УДК 517.929

©2000 р. І.М. Черевко

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено достатні умови існування інтегральних многовидів сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь у вигляді сукупності нерівностей для деяких допоміжних функцій.

The sufficient conditions of existence are established for integral manifolds of the singularly perturbed differential-functional equations as a totality of inequalities for some auxiliary functions.

Метод інтегральних многовидів є ефективним апаратом для дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Умови існування інтегральних многовидів сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь вивчались у працях [1,2] та інших, а для сингулярно збурених систем із запізненням - у працях [3—6].

У даній праці досліджено достатні умови існування інтегральних многовидів сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

1. Розглянемо систему сингулярно збурених рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,y_t,\varepsilon),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = L(t,y_t) + g(t,x,y_t,\varepsilon), \qquad (1)$$

де $t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m, y_t = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$, $\Delta > 0$.

Припустимо, що для системи (1) виконуються умови:

I) матриця $A(t)$ та лінійний відносно φ функціонал $L(t,\varphi)$ неперервні за t і рівномірно обмежені при $t \in \mathbf{R}$;

II) оператор зсуву $T(t,s)$ за розв'язками рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = L(t,y_t) \qquad (2)$$

задовольняє нерівність

$$|T(t,s)\varphi| \le Ne^{-\beta(t-s)}|\varphi|,\ N>0,\ \beta>0,\ t\ge s; \qquad (3)$$

III) функції f і g визначені й неперервні в області $\Omega = \{t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^n,\ |y| < \rho,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]\}$ та задовольняють нерівності

$$|f(t,x,y,\varepsilon)| \le a_1, \quad |g(t,x,y,\varepsilon)| \le a_2,$$
$$|f(t,x_1,y_1,\varepsilon) - f(t,x_2,y_2,\varepsilon)| \le$$
$$\le b_1|x_1-x_2| + c_1|y_1-y_2|,$$
$$|g(t,x_1,y_1,\varepsilon) - g(t,x_2,y_2,\varepsilon)| \le$$
$$\le b_2|x_1-x_2| + c_2|y_1-y_2|, \qquad (4)$$

де $a_i = a_i(|y|,\varepsilon), b_i = b_i(|y|,\varepsilon), c_i = c_i(|y|,\varepsilon)$ — невід'ємні, неспадні функції змінних $|y|$ і ε.

Система (1) еквівалентна такій системі інтегро-диференціальних рівнянь [7]:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,y_t,\varepsilon), \quad y_t = T(t,\sigma)y_\sigma +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)Y_0 g(s,x,y_s,\varepsilon)ds, \qquad (5)$$

де $Y_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $Y_0(0) = E$, а інтеграл для кожного $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$ розуміємо як інтеграл в $\mathbf{R}^m$.

Означення. *Множину точок $M \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times C[-\varepsilon\Delta, 0]$ будемо називати інтегральним многовидом системи (5), якщо для довільної точки $(t_0, x_0, y_{t_0}) \in M$ виконується умова $(t, x(t), y_t) \in M$ для всіх $t \ge t_0$, де $(x(t), y_t)$ — розв'язок системи (5) з початковими умовами (t_0, x_0, y_{t_0}).*

Вивчатимемо інтегральні многовиди повільних змінних системи (5), які описуються рівнянням

$$y_t = h(t,x,\varepsilon),\ t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]. \quad (6)$$

Припускатимемо, що функція h — неперервна за t і задовольняє за x умову Ліпшиця

$$|h(t,x_1,\varepsilon) - h(t,x_2,\varepsilon)| \le \eta |x_1 - x_2|. \quad (7)$$

Якщо, крім того, виконується умова

$$|h(t,x,\varepsilon)| \le \rho,\ t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \quad (8)$$

то інтегральний многовид M, що описується рівнянням (6), будемо називати (ρ,η)—многовидом [3,8].

Якщо на цьому многовиді лежить траєкторія $(t, x(t), y_t)$ системи (5), то $y_t = h(t,x(t),\varepsilon)$. Функції $x(t), y_t = h(t,x(t),\varepsilon)$ задовольняють систему (5). Перше рівняння при цьому набуває вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x + f(t,x,h(t,x,\varepsilon),\varepsilon). \quad (9)$$

Згідно з припущеннями (4), (7), (8) щодо функцій f і h, маємо нерівність

$$|f(t,x_1,h(t,x_1,\varepsilon),\varepsilon) - f(t,x_2,h(t,x_2,\varepsilon),\varepsilon)| \le$$
$$\le [b_1(\rho,\varepsilon) + c_1(\rho,\varepsilon)\eta]|x_1 - x_2|.$$

