

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА-СТІЛТ'ЕСА

Отримано новий опис виняткової множини в асимптотичній оцінці зверху типу Вімана через максимум підінтегральної функції для інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

We obtain a new description of the exceptional set in an asymptotic estimate from above of Wiman's type in terms of maximum of integrand function of the Laplace-Stieltjes integrals.

За теоремою Вімана-Валірона [1,2] для кожної цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subseteq [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E \frac{1}{r} dr < +\infty$), така, що для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad (1)$$

де

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z|=r\},$$

$$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}.$$

Різнманітні аналоги цієї теореми для цілих рядів Діріхле отримано в [3]. В [4] отримано непокращувані достатні умови для справедливості аналогів класичної нерівності Вімана. Певний аналог нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле отримано в [5]. У статтях [6,7] доведено деякі твердження про нерівності типу Вімана для інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса вигляду

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} \nu(dx), \quad (2)$$

де ν — зліченно-адитивна невід'ємна на $\mathbb{R}_+^p$ міра з необмеженим носієм, f — довільна невід'ємна ν -вимірна функція на $\mathbb{R}_+^p$. Через $\mathcal{I}^p(\nu)$ позначимо клас функцій $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, зображуваних для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралом вигляду (2).

Через $\nu(E)$ позначимо ν -міру ν -вимірної множини $E \subseteq \mathbb{R}^p$. Для $0 \leq a \leq b < +\infty$ покладемо

$$\nu_0(a, b] = \nu\{x \in \mathbb{R}^p : a < \|x\| \leq b\},$$

де $\|\cdot\|$ — евклідова норма на $\mathbb{R}^p$.

Для $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$ і $\sigma \in \mathbb{R}^p$ позначимо

$$\mu_*(\sigma, F) = \sup\{f(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} : x \in \text{supp } \nu\},$$

де $\text{supp } \nu$ — носій міри ν .

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$, таких, що $\psi(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$); L^+ — підклас L , в який входять строго зростаючі до $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ функції, L_1^+ — підклас L^+ , який складається з функцій $\psi \in L^+$, таких, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty.$$

Для функції $\psi \in L^+$ через ψ^{-1} позначимо обернену до неї функцію. Через L_0^+ позначимо підклас L^+ , в який входять такі функції $h \in L^+$, що $h(t) \geq \ln t$ ($t \geq t_0$), і обернені функції до них задовольняють умови

$$h^{-1}(t\varepsilon(t)) = o(h^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

$$(\forall C > 0) : h^{-1}(t + C) = O(h^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

для кожної функції $\varepsilon(t) \rightarrow +0$ ($t \rightarrow +\infty$).

У випадку, коли міра ν є прямим добутком зліченно-адитивних мір ν_j на $\mathbb{R}_+$, тобто

$$\nu = \nu_1 \times \dots \times \nu_p,$$

в [6] отримано аналог нерівності Вімана (1) для інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса за мірою ν .

Для довільної міри ν і класу $\mathcal{I}^p(\nu)$ при $p \geq 2$ в [7] доведено таку теорему.

Теорема А. Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо для міри ν виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln t} \ln \nu(\{x \in \mathbb{R}^p: t - \sqrt{\psi(t)} \leq \|x\| \leq t + \sqrt{\psi(t)}\}) \leq \beta < +\infty,$$

де $\psi \in L_1^+$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться така множина $E \subseteq \mathbb{R}^p$, що для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p \setminus E$

$$F(\sigma) \leq C \mu_*(\sigma, F) (\ln \mu_*(\sigma, F))^{\beta+\varepsilon}$$

і

$$meas_p(E \cap S_R) = O(R^{p-1}) \quad (R \rightarrow +\infty),$$

де $meas_p$ — лебегова міра на $\mathbb{R}^p$, S_R — образ циліндра $\{x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p: x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$ при такому повороті системи координат навколо початку координат, що додатна піввісь Ox_1 переходить у промінь $\{x \in \mathbb{R}^p: x_1 = \dots = x_p \geq 0\}$.

