УДК 512.543

©2000 р. В.С. Сікора

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

# ДІАМЕТР ГРАФА КЕЛІ ВІНЦЕВОГО ДОБУТКУ ДВОХ СИМЕТРИЧНИХ ГРУП ДЛЯ ДВОЕЛЕМЕНТНОЇ СИСТЕМИ ТВІРНИХ

Установлено, що вінцевий добуток двох симетричних груп завжди є 2-породженим. Одержано поліноміальну оцінку діаметра графа Келі групи $S_m \wr S_n$.

It is shown that the wreath product of two symmetric groups is 2-generated. The polynomial estimation of Kayley's graph diameter is obtained for group $S_m \wr S_n$.

Вінцеві добутки скінченних симетричних груп застосовуються в різних розділах дискретної математики: у теорії графів, при класифікації функцій багатозначної логіки тощо (див., зокрема, [1]). Низка тверджень про будову таких вінцевих добутків є в монографіях [2,3]. У працях [4,5] встановлено, що (за очевидними винятками) ці групи є максимальними підгрупами у відповідній симетричній групі, а в працях [6,7] вивчалися примітивні зображення таких вінцевих добутків (так звані симетричні експоненціювання). У [8] показано, що вони також можуть бути максимальними підгрупами у відповідних симетричних групах. Саме тому подальше дослідження будови таких вінцевих добутків є цікавою й перспективною задачею. Розвиваючи методику, запропоновану в [9,10], у даній статті будуються конкретні 2-елементні системи твірних вінцевих добутків двох симетричних груп і оцінюється діаметр графа Келі для таких систем твірних.

## Допоміжні твердження

**Лема 1.** *При довільному $k > 2$ група $S_k$ породжується підстановками*

$$\alpha_1 = (1,2), \quad \beta_1 = (1,2,...,k)$$

*або підстановками*

$$\alpha_2 = (1,2,...,k-1), \quad \beta_2 = (1,2,...,k).$$

Доведення леми див. в [11].

Нехай $\Sigma$ — деяка система твірних симетричної групи $S_k$. Символом $l_\Sigma(\sigma)$ позначимо довжину мінімального розкладу підстановки $\sigma$ на добуток твірних із $\Sigma$ і покладемо

$$L_\Sigma(k) = \max_{\sigma \in S_k} l_\Sigma(\sigma).$$

**Лема 2.** *1) Якщо $\Sigma = \{\alpha_1, \beta_1\}$, то*

$$L_\Sigma(k) \leq \frac{k(k-1)}{2}(k^2+k-1).$$

*2) Якщо $\Sigma = \{\alpha_2, \beta_2\}$, то*

$$L_\Sigma(k) \leq \frac{k(k-1)}{2}(k^2+2k-2).$$

Доведення леми 2 див. у [10].

## Двоелементні системи твірних вінцевого добутку двох симетричних груп

**Теорема 1.** *Група $T_{m,n} = S_m \wr S_n$, де $m,n$ — натуральні числа ($m,n > 2$), є 2-породженою, тобто містить незвідну систему твірних, яка складається з двох елементів.*

**Доведення.** Оскільки за лемою 1 симетричні групи $S_m$ і $S_n$ $(m,n > 2)$ є 2-породженими, то в групі $T_{m,n}$ стандартним чином можна визначити системи твірних, які складаються з чотирьох елементів:

$$a = [(1,2,...,m); \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

$$b = [(1,2); \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

$$c = [\varepsilon; (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon], \tag{1}$$

$$d = [\varepsilon; (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

або

$$\tilde{a} = [(1,2,...,m-1); \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\tilde{b} = [(1,2,...,m); \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\tilde{c} = [\varepsilon; (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon], \qquad (2)$$
$$\tilde{d} = [\varepsilon; (1,2,...,n-1), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Покажемо, що кількість твірних можна зменшити до двох. Розглянемо 4 різні випадки залежно від парності чисел $m$ і $n$.

*Випадок 1.* Нехай $m, n$ — непарні натуральні числа. Покажемо, що елементи

$$u_1 = [(1,2,...,m); (1,2), ..., (1,2)],$$
$$v_1 = [(1,2); (1,2), \varepsilon, (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon] \qquad (3)$$

утворюють незвідну систему твірних групи $T_{m,n}$. Для цього досить довести, що таблиці $a, b, c, d$ виражаються через $u_1$ та $v_1$.

