УДК 517.982

©2000 р. М.М. Попов

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО КРИВІ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В F-ПРОСТОРАХ

Наведено короткий огляд результатів про криві зі значеннями в F-просторах. Крім того, отримано нові результати про криві, що задовольняють умову Ліпшиця.

The short survey on F-space valued curves is presented. Besides, new results on vector valued Lipschitz curves are obtained.

При розгляді звичайних задач про диференційовність та інтегровність у випадку векторних функцій $f : [a, b] \to X$, які ми називатимемо кривими, виникає багато питань. Однак, цим питанням присвячена дуже мала кількість статей.

Нехай X є F-простором (означення див. в [10]). Перший приклад несталої кривої з нульовою похідною навів С.Ролевич [9]:

$$f(t) = \chi_{[a,t)}$$

для $X = L_p$ при $0 \le p < 1$.

Наступне твердження відносно просте.

Теорема 1 [10, с.198]. *Якщо $X^\star$ тотальний на X, то кожна диференційовна крива $f : [a, b] \to X$ з $f'(t) \equiv 0$ стала.*

Теорема 2 [2]. *Якщо $X^\star = \{0\}$, то існує X-значна нестала крива з нульовою похідною.*

Теорема 3 [7]. *Нехай квазібанахів простір X має таку властивість: для будь-якого $x_0 \in X \setminus \{0\}$ існує константа M така, що для довільного $y_0 \in X$ існує лінійний неперервний оператор $T : X \to X$, для якого $Tx_0 = y_0$ та $\|T\| \le M\|y_0\|$ (зокрема, L_p при $0 < p < 1$ має цю властивість). Якщо існує нестала функція $f : [a, b] \to X$ з нульовою похідною, то:*

(i) множина всіх диференційовних кривих з нульовою похідною щільна в просторі $C([a, b], X)$ всіх неперервних кривих;

(ii) існує диференційовна крива $x : [a, b] \to X$ з похідною, яка має точку розриву першого класу;

(iii) для довільної пари неперервних кривих $x, y : [a, b] \to X$ існує послідовність $x_n : [a, b] \to X$ диференційовних кривих така, що x_n прямує рівномірно до x і x'_n прямує рівномірно до y на $[a, b]$.

Проблема 1. *Чи має першу категорію множина всіх диференційовних кривих $f : [a, b] \to L_p$, $0 < p < 1$, з нульовою похідною в просторі $C([a, b], X)$ усіх неперервних кривих?*

Теорема 4 [4]. *F-простір X локально опуклий тоді і тільки тоді, коли кожна неперервна крива $f : [a, b] \to X$ інтегровна за Ріманом.*

Припустимо, що $y : [a, b] \to X$ інтегровна (за Ріманом) і нехай $t_0 \in [a, b]$. Покладемо

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} y(s)\, ds. \qquad (*)$$

Теорема 5 [7]. *Існує неперервна інтегровна крива $y : [a, b] \to L_p$ $(0 < p < 1)$, для якої функція x, що визначена за допомогою $(*)$, не диференційовна в даній точці $t_0 \in [a, b]$.*

Проблема 2. *Чи існують F-простір X та крива $y : [a, b] \to X$, для яких крива x, що визначена за допомогою $(*)$, ніде не диференційовна? Або не диференційовна в кожній точці деякої множини, яка:*

(i) незліченна?

(ii) має другу категорію?

Проблема 3. *Нехай X є F-простором. Чи кожна неперервна крива $y : [a, b] \to X$ має первісну?*

У випадку квазібанахового простору відповідь позитивна.

Теорема 6 [3]. *Нехай X є квазібанаховим простором з нульовим спряженим. Тоді кожна неперервна крива $y : [a,b] \to X$ має первісну.*

Нагадаємо, що F-простір X називається локально обмеженим, якщо він містить обмежений окіл нуля. Теорема Аокі-Ролевича [10, с.95] стверджує, що F-простір X локально обмежений тоді й тільки тоді, коли він є квазібанаховим простором, тобто коли існують p, $0 < p \leq 1$ та p-однорідна F-норма на X, еквівалентна вихідній ("p-однорідна" означає, що $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$ для довільних $x \in X$ та скаляру λ). Квазібанахів простір з p-однорідною F-нормою називається p-банаховим простором.

