УДК 517.929.7

©2001 р. **І.В. Гайдайчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ДО ПИТАННЯ ЗНАХОДЖЕННЯ КООРДИНАТ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ ДВОХ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Виведені рівняння для знаходження координат точок перетину двох кривих другого порядку. Проаналізовано можливість спрощення цих рівнянь шляхом перетворення базової системи координат.

Equations for coordinates calculation of intersection for two curves of the second order are obtained. The possibility to simplify these equations by transformation of basic coordinate system is analized.

Вступ. Задача про знаходження в явному вигляді координат точок перетину двох кривих другого порядку виникає, зокрема, при відображенні методом сканування по рядках квадратичних поверхонь на екрані комп'ютера [1,2]. Крім того, вона є цікавою з теоретичної точки зору. Адже розглянуті у [3—12] випадки є неповними і стосуються лише перетину кривої другого порядку з прямою.

З математичної точки зору питання знаходження координат точок перетину двох кривих другого порядку еквівалентне розв'язанню системи

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + 2c_1xy + 2d_1x + 2e_1y = f_1, \\ a_2x^2 + b_2y^2 + 2c_2xy + 2d_2x + 2e_2y = f_2. \end{cases} \tag{1}$$

Відомо [13], що для подібних систем одне з невідомих, наприклад x, можна виключити і одержати рівняння вищого порядку. Надалі припускатимемо, що один з коефіцієнтів a_1 чи a_2 відмінний від 0. Інакше, якщо відмінним від 0 є один з коефіцієнтів b_1 чи b_2, то за описаною далі схемою виключається змінна y. Якщо ж усі коефіцієнти a_1, a_2, b_1 та b_2 дорівнюють 0, то елементарними перетвореннями задача зводиться до відомого випадку перетину кривої другого порядку і прямої.

Розв'язуємо обидва рівняння системи (1) як квадратні відносно x та прирівнюємо відповідні вирази:

$$\begin{aligned}(a_1c_2 - a_2c_1)y + (a_1d_2 - a_2d_1) = \\ = \pm\sqrt{R} \pm \sqrt{Q},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} R = a_2(c_1^2 - a_1b_1)y^2 + 2(c_1d_1 - \\ - a_1e_1)y + (d_1^2 - a_1f_1) \\ Q = a_1(c_2^2 - a_2b_2)y^2 + 2(c_2d_2 - \\ - a_2e_2)y + (d_2^2 - a_2f_2). \end{aligned}$$

Підносимо обидві частини до квадрата:

$$\begin{aligned} &(a_1b_2 + a_2b_1 - 2c_1c_2)y^2 + \\ &+2(a_1e_2 + a_2e_1 - c_1d_2 - c_2d_1)y + \\ &+(a_1f_2 + a_2f_1 - 2d_1d_2) = \\ &= \pm 2\sqrt{R}\sqrt{Q}. \end{aligned}$$

Після повторного піднесення до квадрата одержимо відносно y рівняння четвертого степеня з коефіцієнтами

$$\begin{array}{ll} y^4: & AB^2 + 4AC \cdot BC, \\ y^3: & 4AB \cdot AE + 4AD \cdot BC + \\ & +4AC \cdot BD - 8AC \cdot CE, \\ y^2: & 2AB \cdot AF + 4AE^2 + \\ & +4AD \cdot BD - 4AC \cdot CF - \\ & -8AD \cdot CE - 8AC \cdot DE, \\ y: & 4AE \cdot AF - 8AD \cdot DE - \\ & -4AD \cdot CF - 4AC \cdot DF, \\ 1: & AF^2 - 4AF \cdot DF, \end{array} \tag{2}$$

де через AB позначено визначник $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, через AC — $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, через AD — $\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$, через AE — $\begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{vmatrix}$, через AF — $\begin{vmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{vmatrix}$, через BC — $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, через CE — $\begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & e_2 \end{vmatrix}$, через CF — $\begin{vmatrix} c_1 & f_1 \\ c_2 & f_2 \end{vmatrix}$, через DE — $\begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix}$, через DF — $\begin{vmatrix} d_1 & f_1 \\ d_2 & f_2 \end{vmatrix}$.