Для довільного цілого числа $k$

$$u_1^k = [(1,2,...,m)^k; (1,2)^k, ..., (1,2)^k].$$

Оскільки $m$ — непарне число, то

$$u_1^m = [\varepsilon; (1,2), ..., (1,2)],$$
$$u_1^{m+1} = [(1,2,...,m); \varepsilon, ..., \varepsilon] = a.$$

Аналогічно можна перевірити, що для кожного цілого числа $s$

$$v_1^{2s} = [(1,2)^{2s}; (1,2)^s, (1,2)^s, (1,2,...,n)^{2s}, \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

і

$$v_1^{2s+1} = [(1,2)^{2s+1}; (1,2)^{s+1}, (1,2)^s, (1,2,...,n)^{2s+1}, \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Оскільки $n$ — непарне число, то

$$v_1^n = [(1,2); (1,2)^{\frac{n+1}{2}}, (1,2)^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

і

$$v_1^{n+1} = [\varepsilon; (1,2)^{\frac{n+1}{2}}, (1,2)^{\frac{n+1}{2}}, (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Можливі два наступні випадки.

а) $n = 4s+1$ ($s \in \mathbf{N}$), тобто $\dfrac{n+1}{2} = 2s+1$ — непарне, $\dfrac{n-1}{2} = 2s$ — парне натуральні числа. Тоді

$$v_1^n = [(1,2); (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

і

$$v_1^{n+1} = [\varepsilon; (1,2), (1,2), (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Обчислимо такі добутки:

$$v_1^{2n} = (v_1^n)^2 = [\varepsilon; (1,2), (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$(v_1^{n+1})^{n+1} = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

б) $n = 4s+3$ ($s = 0, 1, 2, ...$), тобто $\dfrac{n+1}{2} = 2s+2$ — парне, $\dfrac{n-1}{2} = 2s+1$ — непарне натуральні числа. Тоді одержимо, що

$$v_1^n = [(1,2); \varepsilon, (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$v_1^{n+1} = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$v_1^{2n} = (v_1^n)^2 = [\varepsilon; (1,2), (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Отже,

$$v_1^n = \begin{cases} [(1,2); (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon], & n = 4s+1, \\ [(1,2); \varepsilon, (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon], & n = 4s+3, \end{cases}$$

$$v_1^{n+1} = \begin{cases} [\varepsilon; (1,2), (1,2), (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon], & n = 4s+1, \\ [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon], & n = 4s+3. \end{cases}$$

Для зручності позначимо

$$z = [\varepsilon; (1,2), (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon] = v_1^{2n},$$

$$r = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon] = \begin{cases} (v_1^{n+1})^{n+1}, & n = 4s+1, \\ v_1^{n+1}, & n = 4s+3, \end{cases}$$

Можна перевірити, що для довільного цілого $i, 0 \le i \le \frac{m-3}{2}$, отримуємо

$$a^{2i} \cdot z \cdot a^{-2i} =$$

$$= [\varepsilon; \underbrace{\varepsilon, ..., \varepsilon}_{2i}, (1,2), (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

звідки

$$\prod_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} a^{2i} \cdot z \cdot a^{-2i} = [\varepsilon; \underbrace{(1,2), ..., (1,2)}_{m-1}, \varepsilon].$$

Поклавши $f = [\varepsilon; (1,2), ..., (1,2), \varepsilon]$, маємо

$$u_1 \cdot f \cdot a^{-1} = [\varepsilon; (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon] = c,$$

а тому

$$b = [(1,2); \varepsilon, ..., \varepsilon] =$$
$$= \begin{cases} c \cdot v_1^n, \ n = 4s+1, \\ v_1^n \cdot c, \ n = 4s+3. \end{cases}$$

Залишилося одержати вираз для $d$. Для довільного цілого $0 \le i \le m-3$ маємо

$$a^i \cdot r \cdot a^{-i} = [\varepsilon; \underbrace{\varepsilon, ..., \varepsilon}_{i+2}, (1,2,...,n), \underbrace{\varepsilon, ..., \varepsilon}_{m-i-3}],$$

а тому

$$a^{m-2} \cdot r \cdot a^{-(m-2)} = a \cdot (a^{m-3} \cdot r \cdot a^{-(m-3)}) \cdot a^{-1} =$$
$$= [\varepsilon; (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon] = d.$$