Об'єктом розгляду в цій статті є клас $\mathcal{I}^p(\nu)$ інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса з довільною зліченно-адитивною мірою ν на $\mathbb{R}^p$ з необмеженим носієм, а основним результатом є отримання непокращуваних умов достатніх для справедливості аналогів класичної нерівності Вімана для класу $\mathcal{I}^p(\nu)$.

Наступна теорема містить новий опис величини виняткових множин у нерівностях типу Вімана для функцій $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ з класу $\mathcal{I}^p(\nu)$.

Теорема 1. Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$ і $h \in L_0^+$. Якщо виконується умова

$$\int_0^{+\infty} \frac{dh(\nu_0(0, t])}{t} < +\infty, \quad (3)$$

то існує така множина E , що

$$\nu_p(E \cap K) < +\infty,$$

і співвідношення

$$F(\sigma) \leq o(\mu_*(\sigma, F) h^{-1}(\ln \mu_*(\sigma, F))) \quad (4)$$

виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K \setminus E$ для кожного конуса $K \subseteq \mathbb{R}_+^p$ з вершиною в початку координат O , такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subseteq \mathbb{R}_+^p$.

Нам буде потрібна така лема.

Лема 1. Якщо $v(t)$ — невід'ємна додатна при $t > t_0 \geq 0$ зростаюча на $[0, +\infty)$ функція, така, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt < +\infty, \quad (5)$$

то існує така додатна неперервна на $[0, +\infty)$, зростаюча до $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ функція $\psi(t)$, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$$

і

$$v(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що, не зменшуючи загальності міркувань, можемо вважати, що функція $v(t)$ строго зростає на $[0, +\infty)$. Для цього досить вибрати замість функції $v(t)$ функцію $v_1(t) = v(t) + \ln(1 + t^2)$. Зрозуміло, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{v_1(t)}{t^2} dt < +\infty,$$

і $v_1(t) \geq v(t)$ ($t \geq 0$), та якщо

$$v_1(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

то й

$$v(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Припускаючи, що функція $v(t)$ — строго зростаюча, виберемо функцію

$$V(t) = \int_0^{et} \frac{v(x)}{x} dx \quad (t \geq 0).$$

Зауважимо, що $V(0) = 0$ і

$$V(t) \geq \int_t^{et} \frac{v(x)}{x} dx \geq v(t) \quad (t \geq 0), \quad (6)$$

а також, що з умови (5) і монотонності v випливає, що

$$\frac{v(t)}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

і тому

$$\frac{V(t)}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Звідси

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{v(et)}{t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dV(t) = \left. \frac{V(t)}{t} \right|_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{V(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{V(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Тобто з умови (5) випливає, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{V(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

З огляду на (6) залишається вибрати неперервну додатну зростаючу до $+\infty$ функцію ψ , для якої виконуються умови

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

$$V(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Нехай

$$l(t) = \int_t^{+\infty} \frac{V(x)}{x^2} dx,$$

$$C(t) = (l(t))^{-\frac{1}{2}} \quad (t \geq 0).$$

Виберемо тепер таку додатну неперервну зростаючу на $[0, +\infty)$ функцію ψ , що обернена до неї

$$\psi^{-1}(t) = \begin{cases} C(t)V(t), & t \geq 2, \\ C(2)V(2)(t-1), & t \in [1; 2]. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція ψ^{-1} — неперервна і строго зростаюча на $[1, +\infty)$, тому такою ж є на $[0, +\infty)$ функція ψ , при цьому $\psi(0) = 1$, бо $\psi^{-1}(1) = 0$.

