УДК 519.21

©2000 р. **М.Л. Свердан, О.А. Ясинська**

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

СТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Знайдені умови стійкості в середньому квадратичному розв'язків систем сингулярно вироджених лінійних рівнянь з урахуванням випадкових збурень коефіцієнтів за допомогою другого методу Ляпунова.

Conditions of stability in the mean square of the solutions of the systems of singular degenerative linear equations with random perturbations of coefficients with the help of the second Lyapunov method are obtained.

1. Постановка задачі

На ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbf{P})$ з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\} \subset F$ розглядається система стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода [1,2]

$$dx(t) = [A_{11}x(t) + A_{12}y(t)]dt +$$
$$+[B_{11}x(t) + B_{12}y(t)]dw(t) +$$
$$+\int_U [C_{11}(u)x(t) + C_{12}(u)y(t)]\tilde{\nu}(du, dt),$$
$$\mu dy(t) = [A_{21}x(t) + A_{22}y(t)]dt +$$
$$+[B_{21}x(t) + B_{22}y(t)]dw(t) +$$
$$+\int_U [C_{21}(u)x(t) + C_{22}(u)y(t)]\tilde{\nu}(du, dt),\ t > 0, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

де $\{x(t) \equiv x(t,\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^n; \{y(t) \equiv y(t,\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^m; \mu > 0$ — малий скалярний параметр; A_{ij}, B_{ij} — сталі дійсні матриці відповідного розміру; $\{C_{ij}(u)\}$ — матричні функції такі, що

$$\int_U \|C_{ij}(u)\|\Pi(du) < \infty, \quad i,j = 1,2; \tag{3}$$

$\{w(t) \equiv w(t,\omega)\}$ — скалярний стандартний вінерівський процес, $\tilde{\nu}(du, dt) = \nu(du, dt) - \Pi(du)dt$ — центрована пуассонівська міра [1].

Надалі припускатимемо, що матриця A_{22} і в'язка $\{A - E_\mu, \mu > 0\}$ гурвіцеві,

$$Re\,\lambda_i(A_{22}) < 0, i = \overline{1,m},$$
$$Re\,\lambda_k(A - E_\mu) < 0,\ k = \overline{1, n+m}, \tag{4}$$

де $\lambda_i(A)$ — i-те власне значення матриці A,

$$A \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad E_\mu \equiv \begin{bmatrix} E_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & \mu E_{m\times m} \end{bmatrix}.$$

Перша умова з (4) гарантує коректну постановку початкової задачі [3]

$$dx(t) = (A_{11}x(t) + A_{12}y(t))dt,$$
$$\mu dy(t) = (A_{21}x(t) + A_{22}y(t))dt \tag{5}$$

за умов (2).

Друга умова з (4) показує, що тривіальний розв'язок системи (5) асимптотично стійкий за Ляпуновим при $\mu > 0$ [4].

Ми будемо знаходити алгебраїчні умови, за яких тривіальний розв'язок задачі (1), (2) має властивість асимптотичної стійкості в середньому квадратичному. Для розв'язання цієї задачі використовуємо метод стохастичних функцій Ляпунова (СФЛ).

2. Теореми про асимптотичну стійкість у середньому квадратичному

Уведемо позначення

$$z \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ z_0 \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, B \equiv \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \mu B_{21} & \mu B_{22} \end{bmatrix},$$

$$C(u) \equiv \begin{bmatrix} C_{11}(u) & C_{12}(u) \\ \mu C_{21}(u) & \mu C_{22}(u) \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Тривіальний розв'язок $z(t) \equiv 0$ задачі (1),(2) асимптотично стійкий за Ляпуновим у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли матрична в'язка $\{A - E_\mu, \mu > 0\}$ гурвіцева та існує додатно визначений розв'язок H матричного узагальненого рівняння Сільвестра*

$$A^T H E_\mu + E_\mu^T H A +$$
$$+B^T H B + \int_U C^T(u) H C(u) \Pi(du) = -G, \quad (7)$$

де G — довільна симетрична додатно визначена квадратна матриця порядку $n+m$.

Доведення. Вибираємо СФЛ у вигляді [4, 5]

$$v(z) = z^T E_\mu^T H E_\mu z. \qquad (8)$$

Зауважимо, що для гурвіцевої матричної в'язки $\{A - E_\mu, \mu > 0\}$ завжди існує [4] єдиний додатно визначений розв'язок H рівняння (7).

Обчислимо стохастичний диференціал від СФЛ (8) за узагальненою формулою Іто-Скорохода [2]:

$$dv(z) = z^T(t)[A^T H E_\mu + E_\mu^T H A +$$
$$+B^T H B + \int_U C^T(u) H C(u) \Pi(du)] z(t) dt +$$
$$+z^T(t)[B^T H + HB] z(t) dw(t) +$$
$$+ \int_U [C(u) z(t)]^T H z(t) \tilde{\nu}(du, dt) +$$
$$+ \int_U [C(u) z(t)]^T H C(u) z(t) \tilde{\nu}(du, dt) +$$
$$+ \int_U z^T(t) H C(u) z(t) \tilde{\nu}(du, dt). \qquad (9)$$

Тоді для математичного сподівання повної похідної $M\{\frac{dV}{dt}\}$ за розв'язками задачі (1), (2) матимемо рівність

$$M\{\frac{dV}{dt}\} = M[z^T(t)(A^T H E_\mu + E_\mu^T H A +$$
$$+B^T H B + \int_U C^T(u) H C(u) \Pi(du)) z(t)]. \quad (10)$$

Математичне сподівання від'ємне, якщо матриця $A^T H E_\mu + E_\mu^T H A + B^T H B + \int_U C^T(u) H C(u) \Pi(du)$ від'ємно визначена. Тому, згідно з теоремою 1.1 [4, с.39] про стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, правильне твердження теореми 1.