Таким чином, для непарних $m, n$ справджуються рівності

$$a = u_1^{m+1}; \ c = u_1 \cdot f \cdot a^{-1}; \ d = a^{m-2} \cdot r \cdot a^{-(m-2)};$$

$$b = \begin{cases} c \cdot v_1^n, \ \ n = 4s+1, \\ v_1^n \cdot c, \ \ n = 4s+3, s \in \mathbf{N}, \end{cases} \qquad (4)$$

де $f, r$ визначено вище. Отже, $u_1, v_1$ утворюють систему твірних вінцевого добутку $S_m \wr S_n$ при непарних $m$ і $n$.

*Випадок 2.* Нехай $m$ — непарне, $n$ — парне натуральні числа. Покажемо, що елементи

$$u_2 = [(1,2,...,m); (1,2), ..., (1,2)],$$

$$v_2 = [(1,2); (1,2,...,n), \varepsilon, (1,2,...,n-1), \varepsilon, ..., \varepsilon] \qquad (5)$$

утворюють незвідну систему твірних у $T_{m,n}$.

Очевидно, що для довільного числа $i \in \mathbf{Z}$ маємо

$$u_2^i = [(1,2,...,m)^i; (1,2)^i, ..., (1,2)^i],$$

а тому, оскільки $m$ непарне,

$$u_2^m = [\varepsilon; (1,2), ..., (1,2)]$$

і

$$u_2^{m+1} = [(1,2,...,m); \varepsilon, ..., \varepsilon] = a.$$

Для кожного $s \in \mathbf{Z}$ дістаємо

$$v_2^{2s} = [\varepsilon; (1,2,...,n)^s, (1,2,...,n)^s,$$
$$(1,2,...,n-1)^{2s}, \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

і

$$v_2^{2s+1} = [(1,2); (1,2,...,n)^{s+1}, (1,2,...,n)^s,$$
$$(1,2,...,n-1)^{2s+1}, \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Звідси отримуємо, що

$$v_2^{2n} = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1,2,...,n-1)^2, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$v_2^{2n+1} = [(1,2); (1,2,...,n), \varepsilon,$$
$$(1,2,...,n-1)^3, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

Поклавши $k = \frac{n}{2} - 2$, одержимо

$$(v_2^{2n})^k \cdot v_2^{2n+1} = [(1,2); (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Позначимо $f = (v_2^{2n})^{\frac{n}{2}-2} \cdot v_2^{2n+1}$, тоді

$$f^2 = [\varepsilon; (1,2,...,n), (1,2,...,n), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Покладемо далі

$$g = \prod_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} a^{2i} \cdot f^2 \cdot a^{-2i}$$
$$= [\varepsilon; (1,2,...,n), ..., (1,2,...,n), \varepsilon].$$

Враховуючи, що

$$g \cdot u_2^m = [\varepsilon; \pi, ..., \pi, (1,2)],$$

де $\pi = (1,2,...,n) \cdot (1,2) = (1)(2,3,...,n)$ — цикл довжини $n-1$, отримуємо

$$(g \cdot u_2^m)^{n-1} = [\varepsilon; \varepsilon, ..., \varepsilon, (1,2)].$$

Звідси маємо

$$a \cdot (g \cdot u_2^m)^{n-1} \cdot a^{-1} = [\varepsilon; (1,2), \varepsilon, ..., \varepsilon] = c.$$

Оскільки

$$c \cdot f = [(1,2); \sigma, \varepsilon, ...., \varepsilon],$$

де $\sigma = (1,2)\cdot(1,2,...,n) = (2)(1,3,...,n)$ — цикл довжини $n-1$, то

$$r = (c\cdot f)^2 = [\varepsilon;\sigma,\sigma,\varepsilon,....,\varepsilon].$$

Враховуючи, що $(1,2)\cdot\sigma = (1,2,...,n)$ і

$$c\cdot r = [\varepsilon;(1,2,...,n),\sigma,\varepsilon,...,\varepsilon],$$

матимемо

$$(c\cdot r)^n = [\varepsilon;\varepsilon,\sigma,\varepsilon,...,\varepsilon].$$

Позначивши останній вираз через $t$, отримуємо

$$(c\cdot r)\cdot t^{n-2} = [\varepsilon;(1,2,..,n),\varepsilon,...,\varepsilon] = d.$$