Отже, рівняння (9) для кожного фіксованого $x_0 \in \mathbf{R}^n$ має єдиний розв'язок $\varphi(t) = \Phi(t,t_0,x_0,\varepsilon,h)$, $\Phi(t_0,t_0,x_0,\varepsilon,h) = x_0$. Функція $y_t = h(t,x(t),\varepsilon)$ є обмеженим на всій осі розв'язком другого рівняння системи (5) і тому повинна задовольняти інтегральне рівняння [7] $y_t = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0 g(s,\varphi(s),y_s,\varepsilon)ds.$

Для фіксованого t виберемо той розв'язок $\varphi(s)$ рівняння (9), який при $s = t$ дорівнює фіксованому значенню $x(t)$, тобто $\varphi(t) = \Phi(t,s,x,\varepsilon,h)$. Тоді для функції $h(t,x,\varepsilon)$, що визначає (ρ,η)—многовид системи (6), одержуємо рівняння

$$h(t,x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} T(t,s)Y_0 \times$$
$$\times g(s,\varphi(s),h(s,\varphi(s),\varepsilon),\varepsilon)ds. \quad (10)$$

З другого боку, якщо рівняння (10) має розв'язок, що задовольняє умови (7)—(8), то цей розв'язок визначає (ρ,η)—многовид M системи (5). Дійсно, для довільної точки $(t_0,x_0,y_{t_0}) \in M$ маємо $y_{t_0} = h(t_0,x_0,\varepsilon)$ і рівняння (9) має розв'язок $x(t) = \varphi(t) = \Phi(t,t_0,x_0,\varepsilon,h)$ такий, що $x(t_0) = x_0$.

Із співвідношення $\Phi(t,s,\Phi(s,t_0,x_0,\varepsilon,h),\varepsilon,h) = \Phi(t,t_0,x_0,\varepsilon,h)$ і рівності (10) одержуємо, що функція $y_t = h(t,\varphi(t),\varepsilon)$ є розв'язком другого рівняння системи (5).

Таким чином, рівняння (10) можна розглядати як операторне рівняння для знаходження функції $h(t,x,\varepsilon)$.

2. Розглянемо допоміжні нерівності.

Лема 1. *Нехай неперервна додатна на* $[t_0 - T, t_0]$ *функція* $u(t)$ *задовольняє нерівність*

$$u(t) \le f(t) + \int_t^{t_0} [\varphi_1(t)\varphi_2(s)u(s) + \psi(t,s)]ds, \quad (11)$$

де $f(t), \varphi_1(t), \varphi_2(s), \psi(t,s)$ *— неперервні, невід'ємні функції для* $t_0 - T \le t \le s \le t_0$.

Тоді справджується нерівність

$$u(t) \le f(t) + \int_t^{t_0} \psi(t,s)ds +$$
$$+\varphi_1(t)\int_t^{t_0} \varphi_2(s)[f(s) + \int_s^{t_0}\psi(s,\xi)d\xi] \times$$
$$\times \exp\{\int_t^s \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi\}ds. \quad (12)$$

Доведення леми 1 нескладно провести шляхом зведення інтегральної нерівності з сепарабельним ядром (11) до лінійної диференціальної нерівності, використовуючи формулу варіації сталих. Воно аналогічне доведенню теореми 1.1.3 з [9].

Зауваження. *Лема 1 — це узагальнення лінійної інтегральної нерівності [10,с.16]. Відзначимо, що T може бути вибраним як завгодно великим, тому оцінка (12) справджується для всіх $t \le t_0$, якщо функції $f_1, \varphi_1, \varphi_2, \psi$ визначені для $-\infty \le t \le s \le t_0$.*

Розглянемо клас $C(\rho,\eta)$ функцій $h:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times[0,\varepsilon_0]\to C[-\varepsilon\Delta,0]$ з нормою $\|h\|=\sup\limits_{t,x}|h(t,x,\varepsilon)|$, що задовольняють умови (7)—(8). Для довільної функції $h\in C(\rho,\eta)$ розглянемо рівняння (9).

Лема 2. *Нехай виконуються умови I, III. Тоді оператор* $\Phi(t,s,x,\varepsilon,h)$ *для всіх* $s\geq t$ *задовольняє нерівність*

$$|\Phi(t,s,x,\varepsilon,h)-\Phi(t,s,\bar{x},\varepsilon,\bar{h})|\leq$$

$$\leq K\left(|x-\bar{x}|+\frac{c_1(\rho,\eta)}{\gamma}\|h-\bar{h}\|\right)e^{\gamma(s-t)},$$

де $\gamma=\alpha+K[b_1(\rho,\varepsilon)+c_1(\rho,\varepsilon)\eta]$.

