УДК 514.764.258

©2000 р. В.С. Собчук

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО МАЙЖЕ ГЕОДЕЗІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В КЛАСІ НАПІВСИМЕТРИЧНИХ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Встановлено умови, за яких напівсиметричний псевдоріманів простір V_n допускає частково зведене майже геодезійне відображення на деякий напівсиметричний псевдоріманів простір $\overline{V}_n$.

It is obtained conditions in which semi-symmetric pseudo-Rieman space V_n admits redused mapping on some semi-symmetric pseudo-Rieman space $\overline{V}_n$.

Напівсиметричними М.С.Синюков назвав псевдоріманові простори, для яких альтернована друга коваріантна похідна тензора кривини дорівнює нулеві:

$$R^h_{ijk,[lm]} = 0.$$

Тут і далі квадратні дужки означають альтернування за вказаними індексами. За допомогою тотожності Річчі ця умова зводиться до вигляду

$$R^h_{\alpha jk}R^\alpha_{ilm} + R^h_{i\alpha k}R^\alpha_{jlm}+$$

$$+R^h_{ij\alpha}R^\alpha_{klm} - R^\alpha_{ijk}R^h_{\alpha lm} = 0. \qquad (1)$$

Співвідношення (1) відіграє вирішальну роль у теорії симетричних просторів. Напівсиметричні простори природно виникають у теорії геодезійних відображень. Клас напівсиметричних просторів істотно ширший, ніж клас симетричних просторів.

Узагальнюючи геодезійні відображення, М.С.Синюков прийшов до майже геодезійних відображень (МГВ), які в спільній за відображенням системі координат характеризуються такими рівняннями [1]:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)}, \qquad (2)$$

$$F^h_{(i,j)} + \sigma_{(i}F^\alpha_{j)}F^h_\alpha = \nu_{(i}\delta^h_{j)} + \mu_{(i}F^h_{j)}, \qquad (3)$$

де $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ і Γ^h_{ij} – символи Кристофеля псевдоріманових просторів V_n і $\overline{V}_n$, ψ_i, σ_i, ν_i, μ_i – деякі вектори, F^α_h – афінор, який задає МГВ, кома – знак коваріантної похідної у V_n, круглі дужки означають симетризування за вказаними індексами.

Ми називали МГВ приведеним [2], якщо афінор F^h_i визначає структуру майже добутку або майже комплексну структуру:

$$F^\alpha_i F^h_\alpha = e\delta^h_i, \qquad e = \pm 1; \qquad (4)$$

вектори ψ_i і σ_i градієнтні:

$$\psi_i = \psi_{,i}, \qquad \sigma_i = \sigma_{,i} \qquad (5)$$

і виконана умова

$$\sigma_{i,j} = F_{ij} + \sigma_{(i}F^\alpha_{j)}\sigma_\alpha, \qquad (6)$$

де $F_{ij} = F^\alpha_i g_{\alpha j}$, g_{ij} – метричний тензор простору V_n.

Із (5) знаходимо $\sigma_{i,j} = \sigma_{,ij}$, тобто тензор $\sigma_{i,j}$ є симетричним. Тому з (6) випливає, що F_{ij} – симетричний тензор:

$$F_{[ij]} = 0. \qquad (7)$$

З (3), (4) і (7) знаходимо, що афінор F^h_i абсолютно паралельний:

$$F^h_{i,j} = 0. \qquad (8)$$

Тут ми розглядаємо МГВ, яке задовольняє умови (4) і (5), а умова (6) замінюється слабкішою умовою (7). І в цьому випадку виконується умова (8). Таке МГВ називаємо частково зведеним.

Розглянемо частково зведене МГВ напівсиметричного псевдоріманового простору V_n на напівсиметричний псевдоріманів простір $\overline{V}_n$. Із рівняння (2), враховуючи умови частково зведеного МГВ, знаходимо зв'язок між тензорами кривини просторів V_n і $\overline{V}_n$:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \psi_{i[j}\delta^h_{k]} + \sigma_{i[j}F_{k]}, \qquad (9)$$

де ψ_{ij} і σ_{ij} – деякі симетричні тензори, які виражаються через вектори ψ_i і σ_i, а також через афінор F^h_i.