Звідси випливає, що

$$d^{n-1}\cdot f = [(1,2);\varepsilon,...,\varepsilon] = b.$$

Таким чином, для непарного $m$ і парного $n$ справджуються рівності

$$\begin{gathered} a = u_2^{m+1};\\ c = a\cdot(g\cdot u_2^m)^{n-1}\cdot a^{-1};\\ d = c\cdot r\cdot t^{n-2};\\ b = d^{n-1}\cdot f, \end{gathered} \tag{6}$$

де $g,r,t,f$визначено вище, тобто $u_2,v_2$ є незвідною системою твірних $T_{m,n}$.

*Випадок 3.* Нехай $m$ — парне, $n$ — непарне натуральні числа. Доведемо, що елементи

$$u_3 = [(1,2,...,m);\varepsilon,...\varepsilon],$$

$$v_3 = [(1,2);\varepsilon,\varepsilon,(1,2),\varepsilon,...,\varepsilon,(1,2,...,n)] \tag{7}$$

утворюють незвідну систему твірних групи $T_{m,n}$. Оскільки $u_3 = a$, то досить пересвідчитись, що $b,c,d$ виражаються через $u_3,v_3$.

Для довільного цілого числа $i$ маємо

$$v_3^i = [(1,2)^i;\varepsilon,\varepsilon,(1,2)^i,\varepsilon,...,\varepsilon,(1,2,...,n)^i],$$

тобто

$$v_3^n = [(1,2);\varepsilon,\varepsilon,(1,2),\varepsilon,...,\varepsilon]$$

та

$$v_3^{n+1} = [\varepsilon;\varepsilon,...,\varepsilon,(1,2,...,n)],$$

звідки

$$a\cdot v_3^{n+1}\cdot a^{-1} = [\varepsilon;(1,2,...,n),\varepsilon,...,\varepsilon] = d.$$

Нехай далі

$$p = a^2\cdot d\cdot a^{-2} = [\varepsilon;\varepsilon,\varepsilon,(1,2,...,n),\varepsilon,...,\varepsilon],$$

тоді

$$v_3^n\cdot p^2 = [(1,2);\varepsilon,\varepsilon,\gamma,\varepsilon,...,\varepsilon],$$

де

$$\gamma = (1,2)\cdot(1,2,...,n)^2 = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n-2 & n-1 & n\\ 4 & 3 & 5 & 6 & ... & n & 1 & 2\end{pmatrix}$$

— цикл довжини $n$. Отже,

$$(v_3^n\cdot p^2)^n = [(1,2);\varepsilon,...,\varepsilon] = b.$$

Оскільки

$$b\cdot v_3^n = [\varepsilon;\varepsilon,\varepsilon,(1,2),\varepsilon,...,\varepsilon],$$

то

$$a^{m-2}\cdot(b\cdot v_3^n)\cdot a^{-(m-2)} = [\varepsilon;(1,2),\varepsilon,...,\varepsilon] = c.$$

Таким чином, для парного $m$ і непарного $n$ маємо

$$d = a\cdot v_3^{n+1}\cdot a^{-1};\quad b = (v_3^n\cdot p^2)^n;$$
$$c = a^{m-2}\cdot(b\cdot v_3^n)\cdot a^{-(m-2)}, \tag{8}$$

де $p$ визначено вище. Отже, $u_3,v_3$ утворюють незвідну систему твірних групи $T_{m,n}$.

*Випадок 4.* Нехай $m,n$ — парні натуральні числа. Покажемо, що таблиці

$$u_4 = [(1,2,...,m);(1,2,...,n-1),\varepsilon,...,\varepsilon],$$

$$v_4 = [(1,2,...,m-1);\varepsilon,...,\varepsilon,(1,2,...,n)] \tag{9}$$

утворюють незвідну систему твірних групи $T_{m,n}$ у цьому випадку. Для цього досить довести, що таблиці $\tilde a,\tilde b,\tilde c,\tilde d$ виражаються через $u_4$ і $v_4$.