Оскільки (2) є рівнянням досить високого степеня, то для практичного використання бажано спростити його, щоб одразу можна було б зробити висновок про існування коренів, їх кількість, а також виписати корені в явному вигляді. Зокрема нас цікавитиме випадок, коли рівняння (2) виявиться біквадратним.

1. Постановка задачі. Нехай задана евклідова система координат, в якій криві другого порядку описуються системою (1). Надалі цю систему координат будемо називати базовою. Необхідно підібрати таке перетворення базової системи координат, щоб рівняння (2) стало біквадратним. Відповідь про існування такого перетворення дає наступна теорема.

Теорема. *Перетворення базової системи координат, яке трансформує рівняння (1) у біквадратне, існує і для свого обчислення вимагає розв'язання рівняння не вище третього степеня.*

Перш ніж перейти до доведення теореми, дослідимо спочатку, як будуть змінюватись визначники

$$AB, AC, AD, AE, AF, BC, CE, CF, DE, DF \tag{3}$$

при переході від однієї системи координат до іншої. Оскільки перетворення координат зводиться до повороту та зсуву, розглянемо, як на визначники (3) вплине поворот та зсув.

Лема 1. *При повороті системи координат на кут φ визначники (3) змінюються так:*

$$\begin{aligned}
AB' = \ & ABcos^2(\varphi) - ABsin^2(\varphi) - \\
& -2ACcos(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -2BCcos(\varphi)sin(\varphi), \\
AC' = \ & ACcos^2(\varphi) - BCsin^2(\varphi) + \\
& +ABcos(\varphi)sin(\varphi), \\
AD' = \ & ADcos^3(\varphi) + BEsin^3(\varphi) + \\
& +AEcos^2(\varphi)sin(\varphi) + \\
& +BDcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& +2CDcos^2(\varphi)sin(\varphi) + \\
& +2CEcos(\varphi)sin^2(\varphi), \\
AE' = \ & AEcos^3(\varphi) - BDsin^3(\varphi) - \\
& -ADcos^2(\varphi)sin(\varphi) + \\
& +BEcos(\varphi)sin^2(\varphi) - \\
& -2CDcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& +2CEcos^2(\varphi)sin(\varphi), \\
AF' = \ & AFcos^2(\varphi) + BFsin^2(\varphi) + \\
& +2CFcos(\varphi)sin(\varphi), \\
BC' = \ & BCcos^2(\varphi) - ACsin^2(\varphi) + \\
& +ABcos(\varphi)sin(\varphi), \\
BD' = \ & BDcos^3(\varphi) + AEsin^3(\varphi) + \\
& +ADcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& +BEcos^2(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -2CDcos^2(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -2CEcos(\varphi)sin^2(\varphi), \\
BE' = \ & -ADsin^3(\varphi) + BEcos^3(\varphi) - \\
& -BDcos^2(\varphi)sin(\varphi) + \\
& +AEcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& +2CDcos(\varphi)sin^2(\varphi) - \\
& -2CEcos^2(\varphi)sin(\varphi), \\
BF' = \ & AFsin^2(\varphi) + BFcos^2(\varphi) - \\
& -2CFcos(\varphi)sin(\varphi), \\
CD' = \ & -ADcos^2(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -AEcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& -BDcos^2(\varphi)sin(\varphi) + \\
& +BEcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& +CDcos^3(\varphi) - CEsin^3(\varphi) + \\
& +CEcos^2(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -CDcos(\varphi)sin^2(\varphi), \\
CE' = \ & CEcos^3(\varphi) + CDsin^3(\varphi) + \\
& +ADcos(\varphi)sin^2(\varphi) - \\
& -AEcos^2(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -CEcos(\varphi)sin^2(\varphi) - \\
& -CDcos^2(\varphi)sin(\varphi) - \\
& -BDcos(\varphi)sin^2(\varphi) + \\
& +BEcos^2(\varphi)sin(\varphi), \\
CF' = \ & CFcos^2(\varphi) - CFsin^2(\varphi) - \\
& -AFcos(\varphi)sin(\varphi) + \\
& +BFcos(\varphi)sin(\varphi), \\
DE' = \ & DE,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$DF' = \quad DFcos(\varphi) + EFsin(\varphi).$$

Доведення. Проведемо доведення для одного з визначників, наприклад, для AB. Для решти визначників з (3) процедура доведення аналогічна. Відомо [3—12], що при повороті системи координат на кут φ коефіцієнти квадратичної форми