Доведення. Розглянемо функції $\varphi(t)=\Phi(t,s,x,\varepsilon,h)$, $\bar{\varphi}(t)=\Phi(t,s,\bar{x},\varepsilon,\bar{h})$. Ці функції задовольняють інтегральні рівняння

$$\varphi(t)=X(t,s)x++\int\limits_s^t X(t,\tau)f(\tau,\varphi(\tau),$$

$$h(\tau,\varphi(\tau),\varepsilon),\varepsilon)d\tau,\quad \bar{\varphi}(t)=X(t,s)\bar{x}+$$

$$+\int\limits_s^t X(t,\tau)f(\tau,\bar{\varphi}(\tau),\bar{h}(\tau,\bar{\varphi}(\tau),\varepsilon),\varepsilon)d\tau.$$

На підставі припущення I маємо, що фундаментальна матриця $X(t,s)$ рівняння $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ задовольняє нерівність $|X(t,s)|\leq Ke^{\alpha|t-s|}$, $K>0$, $\alpha\geq 0$.

Враховуючи умови (4), (7), (8), одержуємо для $s\geq t$

$$|\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)|\leq Ke^{\alpha(s-t)}|x-\bar{x}|+$$

$$+K\int\limits_t^s e^{\alpha(\tau-t)}\{[b_1(\rho,\varepsilon)+c_1(\rho,\varepsilon)\eta]|\varphi(s)-\bar{\varphi}(s)|+$$

$$+c_1(\rho,\varepsilon)\|h-\bar{h}\|\}d\tau.$$

Використовуючи тепер лему 1, поклавши $f(t)=Ke^{\alpha(s-t)}|x-\bar{x}|$, $\varphi_1(t)=K[b_1(\rho,\varepsilon)+c_1(\rho,\varepsilon)\eta]e^{-\alpha t}$, $\varphi_2(s)=e^{\alpha s}$, $\psi(t,s)=Kc_1(\rho,\varepsilon)\|h-\bar{h}\|e^{\alpha(s-t)}$, одержуємо потрібну оцінку. Лема 2 доведена.

Визначимо на класі функцій $C(\rho,\eta)$ оператор $S_{t,x}(h)$ рівністю

$$S_{t,x}(h)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)Y_0g(s,\varphi(s),$$

$$h(s,\varphi(s),\varepsilon),\varepsilon)ds, \tag{13}$$

де $\varphi(s)=\Phi(s,t,x,\varepsilon,h)$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови I—III і* $\beta-\gamma>0$. *Тоді оператор* $S_{t,x}(h)$ *задовольняє нерівності*

$$|S_{t,x}(h)|\leq\frac{N}{\varepsilon\beta}a_2(\rho,\varepsilon), \tag{14}$$

$$|S_{t,x}(h)-S_{t,x}(\bar{h})|\leq\omega(\rho,\eta,\varepsilon)|x-\bar{x}|+$$
$$+\left(\frac{c_1(\rho,\eta)\omega(\rho,\eta,\varepsilon)}{\gamma}+\frac{c_2(\rho,\eta)N}{\varepsilon\beta}\right)\|h-\bar{h}\|, \tag{15}$$

де $\omega(\rho,\eta,\varepsilon)=\dfrac{NK[b_2(\rho,\varepsilon)+c_2(\rho,\varepsilon)\eta]}{\varepsilon(\beta-\gamma)}$.

Доведення. Оцінка (14) безпосередньо випливає з нерівності (3) та властивостей функцій g і h. Встановимо оцінку (15). Маємо

$$|S_{t,x}(h)-S_{t,\bar{x}}(\bar{h})|\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t Ne^{-\beta(t-s)}\times$$

$$\times|g(s,\varphi(s),h(s,\varphi(s),\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-g(s,\bar{\varphi}(s),\bar{h}(s,\bar{\varphi}(s),\varepsilon),\varepsilon)|ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t Ne^{-\beta(t-s)}\{[b_2(\rho,\varepsilon)+c_2(\rho,\varepsilon)\eta]\times$$

$$\times|\varphi(s)-\bar{\varphi}(s)|+c_2(\rho,\varepsilon)\|h-\bar{h}\|\}ds.$$

Використовуючи тепер лему 2, одержуємо

$$|S_{t,x}(h)-S_{t,\bar{x}}(\bar{h})|\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t Ne^{-\beta(t-s)}\times$$

$$\times\Bigg\{K[b_2(\rho,\varepsilon)+c_2(\rho,\varepsilon)\eta]|x-\bar{x}|e^{\gamma(t-s)}+$$

$$+\Bigg[\frac{Kc_1(\rho,\varepsilon)}{\gamma}(b_2(\rho,\varepsilon)+c_2(\rho,\varepsilon)\eta)e^{\gamma(t-s)}+$$