Для довільних цілих чисел $i \le m$ та $j$ справджуються рівності

$$u_4^i = [(1,2,...,m)^i;\\ \underbrace{(1,2,...,n-1),...,(1,2,...,n-1)}_{i},\varepsilon,...,\varepsilon]$$

і

$$v_4^j=[(1,2,...,m-1)^j;\varepsilon,...,\varepsilon,(1,2,...,n)^j].$$

Підбираючи парне число $\alpha$ так, щоб

$$\begin{cases}\alpha\equiv 1(\operatorname{mod} m-1),\\ \alpha\equiv 0(\operatorname{mod} n),\end{cases}$$

дістанемо

$$v_4^\alpha=[(1,2,...,m-1);\varepsilon,...,\varepsilon]=\tilde b.$$

Аналогічно, підбираючи непарне число $\beta$ так, щоб

$$\begin{cases}\beta\equiv 0(\operatorname{mod} m-1),\\ \beta\equiv 1(\operatorname{mod} n),\end{cases}$$

матимемо

$$v_4^\beta=[\varepsilon;\varepsilon,...,\varepsilon,(1,2,...,n)].$$

Очевидно, що

$$u_4^m\cdot v_4^\beta=$$

$$=[\varepsilon;(1,2,...,n-1),...,(1,2,...,n-1),\varphi],$$

де

$$\varphi=(1,2,...,n-1)\cdot(1,2,...,n)=$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3...&n-2&n-1&n\\3&4&5...&n&2&1\end{pmatrix}$$

— цикл довжини $n$. Отже, позначаючи

$$t=(u_4^m\cdot v_4^\beta)^n=[\varepsilon;(1,2,...,n-1),$$

$$...,(1,2,...,n-1),\varepsilon],$$

матимемо, що

$$u_4\cdot t=[(1,2,...m);(1,2,...,n-1),...,$$

$$(1,2,...,n-1)],$$

та враховуючи рівність

$$(u_4^m)^{n-2}=[\varepsilon;(1,2,...,n-1)^{n-2},...,$$

$$(1,2,...,n-1)^{n-2}],$$

отримуємо

$$u_4\cdot t\cdot(u_4^m)^{n-2}=[(1,2,...,m);\varepsilon,...,\varepsilon]=\tilde a.$$

Таким чином,

$$u_4\cdot\tilde a^{m-1}=[\varepsilon;(1,2,...,n-1),\varepsilon,...,\varepsilon]=\tilde d$$

та

$$\tilde a\cdot v_4^\beta\cdot\tilde a^{-1}=[\varepsilon;(1,2,...,n),\varepsilon,...,\varepsilon]=\tilde c.$$

Отже, у випадку парних $m,n$ справджуються рівності

$$\tilde a=u_4\cdot t\cdot(u_4^m)^{n-2};\quad \tilde b=v_4^\alpha;$$

$$\tilde c=\tilde a\cdot v_4^\beta\cdot\tilde a^{-1},\tilde d=u_4\cdot\tilde a^{m-1},\qquad(10)$$

де $\alpha,\beta,t$ визначено вище. Таким чином, $u_4,v_4$ є незвідною системою твірних групи $T_{m,n}$.

Теорему 1 доведено.

**Оцінки діаметра графа Келі групи $T_{m,n}$ для двоелементних систем твірних**

Довільну таблицю $q\in T_{m,n}=S_m\wr S_n$ можна записати у вигляді добутку "координатних" таблиць таким чином:

$$q=[\pi;\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m]=$$

$$=[\varepsilon;\sigma_1,\varepsilon,...,\varepsilon]\cdot[\varepsilon;\varepsilon,\sigma_2,\varepsilon,...,\varepsilon]\cdot...$$

$$...\cdot[\varepsilon;\varepsilon,...,\varepsilon,\sigma_m]\cdot[\pi;\varepsilon,...,\varepsilon],\qquad(11)$$

де $\pi\in S_m,\sigma_i\in S_n,i=1,2,..,n;m,n\in\mathbf{N}$.

