена системою множин вигляду $A \times B$, де $A \in \mathcal{A}$ і $B \in \mathcal{B}$.

Нехай $(T, \mathcal{A})$ – вимірний простір, X, Y – топологічні простори, $\mathcal{B}(X)$ – σ-алгебра всіх борелівських підмножин простору X. Кажуть, що $(T, \mathcal{A}; X)$ має проективну властивість, якщо для кожної множини $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$ її проекція $\mathrm{pr}_T(E)$ на простір T належить до σ-алгебри $\mathcal{A}$.

Многозначне відображення $F : T \to Y$ називається слабко $\mathcal{A}$-вимірним, якщо для кожної відкритої в Y множини B множина $F^{-}(B) = \{t \in T : F(t) \cap B \neq \emptyset\}$ належить до $\mathcal{A}$. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається напівнеперервним знизу, якщо для кожної відкритої в Y множини B множина $F^{-}(B)$ відкрита в X.

У роботі [4] А. Куця довела: якщо $(T, \mathcal{A}; \mu)$ – топологічний простір з регулярною борелівською мірою, X і Y – топологічні простори з другою аксіомою зліченності, $(T, \mathcal{A}; X)$ має проективну властивість і $F : T \times X \to Y$ – слабко $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-вимірне многозначне відображення, яке напівнеперервне знизу відносно другої змінної, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує замкнена множина $T_\varepsilon \subseteq T$, така, що $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ і звуження $F|_{T_\varepsilon \times X}$ напівнеперервне знизу за сукупністю змінних.

Топологічний простір X називаємо прямою границею послідовності своїх підпросторів X_n, якщо $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і множина $A \subseteq X$ замкнена в просторі X тоді й тільки тоді, коли для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $A_n = A \bigcap X_n$ замкнена в X, чи, еквівалентним чином, множина $A \subseteq X$ відкрита в X тоді й тільки тоді, коли для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина A_n відкрита в X_n. Зрозуміло, що такий простір X може не задовольняти другу аксіому зліченності, навіть, якщо всі X_n задовольняють цю аксіому. Прикладом такого простору є простір $\mathbb{R}^\infty$ фінітних послідовностей з топологією індуктивної границі скінченновимірних просторів $R_n = \{(\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...) : \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$, наділених своєю єдиною лінійною гаусдорфовою топологією, який, разом з тим, є прямою границею послідовності своїх підпросторів R_n.

У даній роботі ми перенесемо результат А.Куці на випадок, коли простір X є прямою границею послідовності підпросторів з другою аксіомою зліченності, а простір T —

гаусдорфовий і локально компактний.

2. Відомо [6], що якщо X – пряма границя послідовності підпросторів X_n і T – гаусдорфовий локально компактний простір, то $T \times X$ є прямою границею послідовності своїх підпросторів $T \times X_n$.

Теорема 1. *Нехай* $(T, \mathcal{A}; \mu)$ *– гаусдорфовий локально компактний простір зі скінченною борелівською регулярною мірою,* X *– пряма границя підпросторів* X_n *з другою аксіомою зліченності, причому* $(T, \mathcal{A}; X_n)$ *має проективну властивість для кожного* $n \in \mathbb{N}$, Y *– простір з другою аксіомою зліченності і* $F : T \times X \to Y$ *– слабко* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$*-вимірне многозначне відображення, яке напівнеперервне знизу відносно другої змінної. Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує замкнена множина* $T_\varepsilon \subseteq T$, *така, що* $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ *і звуження* $F|_{T_\varepsilon \times X}$ *є напівнеперервним знизу.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розглянемо відображення $F_n = F|_{T \times X_n}$. За наведеним результатом А.Куці, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує замкнена множина $K_n \subseteq T$, така, що $\mu(T \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ і звуження $F_n|_{K_n \times X_n} = F|_{K_n \times X_n}$ напівнеперервне знизу за сукупністю змінних. Покладемо $T_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Тоді $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ і звуження $F|_{T_\varepsilon \times X_n}$ напівнеперервні знизу для всіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай V – довільна відкрита в Y множина. Покладемо $\tilde{F}_n = F|_{T_\varepsilon \times X_n}$ і $A_n = \tilde{F}_n^-(V)$. Множина $A_n = F|_{T_\varepsilon \times X}(V) \bigcap (T_\varepsilon \times X_n)$ відкрита в $T_\varepsilon \times X_n$ для кожного номера n, тому, за означенням прямої границі, множина $A = F^-_{|_{T_\varepsilon \times X}}$ відкрита в $T_\varepsilon \times X$, отже, звуження $F|_{T_\varepsilon \times X}$ є напівнеперервним знизу.

Гаусдорфовий простір X називається суслінським, якщо він є неперервним образом деякого сепарабельного повнометризовного простору P. У роботі [7] доведено, що якщо $(T, \mathcal{A}, \mu)$ – простір зі скінченною повною мірою, а X – суслінський простір, то $(T, \mathcal{A}; X)$ має проективну властивість. З огляду на це з допомогою теореми 1 отримуємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай* $(T, \mathcal{A}, \mu)$ *– гаусдорфовий локально компактний простір зі скінченною борелівською регулярною і повною мірою,* X *– пряма границя своїх підпросторів* X_n, *які є суслінськими просторами з другою аксіомою зліченності,* Y *– простір з другою аксіомою зліченності і* $F : T \times X \to Y$ *– слабко* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$*-вимірне відображення, яке є напівнеперервним знизу відносно другої змінної. Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує замкнена множина* $T_\varepsilon \subseteq T$, *така, що* $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ *і звуження* $F|_{T_\varepsilon \times X}$ *напівнеперервне знизу.*

Оскільки простори R_n є сепарабельними і повнометризовними для всіх $n \in \mathbb{N}$, то твердження теореми 2 буде правильним для $X = \mathbb{R}^\infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Scorza Dragoni G.* Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variable // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.— 1948.— **11**.— P.102—106.
2. *Brunovsky P.* Scorza-Dragoni's theorem for unbounded set-valued functions and its applications to control problems // Matematicky Casopis.— 1970.— **20**, 3.— P.205—213.
3. *Bonanno G.* Two theorems on the Scorza Dragoni property for multifunctions // Atti Acc. Lincei Rend.fis.— 1989.— **83**, 8.— P.51—56.
4. *Kucia A.* Scorza Dragoni type theorems // Fund. Math.— 1991.— **138**.— P.197—203.
5. *Averna D.* Lusin type theorems for multifunctions, Scorza Dragoni's property and Caratheodory selections // Bolletino U.M.I.— 1994.— **7**, 8-A.— P.193—202.
6. *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Прямі границі і властивість Скорца-Драґоні // Доп. НАН України.— 2001.— N5.— C.10—13.
7. *Sainte-Beuve M.-F.* On the extension of von Neumann-Aumann's theorem // J. Funct. Anal.— 1974.— **17**.— P.112—129.

Стаття надійшла до редколегії 08.11.2000