Зауважимо тепер, що

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt &= \int_1^2 \frac{C(2)V(2)(t-1)}{t^2} dt + \\ &+ \int_2^{+\infty} \frac{C(t)V(t)}{t^2} dt = C(2)V(2) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \\ &- \int_2^{+\infty} \frac{dl(t)}{\sqrt{l(t)}} = C(2)V(2) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ 2\sqrt{l(2)} < +\infty, \end{aligned}$$

а, оскільки,

$$\int_A^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \geq \frac{\psi^{-1}(A)}{A},$$

то $\psi^{-1}(t) = o(t)$ ($t \rightarrow +\infty$). Тому, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt &= \left. \frac{\psi^{-1}(t)}{t} \right|_1^{+\infty} + \\ &+ \int_1^{+\infty} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)}, \end{aligned}$$

тобто функція ψ задовольняє всі потрібні умови, позаяк, за вибором, при $t \rightarrow +\infty$

$$v(t) \leq V(t) \leq \frac{1}{C(t)} \psi^{-1}(t) = o(\psi^{-1}(t)).$$

Лему доведено.

Доведення теореми 1. Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $F(0) = 1$. Справді, зважаючи на те, що $F(0) \neq 0$, у випадку $F(0) \neq 1$ досить розглянути функцію

$$F_1(\sigma) = F(\sigma)/F(0), \quad F_1(0) = 1.$$

Оскільки

$$\mu_*(\sigma, F) = F(0)\mu_*(\sigma, F_1)$$

і $h \in L_0^+$, то в конусі зростання співвідношення (4) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$F_1(\sigma) \leq o(\mu_*(\sigma, F_1)h^{-1}(\ln \mu_*(\sigma, F_1))).$$

Для кожного фіксованого $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^p, |\sigma_0| =$ крім того, при $t \rightarrow +\infty$
1, визначимо функцію

$$g(t) = g_{\sigma_0}(t) = \ln F(t\sigma_0), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

За лемою 1, застосованою до функції

$$v(t) = \begin{cases} h(\nu_0(0, t]) - h(\nu_0(0, t_0]), & t \geq t_0; \\ h(\nu_0(0, t_0]), & t \in [0, t_0], \end{cases}$$

де t_0 таке, що $h(\nu_0(0, t_0]) > 0$, отримуємо, що

$$\exists \psi \in L_1^+ : h(\nu_0(0, t]) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Зауважимо тепер, що з умови (3) і того, що $h(t) \geq \ln t$ ($t \rightarrow +\infty$) впливає, що виконується умова

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(0, t]}{t} < +\infty, \quad (7)$$

Тому, ввівши як і в доведенні теореми 1 ([8]), для фіксованого $\sigma_0 \in K$ множину

$$E(\sigma_0) = \left\{ \sigma = t\sigma_0 : t > 0, \frac{2}{y^*} g'_{\sigma_0}(t) > \right. \\ \left. > \psi\left(\frac{g_{\sigma_0}(t)}{2}\right) \right\}$$

і

$$E = \bigcup_{\sigma_0 \in S_1} E(\sigma_0),$$

де $S_1 = \{\sigma \in \mathbb{R}_+^p : |\sigma| = 1\}$, за теоремою 1 з [8] отримаємо, що

$$\tau_p(E \cap K) < +\infty$$

і

$$\ln F(\sigma) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_*(\sigma, F)$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$). Зокрема, при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$)

$$\frac{1}{2} \ln F(\sigma) \leq \ln \mu_*(\sigma, F) \quad (|\sigma| \geq c_0). \quad (8)$$

З доведення цієї ж теореми 1 з [8], для кожного фіксованого $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^p$ ($|\sigma_0| = 1$) і для всіх $t > 0$ маємо

$$F(t\sigma_0) \leq 2\mu_*(t\sigma_0, F)\nu_0\left(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\right],$$

$$\inf\{g'_{\sigma_0}(t) : \sigma_0 \in S_1 \cap K\} \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Тоді при $|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma = t\sigma_0$, $\sigma \in K$, завдяки (9) і умові $h \in L_0^+$ отримуємо

$$F(\sigma) \leq 2\mu_*(\sigma, F)\nu_0\left(0, \frac{2g'(t)}{y^*}\right] \leq \\ \leq 2\mu_*(\sigma, F)h^{-1}\left(o\left(\psi^{-1}\left(\frac{2g'(t)}{y^*}\right)\right)\right) = \\ = \mu_*(\sigma, F)o\left(h^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\frac{2g'(t)}{y^*}\right)\right)\right).$$