Домовимося надалі про такі позначення:

$$\begin{aligned}q_1&=[\varepsilon;\sigma_1,\varepsilon,...,\varepsilon];\\ q_2&=[\varepsilon;\varepsilon,\sigma_2,\varepsilon,...,\varepsilon];\\ &..............................\\ q_m&=[\varepsilon;\varepsilon,...,\varepsilon,\sigma_m];\\ q_{m+1}&=[\pi;\varepsilon,...,\varepsilon].\end{aligned}\qquad(12)$$

Символом $\Lambda_i\,(i=1,2,3,4)$ позначатимемо систему твірних групи $T_{m,n}$, яка виначається умовами:

а) $\Lambda_1=\{u_1,v_1\}$ для непарних $m,n$;

б) $\Lambda_2=\{u_2,v_2\}$ для непарного $m$ і парного $n$;

в) $\Lambda_3=\{u_3,v_3\}$ для парного $m$ і непарного $n$;

г) $\Lambda_4=\{u_4,v_4\}$ для парних $m,n$.

Символом $l_{\Lambda_i}(q)$ позначимо довжину найкоротшого розкладу таблиці $q \in T_{m,n}$ в системі твірних $\Lambda_i$ та покладемо

$$L_{\Lambda_i}(m,n) = \max_{q \in T_{m,n}} l_{\Lambda_i}(q), \quad 1 \le i \le 4. \quad (14)$$

Нехай $\Lambda$ — одна з систем $\Lambda_i$ ($1 \le i \le 4$) залежно від парності чисел $m$ і $n$. Тоді правильним є наступне твердження.

**Теорема 2.** *Для довільних натуральних чисел $m, n \ge 3$*

$$L_\Lambda(m,n) \le 62 m^6 n^9. \quad (15)$$

**Доведення.** Кожна з підстановок $\pi$ і $\sigma_i$ ($1 \le i \le m$) виражаються через твірні елементи груп $S_m$ та $S_n$ відповідно. Тому таблиці $q_j$ ($1 \le j \le m+1$) будуть розкладатися на добуток твірних групи $T_{m,n}$. Нас цікавить довжина мінімального розкладу таблиці $q \in T_{m,n}$ на добуток елементів однієї з систем $\Lambda_i (1 \le i \le 4)$. Розглянемо наступні випадки.

*Випадок 1.* Нехай $m, n$ — непарні натуральні числа. За теоремою 1, елементи бази (1) групи $T_{m,n}$ виражаються через систему твірних $\Lambda_1 = \{u_1, v_1\}$ за формулами (4). Використовуючи цей факт, обчислимо довжини розкладів таблиць $q_j$ ($1 \le j \le m+1$) у базі $\Lambda_1$.

Таблиця $q_{m+1}$ розкладається на добуток елементів $a$ і $b$, а таблиці $q_1, q_2, ..., q_m$ — на добуток $c$ і $d$, які, у свою чергу, виражаються через $u_1, v_1$. Тому, обчислюючи довжини розкладів кожної з таблиць $a, b, c, d$ на добуток $u_1, v_1$, отримуємо

$$l_{\Lambda_1}(a) = m+1; \quad l_{\Lambda_1}(b) \le 3m^3 n;$$

$$l_{\Lambda_1}(c) \le 2m^3 n; \quad l_{\Lambda_1}(d) \le 5m^2 n^2. \quad (16)$$

Відомо, що довільна транспозиція $(i,j)$ симетричної групи $S_k$ зображується у вигляді добутку

$$(i,j) = \beta_1^{-i+1} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_1^{-1})^{j-i} \cdot \beta_1^{j-1}, \ (j > i) \quad (17)$$

де $\alpha_1 = (1,2)$, $\beta_1 = (1,2,...,k)$ — твірні симетричної групи $S_k$.

З урахуванням (16) і (17) можна показати, що

$$l_{\Lambda_1}(q_{m+1}) \le 5m^6 n, \quad l_{\Lambda_1}(q_1) \le 12 m^3 n^5,$$
$$l_{\Lambda_1}(q_{i+1}) \le 2(m-i)(m+1) + 12m^3 n^5,$$
$$1 \le i \le m-1.$$

Тоді

$$L_{\Lambda_1}(m,n) =$$
$$= \max_{q \in T_{m,n}} \sum_{i=1}^{m+1} l_{\Lambda_1}(q_i) \le 37 m^6 n^5. \quad (18)$$