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \qquad (5)$$

трансформуються за формулою

$$\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & sin(\varphi) & 0 \\ -sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) & 0 \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{aligned} a' &= acos^2(\varphi) + bsin^2(\varphi)+ \\ &\quad +2ccos(\varphi)sin(\varphi), \\ b' &= asin^2(\varphi) + bcos^2(\varphi)- \\ &\quad -2ccos(\varphi)sin(\varphi), \\ c' &= -acos(\varphi)sin(\varphi)+ \\ &\quad +bcos(\varphi)sin(\varphi)+ \\ &\quad +ccos(\varphi)^2 - csin(\varphi)^2, \\ d' &= dcos(\varphi) + esin(\varphi), \\ e' &= -dsin(\varphi) + ecos(\varphi), \\ f' &= f. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що визначник $AB = a_1b_2 - a_2b_1$ буде перетворюватись у

$$\begin{aligned} AB' = a_1'b_2' - a_2'b_1' = \\ & (a_1cos^2(\varphi) + b_1sin^2(\varphi)+ \\ & +2c_1cos(\varphi)sin(\varphi))\times \\ & \times(a_2sin^2(\varphi) + b_2cos^2(\varphi)- \\ & -2c_2cos(\varphi)sin(\varphi))+ \\ & +(a_2cos^2(\varphi) + b_2sin^2(\varphi)+ \\ & +2c_2cos(\varphi)sin(\varphi))\times \\ & \times(a_1sin^2(\varphi) + b_1cos^2(\varphi)- \\ & -2c_1cos(\varphi)sin(\varphi)) = \\ & = ABcos^2(\varphi) - ABsin^2(\varphi)+ \\ & +2ACcos(\varphi)sin(\varphi)+ \\ & +2BCcos(\varphi)sin(\varphi). \end{aligned}$$

Лема 2. *При зсуві системи координат на величини $\triangle x$, $\triangle y$ визначники (3) змінюються так:*

$$\begin{aligned} AB' &= \quad AB, \\ AC' &= \quad AC, \\ AD' &= \quad AC\triangle y + AD, \\ AE' &= \quad AC\triangle x + AB\triangle y + AE, \\ AF' &= \quad AB\triangle y^2 + 2AC\triangle x\triangle y+ \\ &\quad +2AD\triangle x + 2AE\triangle y + AF, \\ BC' &= \quad +BC, \\ BD' &= \quad -AB\triangle x + BC\triangle y + BD, \\ BE' &= \quad +BE, \\ BF' &= \quad -AB\triangle x^2 + 2BC\triangle x\triangle y+ \\ &\quad +2BD\triangle x + 2BE\triangle y + BF, \\ CD' &= \quad +CD, \\ CE' &= \quad -BC\triangle y + CE, \\ CF' &= \quad -AC\triangle x^2 - BC\triangle y^2+ \\ &\quad +2CD\triangle x + 2CE\triangle y + CF, \\ DE' &= \quad AC\triangle x^2 + AB\triangle x\triangle y+ \\ &\quad +AE\triangle x - BC\triangle y^2+ \\ &\quad +CE\triangle y - CD\triangle x- \\ &\quad -BD\triangle y + DE, \\ DF' &= \quad AB\triangle x\triangle y^2 + AF\triangle x+ \\ &\quad +AC\triangle x^2\triangle y - BC\triangle y^3+ \\ &\quad +AD\triangle x^2 + 2AE\triangle x\triangle y+ \\ &\quad +2CE\triangle y^2 + CF\triangle y- \\ &\quad -BD\triangle y^2 + 2DE\triangle y + DF. \end{aligned} \qquad (6)$$

Доведення проводиться за схемою доведення леми 1 з урахуванням того, що при зсуві коефіцієнти квадратичної форми (5) змінюються так:

$$\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \triangle x & \triangle y & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \triangle x \\ 0 & 1 & \triangle y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{aligned} a' &= a, \\ b' &= b, \\ c' &= c, \\ d' &= a\triangle x + c\triangle y + d, \\ e' &= c\triangle x + b\triangle y + e, \\ f' &= a\triangle x^2 + b\triangle y^2 + 2c\triangle x\triangle y+ \\ &\quad +d\triangle x + e\triangle y + f. \end{aligned}$$