Звідки при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) одержуємо

$$F(\sigma) \leq \mu_*(\sigma, F) \cdot \\ \cdot o\left(h^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi\left(\frac{\ln F(\sigma)}{2}\right)\right)\right)\right) \leq \\ \leq \mu_*(\sigma, F)o\left(h^{-1}\left(\frac{\ln F(\sigma)}{2}\right)\right),$$

а отже, за нерівністю (8), при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) остаточно отримуємо

$$F(\sigma) \leq \mu_*(\sigma, F)o\left(h^{-1}\left(\frac{\ln F(\sigma)}{2}\right)\right) \leq \\ \leq o(\mu_*(\sigma, F)h^{-1}(\ln \mu_*(\sigma, F))).$$

Теорему 1 доведено.

Умову (3) теореми 1 в класі $\mathcal{I}^p(\nu)$ послабити, взагалі кажучи, не можна. Сформулюємо спочатку наслідок у випадку $h(t) = t^q$, $q \in (0, +\infty)$.

Наслідок 1. Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо виконується умова

$$(\exists q > 0) : \int_{t_0}^{+\infty} \frac{(\nu_0(0, t])^q}{t^2} dt < +\infty, \quad (10)$$

то співвідношення

$$F(\sigma) \leq o(\mu_*(\sigma, F) \ln^{1/q} \mu_*(\sigma, F)) \quad (11)$$

виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K \setminus E$ для кожного конуса K в $\mathbb{R}_+^p$ з вершиною в початку координат O , такого, що $\bar{K} \setminus \{O\} \subseteq \mathbb{R}_+^p$, причому для множини E виконується

$$\tau_p(E \cap K) < +\infty.$$

Справді, вище вже зазначалось, що для додатної неспадної на $[0, +\infty)$ функції ψ

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\psi(t)}{t} < +\infty \iff \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

Наступна теорема, вказує на те, що оцінку (11) (в загальному) і саме твердження наслідку 2 в класі $\mathcal{I}^p(\nu)$ істотно покращити не можна.

Теорема 2. Для кожного $q > 0$ існують міра ν , для якої виконується умова (10) і для кожного $\eta > 0$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{(\nu_0(0, t])^{q+\eta}}{t^2} dt = +\infty,$$

та функція $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$, такі, що для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного конуса $K \subseteq \mathbb{R}_+^p$ з вершиною в початку координат O , такого, що $\bar{K} \setminus \{O\} \subseteq \mathbb{R}_+^p$, виконується

$$\frac{F(\sigma)}{\mu_*(\sigma, F)(\ln \mu_*(\sigma, F))^{1/q-\varepsilon}} \rightarrow +\infty$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K$).

Доведення. Нехай $\lambda_0 = 0$, $n_0 = 0$,

$$\lambda_k = e^k, \quad n_k = \left(\frac{e^k}{k \ln^2(k+1)} \right)^{1/q} \quad (k \geq 1).$$

Розглянемо цілий ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\{-\lambda_k \ln \lambda_k + z \lambda_k\}.$$

Оскільки при $1 \leq k \uparrow +\infty$

$$\varkappa_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k - \lambda_{k-1} \ln \lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \uparrow +\infty,$$

то, як добре відомо [3, с.19], у цьому випадку при $x \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$

$$\mu(x, f) = \exp\{-\lambda_k \ln \lambda_k + x \lambda_k\}.$$

Зауважимо тепер, що для $x \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$

$$\frac{e^k}{e-1} \leq \ln \mu(x, f) \leq \left(1 + \frac{1}{e-1}\right) e^k,$$

а також

$$x - 1 - \frac{1}{e-1} \leq k \leq x - \frac{1}{e-1}.$$

Виберемо міру ν , зосереджену в точках векторної послідовності $\hat{\lambda}_k = (\lambda_k, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^p$ ($k \geq 1$) і таку, що

$$\nu(\{\hat{\lambda}_k\}) = n_k.$$

для кожного фіксованого $k \geq 1$

Безпосередніми обчисленнями перевіряється виконання умови (10). Справді,

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{d(\nu_0(0, t])^q}{t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Delta_k}{\lambda_k},$$