*Випадок 2.* Нехай $m$ — непарне, $n$ — парне натуральні числа. Згідно з теоремою 1, в групі $T_{m,n}$ існує двоелементна база $\Lambda_2 = \{u_2, v_2\}$. Враховуючи формули (6), (12), (17) та міркування, наведені в попередньому випадку, отримуємо

$$l_{\Lambda_2}(a) = m, \quad l_{\Lambda_2}(b) \le 29 m^3 n^7,$$
$$l_{\Lambda_2}(c) \le 4m^3 n^3, \quad l_{\Lambda_2}(d) \le 28 m^3 n^6,$$
$$l_{\Lambda_2}(q_{m+1}) \le 31 m^6 n^7, \quad l_{\Lambda_2}(q_1) \le 30 m^3 n^9,$$
$$l_{\Lambda_2}(q_{i+1}) \le 2m(m-i) + 30 m^3 n^9,$$
$$1 \le i \le m-1.$$

Тому

$$L_{\Lambda_2}(m,n) \le 62 m^6 n^9. \quad (19)$$

*Випадок 3.* У випадку парного $m$ та непарного $n$ аналогічно одержимо

$$l_{\Lambda_3}(a) = 1, \quad l_{\Lambda_3}(b) \le 7n^2,$$
$$l_{\Lambda_3}(c) \le 10 m n^2, \quad l_{\Lambda_3}(d) = n+3,$$
$$l_{\Lambda_3}(q_{m+1}) \le 12 m^4 n^2, \quad l_{\Lambda_3}(q_1) \le 14 m n^5,$$
$$l_{\Lambda_3}(q_{i+1}) \le 2(m-i) + 14 m n^5,$$
$$1 \le i \le m-1.$$

Звідси випливає, що

$$L_{\Lambda_3}(m,n) \le 27 m^4 n^5. \quad (20)$$

*Випадок 4.* Аналогічно для парних $m$ і $n$ маємо

$$l_{\Lambda_4}(\tilde{a}) \le 3m^2 n^3, \quad l_{\Lambda_4}(\tilde{b}) \le m^2 n^2,$$
$$l_{\Lambda_4}(\tilde{c}) \le 7m^2 n^3, \quad l_{\Lambda_4}(\tilde{d}) \le 3m^3 n^3,$$

$$l_{\Lambda_4}(q_{m+1}) \leq \frac{11}{2}m^5n^3, \quad l_{\Lambda_4}(q_1) \leq \frac{41}{2}m^3n^6,$$

$$l_{\Lambda_4}(q_{i+1}) \leq 6m^2n^3(m-i) + \frac{41}{2}m^3n^6,$$

$$1 \leq i \leq m-1.$$

Звідси дістаємо

$$L_{\Lambda_4}(m,n) \leq 27m^5n^6. \qquad (21)$$

Оскільки ліва частина кожної з нерівностей (18)—(21) не перевищує $62m^6n^9$, то справджується нерівність (15).

Теорему 2 доведено.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Kerber A.* Enumeration under finite group action: symmetry classes of mappings in "Combinatoire enumerative" // Lect. Notes in Math.— 1986.— **1224**.— P.160—176.

2. *Kerber A.* Representation of permutation groups. Vol 1.— Berlin: Springer, 1971.— 160 p.

3. *Kerber A.* Representation of permutation groups. Vol 2.— Berlin: Springer, 1974.— 156 p.

4. *Ball R.W.* Maximal subgroups of symmetric groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966.— **121**.— P.393—407.

5. *Liebech M.W., Praeger C.E., Saxl J.* The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. of Algebra.— 1987.— **111**, N2.— P.365—383.

6. *Калужнин Л.А., Сущанский В.И., Устименко В.А.* Применение ЭВМ в теории групп подстановок и ее приложениях // Кибернетика.— 1982.— N6.— С.83—94.

7. *Калужнин Л.А., Сущанский В.И., Устименко В.А.* Операция экспоненцирования в теории групп подстановок и ее приложениях // Материалы VII Всесоюзной конф. по теории групп.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С.44—57.

8. *Устименко В.А.* Экспоненцирование симметрических групп — максимальная группа подстановок // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: Сб. науч. тр.— Ярославль, 1983.— С.19—33.

9. *Сікора В.С.* Двоелементні бази гіпероктаедральних груп // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.— 1999.— Вип.1.— С.87—93.

10. *Сікора В.С.* Розклади елементів мономіальних груп над скінченними полями за мінімальними базами // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.— 1999.— Вип.3.— С.71—79.

11. *Isaacs I.M., Thilo Zieschang.* Generating symmetric groups // Math. Notes.— 1995.— **10**.— P.734—738.