Якщо в умову напівсиметричності простору $\overline{V}_n$, аналогічну умові (1), замість тензора кривини $\overline{R}^h_{ijk}$ підставити його вираз із (9) і врахувати, що V_n теж напівсиметричний, то одержимо таке рівняння:

$$\big[R_{hmjk}\psi_{il} + \psi_{m\alpha}R^\alpha_{mjk}g_{hl} + R_{h\overline{m}jk}\sigma_{il} + \\ +\sigma_{m\alpha}R^\alpha_{ijk}F_{hl}\big]_{[lm]} + [R_{himk}\psi_{jl} + \\ +R_{hi\overline{m}k}\sigma_{jl} + \psi_{\alpha(i)}R^\alpha_{(j)lm}g_{hk} + \\ +\sigma_{\alpha(i)}R^\alpha_{(j)lm}F_{hk}\big]_{[jk]} + \big[b_{\overline{m}(i)}\sigma_{(j)l}g_{hk} + b_{\overline{k}m}\sigma_{ij}g_{hl} - \\ -b_{m(i)}\sigma_{(j)l}F_{hk} - b_{km}\sigma_{ij}F_{hl}\big]_{[jk][lm]} = 0, \qquad (10)$$

де надкреслений індекс означає згортку з афінором F^h_i, наприклад $\sigma_{i\overline{j}} = \sigma_{i\alpha}F^\alpha_j$, і позначено $b_{ij} = \psi_{ij} - \sigma_{i\overline{j}}$, а вирази в квадратних дужках треба проальтернувати за вказаними індексами.

Дослідження умови (10) приводить до такого висновку.

Теорема. *Напівсиметричний псевдоріманів простір V_n допускає частково зведене майже геодезійне відображення на напівсиметричний псевдоріманів простір $\overline{V}_n$ з невиродженим тензором $a_{ij} = (n-1)\psi_{ij} - \sigma_{i\overline{j}} + F\sigma_{ij}$, де $F = F^\alpha_\alpha$, тоді і тільки тоді, коли V_n – симетричний простір із спеціальним тензором кривини:*

$$R_{hijk} = [A(g_{ij}F_{hk} + g_{hk}F_{ij}) + \\ +B(eg_{ij}g_{hk} + F_{ij}F_{hk})]_{[jk]}, \qquad (11)$$

де A і B – сталі.

Зауваження.

1. *Симетричні псевдоріманові простори, відмінні від просторів сталої кривини (ПСК), не допускають нетривіальних геодезійних відображень [1], але вони допускають МГВ.*

2. *Розглядається МГВ, яке не вироджується в геодезійне відображення, тобто припускається, що $\sigma_i \neq 0$ і афінор F^h_i не пропорційний символу Кронекера:*

$$F^h_i \neq \rho\delta^h_i. \qquad (12)$$

3. *У випадку $e = 1$ співвідношення (1), (7), (8) і (12) є необхідними й достатніми умовами звідності псевдоріманового простору V_n [1,3], тобто простір V_n розкладається в добуток підпросторів V_+ і V_-. При цьому на підпросторах V_+ і V_- афінор F^h_i відповідно має вигляд $F^h_i = \delta^h_i$ і $F^h_i = -\delta^h_i$. З (11) випливає, що підпростори V_+ і V_- є ПСК.*

4. *У випадку $e = -1$ умова (12) зайва, а умови (4), (7) і (8) визначають певну специфіку метричного тензора простору V_n, проте записувати її ми не будемо; скажемо лише, що компоненти метричного тензора задовольняють умови алгебраїчного й диференціального характеру.*

Це дослідження ініціював М.С.Синюков. Він мріяв прислужитися розвиткові науки незалежної України, проте його планам не судилося здійснитися.

Автор щиро дякує Ю.Ніколаєвському за конструктивні пропозиції, які відображені в зауваженнях 3 і 4.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств.— М.: Наука, 1979.— 256с.

2. *Собчук В.С.* Почти геодезические отображения римановых просторанств на симметрические римановы просторанства // Мат. заметки.— 1975.— **17**, вып.5.— С.757—763.

3. *Широков П.А.* Избранные работы по геометрии.— Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966.— 432 с.