де

$$\Delta_k = (\nu_0(0, \lambda_k])^q - (\nu_0(0, \lambda_k - 0])^q.$$

Зауважуючи, що $\Delta_k \asymp (n_k)^q$, звідси отримуємо, що умова (10) виконується.

Нехай функція $f: \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ така, що

$$f(\hat{\lambda}_k) = \exp\{-\lambda_k \ln \lambda_k\}.$$

Розглянемо функцію

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) \exp\langle x, \sigma \rangle d\nu(x).$$

Оскільки

$$F(\sigma) = \sum_{k=1}^{+\infty} n_k \cdot f(\hat{\lambda}_k) e^{\|\sigma\| \lambda_k}$$

і для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}_+^p$

$$\begin{aligned} n_k \cdot f(\hat{\lambda}_k) e^{\|\sigma\| \lambda_k} &= \\ &= \exp\{-(1 + o(1)) \lambda_k \ln \lambda_k\} \quad (k \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

то зрозуміло, що $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Далі, для всіх $\sigma \in \mathbb{R}_+^p$

$$\begin{aligned} \mu_*(\sigma, F) &= \\ &= \sup\{f(x) \exp\langle x, \sigma \rangle : x \in \text{supp } \nu\} = \\ &= \sup\{f(\hat{\lambda}_k) \exp\langle \hat{\lambda}_k, \sigma \rangle : k \geq 1\} = \\ &= \mu(\|\sigma\|, f). \end{aligned}$$

Тому, для всіх $k \geq 1$ і всіх $\sigma \in \mathbb{R}_+^p$, таких, що $\|\sigma\| \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$, отримуємо

$$F(\sigma) \geq n_k \cdot \mu(\|\sigma\|, f) \geq d_{p,q} \mu_*(\sigma, F) \times$$

$$\times \left(\frac{\ln \mu_*(\sigma, F)}{\ln \ln \mu_*(\sigma, F) \ln^2 \ln \mu_*(\sigma, F)} \right)^{1/q}, \quad (12)$$

де $d_{p,q} > 0$ — деяка стала, залежна лише від p і q . Оскільки, як встановлено вище,

$$\ln \mu_*(\sigma, F) \rightarrow +\infty$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K$), то з нерівності (12) отримуємо потрібне співвідношення.

Теорему 2 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Valiron G. *Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere* // Ann Fac. Sci. Univ. Toulouse. — 1914. — V. 5. — P. 117–257.
2. Wiman A. *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorischen Reihe* // Acta Math. — 1914. — V. 37. — P. 305–326.
3. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. — К.: ІС-ДО, 1993. — 168 с.
4. Скасків О.Б. Про наявність виняткових значень у співвідношенні типу Бореля для цілих рядів Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. — 1988. — Вип. 30. — С. 53–54.
5. Орищин О.Г., Скасків О.Б. Нерівності типу Вімана для кратних рядів Діріхле // Вісник ДУ "Львівська політехніка". — 1998. — №346. — С. 43–48.
6. Скасків О.Б., Тракало О.М. Про класичну нерівність Вімана для цілих кратних рядів Діріхле // Матем. методи і фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 44, №3. — С. 34–39.
7. Орищин О.Г., Скасків О.Б., Тракало О.М. Зауваження про нерівності типу Вімана для кратних рядів Діріхле // Вісник ДУ "Львівська політехніка". — 1999. — №364. — С. 127–131.
8. Zikrach D.Yu., Skaskiv O.B. *On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals* // Mat. Stud. — 2011. — V. 35, №2. — P. 131–141.