Лема 3. *Коефіцієнт при y^4 не залежить від зміни системи координат.*

Доведення. Справді, зсув системи координат не змінює визначники AB, AC, BC, тому коефіцієнт при y^4 при зсуві залишиться без змін. З іншого боку, при повороті

$$
\begin{aligned}
&AB'^2 + 4AC' \cdot BC' = (ABcos^2(\varphi) - \\
&\quad -ABsin^2(\varphi) + 2ACcos(\varphi)sin(\varphi) + \\
&\quad +2BCcos(\varphi)sin(\varphi))^2 + \\
&\quad +4(ACcos^2(\varphi) - BCsin^2(\varphi) - \\
&\quad -ABcos(\varphi)sin(\varphi)) \times \\
&\quad \times(BCcos^2(\varphi) - ACsin^2(\varphi) - \\
&\quad -2ABcos*(\varphi)sin(\varphi)) = \\
&\quad = AB^2 + 4AC \cdot BC.
\end{aligned}
$$

Лема 3 доведена.

Лема 4. *Коефіцієнти при* y^3, y^2, y, 1 *залежать лише від повороту та зсуву системи системи координат на величину* $\triangle y$ *і не залежать від зсуву на величину* $\triangle x$. *Зокрема, при зсуві коефіцієнт при* y^3 *змінюється так:*

$$
\begin{aligned}
&(AB^2 + 4AC \cdot BC)\triangle y + AB \cdot AE + \\
&+AD \cdot BC + AC \cdot BD - 2AC \cdot CE,
\end{aligned} \tag{7}
$$

а при y:

$$
\begin{aligned}
&(AB^2 + 4AC \cdot BC)\triangle y^3 + 3(AB \cdot AE + \\
&+AD \cdot BC + AC \cdot BD - 2AC \cdot CE) \times \\
&\times \triangle y^2 + 2(AB \cdot AF + 2AE^2 + 2AD \times \\
&\times BD - 2AC \cdot CF - 4AD \cdot CE - \\
&-4AC \cdot DE)\triangle y - AD \cdot CF - \\
&-AC \cdot DF + AE \cdot AF - 2AD \cdot DE.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Доведення леми 4 легко провести за схемою доведення леми 3.

Використовуючи лему 4, можна звести поставлену задачу до еквівалентної: здійснити послідовно поворот системи координат, а потім її зсув так, щоб рівняння (2) стало біквадратним.

2. Доведення теореми. З формули (7) випливає, що зсув системи координат необхідно здійснювати на величину

$$
\triangle y = \frac{AB \cdot AE + AD \cdot BC + AC(BD - 2CE)}{AB^2 + 4AC \cdot BC}. \tag{9}
$$

Підберемо тепер такий кут повороту φ, щоб вираз (8) дорівнював 0. Якщо підставити (4) та (9) у (8) і прирівняти (8) до 0, то одержимо тригонометричне рівняння

$$
\begin{aligned}
&w_1cos^3(\varphi) + w_2cos^2(\varphi)sin(\varphi) + \\
&\quad +w_3cos(\varphi)sin^2(\varphi) + w_4sin^3(\varphi) = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

з такими коефіцієнтами:

$$
\begin{aligned}
w_1 = {} & 2(AB \cdot AE - \\
& -2AC \cdot CE + BC \cdot AD + \\
& +AC \cdot BD)^3 - (AB^2 + \\
& +4AC \cdot BC) \cdot \\
& \cdot(-2AC \cdot CF + AB \cdot AF + \\
& +2AE^2 - 4CE \cdot AD + \\
& +2AD \cdot BD)(AB \cdot AE - \\
& -2AC \cdot CE + AD \cdot BC + \\
& +AC \cdot BD) + (AB^2 + \\
& +4AC \cdot BC)^2(-AD \cdot CF - \\
& -AC \cdot DF - 2AD \cdot DE + \\
& +AE \cdot AF),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2 = {} & 6(AB \cdot AE - 2AC \cdot CE + \\
& +BC \cdot AD + AC \cdot BD)^2 \cdot \\
& \cdot(-AB \cdot BD - 2BC \cdot CD + \\
& +BE \cdot AC + BC \cdot AE) - \\
& -(AB^2 + 4AC \cdot BC) \cdot \\
& \cdot(-2AC \cdot CF + AB \cdot AF + \\
& +2AE^2 - 4CE \cdot AD + \\
& +2AD \cdot BD)(-AB \cdot BD - \\
& -2BC \cdot CD + AC \cdot BE + \\
& +AE \cdot BC) + (AB^2 + \\
& +4AC \cdot BC)^2(AB \cdot DF + \\
& +4CD \cdot DE + 2AE \cdot DE + \\
& +AC \cdot EF - 2AF \cdot CE + \\
& +2CD \cdot CF - AE \cdot CF + \\
& +AD \cdot BF),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_3 = {} & 6(-AB \cdot BD - 2BC \cdot CD + \\
& +BE \cdot AC + BC \cdot AE)^2 \cdot \\
& \cdot(AB \cdot AE - 2AC \cdot CE + \\
& +BC \cdot AD + AC \cdot BD) - \\
& -(AB^2 + 4AC \cdot BC) \cdot \\
& \cdot(-2BC \cdot CF - 2BE \cdot CD + \\
& +2BD^2 + 2AE \cdot BE - \\
& -AB \cdot BF + 4BC \cdot DE) \cdot \\
& \cdot(AB \cdot AE - 2AC \cdot CE + \\
& +BC \cdot AD + AC \cdot BD) + \\
& +(AB^2 + 4AC \cdot BC)^2 \cdot \\
& \cdot(-AB \cdot EF - 4CE \cdot DE + \\
& +BC \cdot DF - 2BD \cdot DE +
\end{aligned}
$$

$$+2CE \cdot CF - 2BF \cdot CD+$$
$$+AF \cdot BE - BD \cdot CF),$$

$$w_4 = 2(-AB \cdot BD-$$
$$-2BC \cdot CD + BE \cdot AC+$$
$$+BC \cdot AE)^3 - (AB^2+$$
$$+4AC \cdot BC)(-2BC \cdot CF-$$
$$-2BE \cdot CD + 2BD^2+$$
$$+2AE \cdot BE - AB \cdot BF+$$
$$+4BC \cdot DE)(-AB \cdot BD-$$
$$-2BC \cdot CD + BE \cdot AC+$$
$$BC \cdot AE) + (AB^2+$$
$$+4AC \cdot BC)^2(BD \cdot BF-$$
$$-BE \cdot CF - BC \cdot EF+$$
$$+2BE \cdot DE).$$

Поділивши рівняння (10) на $cos^3(\varphi)$ або на $s^3(\varphi)$, одержимо відносно $tg(\varphi)$ або $ctg(\varphi)$ кубічне рівняння, що і треба було довести.

3. Висновки. Отже, остаточно алгоритм розв'язування системи (1) можна записати у вигляді:

1. Обчислити визначники (3).
2. Виписати рівняння (10) і знайти один з його розв'язків.
3. Здійснити поворот базової системи координат на обчислений кут φ.
4. Виконати паралельне перенесення базової системи координат на величину $\triangle y$, обчислену за формулою (9).
5. Розв'язати біквадратне рівняння (2).
6. Повернутися до старої системи координат.
7. Підставити знайдену координату y в одне з рівнянь (1) і знайти координату x.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдайчук И.В., Ясинский Е.В.* Визуализация сцен квадратичных объектов методом построчечного сканирования // Проблемы управления и информатики.— 1996.— N3. — С. 133—136.
2. *Gaidaichuk I.V., Sadovyak A.M., Yasinskiy E.V.* One method for volume visualization of quadratic bodies scienes // Development and application systems.— Suceava, Romania, 1996. — N7. — PP.
3. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, составленного А.С. Пархоменко.— М.:Наука, 1968.— 912 с.
4. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, 1979.— 511 с.
5. Аналітична геометрія. За загальною редакцією доц. Білоусової. — К.: Вища школа, 1973. — 327 с.
6. *Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П.* Аналитическая геометрия. — М.: Просвещение, 1970. — 376 с.
7. *Виноградов И.М.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1986. — 176 с.
8. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1981. — 232 с.
9. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. — 698 с.
10. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
11. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1973. — 751 с.
12. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1966. — 272 с.
13. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1965.— 432 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.12.2000