$$+c_2(\rho,\varepsilon)\Big]\|h-\bar h\|\Big\}ds =$$

$$= \frac{NK[b_2(\rho,\varepsilon)+c_2(\rho,\varepsilon)\eta]}{\varepsilon(\beta-\gamma)}|x-\bar x| +$$

$$+\frac{N}{\varepsilon}\Big[\frac{Kc_1(\rho,\varepsilon)(b_2(\rho,\varepsilon)+c_2(\rho,\varepsilon)\eta)}{\gamma(\beta-\gamma)} +$$

$$+\frac{c_2(\rho,\varepsilon)}{\beta}\Big]\|h-\bar h\|.$$

Лема 3 доведена.

3. Припустимо, що при визначенні класу функцій $C(\rho,\eta)$ числа ρ і η вдалося вибрати так, щоб справджувалися нерівності

$$\alpha + K[b_1(\rho,\varepsilon)+c_1(\rho,\varepsilon)\eta] < \beta,$$

$$\frac{N}{\varepsilon\beta}a_2(\rho,\varepsilon) \le \rho, \quad \omega(\rho,\eta,\varepsilon) < \eta, \tag{16}$$

$$\frac{c_1(\rho,\varepsilon)}{\alpha + K[b_1(\rho,\varepsilon)+c_1(\rho,\varepsilon)\eta]} + \frac{c_2(\rho,\varepsilon)N}{\varepsilon\beta} \le q < 1.$$

Тоді з оцінок (14), (15) маємо

$$|S_{t,x}(h)| \le \rho,\ |S_{t,x}(h) - S_{t,\bar x}(h)| \le \eta|x-\bar x|,$$

$$|S_{t,x}(h) - S_{t,x}(\bar h)| \le q|h-\bar h|.$$

Це означає, що для таких ρ,η оператор $S_{t,x}(h)$ відображає $C(\rho,\eta)$ в себе і є стискаючим. Отже, в цьому випадку рівняння (10) має в $C(\rho,\eta)$ єдиний розв'язок $h^*(t,x,\varepsilon)$, а система рівнянь (5) — інтегральний многовид, що визначається співвідношенням

$$y_t = h^*(t,x,\varepsilon). \tag{17}$$

Підсумуємо наведені міркування у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай виконуються умови I—III, де функції a_i, b_i, c_i $(i = 1,2)$ і числа $\alpha,\beta,N,K,L,\varepsilon_0$ такі, що допускають існування таких ρ і η, що здійснюються нерівності (16). Тоді для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ система (5) має єдиний (ρ,η)—інтегральний многовид повільних змінних (17).*

Зауваження. *Умови існування інтегрального многовиду зображуються як сукупність нерівностей для деяких допоміжних функцій. Вибираючи ці функції певним чином, можна одержати умови існування інтегральних многовидів для конкретних класів систем.*

Як приклад розглянемо випадок, коли корені характеристичного рівняння $\det(\lambda E - L(t, e^{\lambda\cdot})) = 0$ для всіх $t \in \mathbf{R}$ лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\beta_0 < 0$. Тоді для оператора зсуву $T(t,s)$ справджується оцінка [7] $|T(t,s)\varphi| \le N_0 e^{-\frac{\beta_0}{\varepsilon}(t-s)}|\varphi|$, $N_0 > 0, t \ge s$. Вибираючи тепер $\beta = \beta_0\varepsilon^{-1}$, функції a_1, b_1, c_1 — сталими, a_2, b_2, c_2 — нескінченно малими при $\rho \to 0, \varepsilon \to 0$, легко бачити, що при достатньо малих ε,ρ,η нерівності (16) справджуються. Отже, в цьому випадку система рівнянь (5) має єдиний інтегральний многовид у класі $C(\rho,\eta)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Задирака К.В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. мат журн.— 1965.— **17**, N1.— С.47—63.

2. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий.— М.: Наука, 1988.— 256 с.

3. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Укр. мат журн.— 1968.— **20**, N6.— С.791—801.

4. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат журн.— 1982.— **34**, N6.— С.725—731.

5. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат журн.— 1986.— **38**, N3.— С.335—340.

6. *Черевко І.М.* Інтегральні многовиди і декомпозиція нелінійних сингулярно збурених систем із запізненням // Нелінійні коливання.— 1998.— **1**, N1.— С.139—144.

7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.

8. *Лыкова О.Б., Барис Я.С.* Приближенные интегральные многообразия.— К.: Наук. думка, 1993.— 314 с.

9. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения.— К.: Наук. думка, 1991.— 248 с.

10. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.— 152 с.