Сформулюємо теореми, які містять достатні умови асимптотичної стійкості розв'язків у середньому квадратичному.

Оскільки матрична в'язка $\{A - E_\mu, \mu > 0\}$ гурвіцева, то існує єдина симетрична додатно визначена квадратна матриця H_0 порядку $n + m$ ([4, с.47], лема 1.1), яка є розв'язком матричного двочленного рівняння Сільвестра

$$A^T H_0 E_\mu + E_\mu^T H_0 A = -G, \qquad (11)$$

де G — довільна додатно визначена матриця порядку $(n + m)$.

Теорема 2. *Для гурвіцевої матриці A_{22} та в'язки матриць $\{A - E_\mu, \mu > 0\}$ розв'язок $z(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді, коли виконується нерівність*

$$z^T(A^T H_0 E_\mu + E_\mu^T H_0 A + B^T H_0 B +$$
$$+ \int_U C^T(u) H_0 C(u) \Pi(du)) z < 0, \qquad (12)$$

де H_0 - розв'язок матричного двочленного рівняння Сільвестра (11).

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1, якщо вибрати СФЛ у вигляді

$$v(z) = z^T E_\mu^T H_0 E_\mu z. \qquad (13)$$

Зауважимо, що матриці B та $\{C(u)\}$ можуть бути виродженими.

Теорема 3. *Нехай A_{22} і в'язка $\{A - E_\mu, \mu > 0\}$ є гурвіцевими матрицями, матриця B і матрична функція $\{C(u)\}$ такі,* *що матриці* B^TB *і* $\int\limits_U C^T(u)C(u)\Pi(du)$ *є додатно визначеними.*

Тоді достатньою умовою асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язку $z(t) \equiv 0$ *задачі (1), (2) є від'ємна визначеність матриці* $H_{00}-E_\mu$, *де матриця* H_{00} *— розв'язок такого рівняння Сільвестра*

$$A^TH_{00}E_\mu + E_\mu^TH_{00}A =$$

$$= -B^TB - \int\limits_U C^T(u)C(u)\Pi(du). \qquad (14)$$

Для доведення теореми 3 необхідно використати СФЛ у вигляді квадратичної форми $v(z) = z^TE_\mu^THE_\mu z$.

Теорема 4. *Для гурвіцевих матриці* A_{22} *і матричної в'язки* $\{A-E_\mu, \mu > 0\}$, *невироджених матриць збурень* B *і* $C(u)$ *достатньою умовою асимптотичної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку* $z(t) \equiv 0$ *задачі (1),(2) є виконання нерівності* $\mathrm{tr}H_{00} < 1$, *де* $\mathrm{tr}H_{00}$ *— слід матриці* H_{00}.

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3.

Нехай система (1) збурюється r стандартними вінерівськими процесами $\{w_1(t), ..., w_r(t)\}$ і r незалежними за сукупністю центрованими пуассонівськими мірами $\{\tilde{\nu}_1(du,dt), ..., \tilde{\nu}_r(du,dt)\}$. Тоді розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода

$$E_\mu dz(t) = Az(t)dt + \sum_{k=1}^r B_kz(t)dw_k(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^r \int\limits_U C_k(u)z(t)\tilde{\nu}_k(du,dt), \qquad (15)$$

де $B_k \equiv (B_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^2, C_k(u) \equiv (C_{ij}^{(k)}(u))_{i,j=1}^2$. Для стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку (15) легко одержати алгебраїчні критерії, як і в теоремах 1—4 для задачі (1), (2), припустивши, що:

— умова існування додатно визначеного розв'язку матричного рівняння (7) у теоремі 1 замінена умовою існування додатно визначеного розв'язку H такого матричного рівняння Сільвестра:

$$A^THE_\mu + E_\mu^THA + \sum_{k=1}^r B_k^THB_k +$$

$$+\sum_{k=1}^r \int\limits_U C_k^T(u)HC_k(u)\Pi(du) = -G; \qquad (16)$$

— умова (12) з теореми 2 замінена умовою

$$A^TH_0E_\mu + E_\mu^TH_0A + \sum_{k=1}^r B_k^THB_k +$$

$$+\sum_{k=1}^r \int\limits_U C_k^T(u)HC_k(u)\Pi(du) = -G; \qquad (17)$$

— припущення про матриці B і $C(u)$ в теоремах 3 та 4 замінені припущенням про додатну визначеність хоча б однієї з матриць $B_k^TB_k, \int\limits_U C_k^T(u)C_k(u)\Pi(du), k = \overline{1,r}$. При цьому узагальнене рівняння Сільвестра (14) слід замінити таким рівнянням Сільвестра $A^TH_{00}E_\mu + E_\mu^TH_{00}A = -\sum\limits_{k=1}^r B_k^TB_k - \sum\limits_{k=1}^r \int\limits_U C_k^T(u)_k(u)\Pi(du)$. Аналогічно розв'язуються задачі про обмеженість розв'язків системи (1) з початковими умовами (2) на многовидах [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наук. думка, 1968.— 354 с.

2. *Васильева А.Б., Бутузов А.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М.:Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 106 с.

3. *Климушев А.И., Красовский Н.Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикл. матем. и механика.— 1961.— **25**, вып.6.— С.680—690.

4. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии.— К.:Наук. думка, 1989.— 208 с.

5. *Мазко А.Г.* Оценка расположения спектра матрицы относительно плоских кривых // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, N1.— С.38—42.