Нехай X є p-банаховим простором, $0 < p \leq 1$. Існує природний зв'язок між ліпшицевими кривими $f : [0,1] \to X$ та лінійними неперервними операторами $T : L_p \to X$. Наведемо узагальнений варіант результату з [8].

Позначимо через $\mathcal{L}(L_p, X)$ p-банахів простір всіх лінійних неперервних операторів, що діють з L_p в X, а через $\mathrm{Lip}(X)$ - множину всіх ліпшицевих кривих $f : [0,1] \to X$ з $f(0) = 0$ та

$$\|f\| \stackrel{def}{=} \inf\{M : (\forall t, s \in [0,1])$$

$$\|x(s) - x(t)\| \leq M|s-t|\}.$$

Теорема 7. *Нехай X — p-банахів простір, $0 < p \leq 1$. Тоді:*

(i) $\mathrm{Lip}(X)$ є p-банаховим простором з вищевизначеною p-нормою $\|f\|$;

(ii) відображення $\Psi : \mathcal{L}(L_p, X) \to \mathrm{Lip}(X)$, яке визначене формулою $\Psi(T)(t) = T\chi_{[0,t]}$, де $t \in [0,1]$, є ізометрією.

У доведенні використовується наступний елементарний факт.

Лема 8. *Нехай X — p-банахів простір, $0 < p \leq 1$, $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існують s і t, $0 \leq s < t \leq 1$, такі, що*

$$\|T\chi_{[s,t)}\| > (\|T\| - \varepsilon)(s-t).$$

Доведення леми 8. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо просту функцію $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}$, для якої $\|Tx\| > (\|T\| - \varepsilon)\|x\|$. Тоді

$$\|Tx\| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \|T\chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}\| \leq$$

$$\leq \max_k \|T\chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}\| n \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{\max\limits_k \|T\chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}\|}{\|\chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}\|} \|x\|.$$

Звідси випливає твердження леми.

Доведення теореми 7. Використаємо метод з праці [8]. Легко перевіряється, що $\Psi(T)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $\|T\|$. Той факт, що це мінімальна стала, випливає з леми 8. Залишається довести, що Ψ сюр'єктивно відображає $\mathcal{L}(L_p, X)$ на $\mathrm{Lip}(X)$. Нехай $f \in \mathrm{Lip}(X)$. Для елементів $y \in L_p$ виду

$$y = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{[t_{k-1}, t_k)}, \qquad (**)$$

де $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$, покладемо

$$T_0 y = \sum_{k=1}^{m} a_k (f(t_k) - f(t_{k-1})).$$

Легко бачити, що T_0 – лінійний оператор, коректно визначений на лінійному підпросторі $E \subset L_p$ елементів виду $(**)$, причому

$$\|T_0 y\| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k|^p \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq$$

$$\leq \|f\| \sum_{k=1}^{m} |a_k|^p (t_k - t_{k-1}) = \|f\| \|y\|.$$

Оскільки підпростір E щільний в L_p, то на підставі отриманої нерівності оператор T_0 можна продовжити лінійно та неперервно на весь простір L_p до деякого оператора $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$ зі збереженням норми. За побудовою $\Psi(T) = f$. Теорему доведено.

Прослідкуємо тепер за зв'язком між властивостями операторів та ліпшицевих кривих, які пов'язані за допомогою ізометрії Ψ.

Добре відомо, що не існує скінченновимірного (навіть компактного) оператора з L_p, $0 < p < 1$, в топологічний векторний простір (див., наприклад, [6]). З іншого боку, очевидно, що лінійна функція, яка набуває значень в p-банаховому просторі з $p < 1$, не задовольняє умову Ліпшиця.

Наслідок 9. *Нехай X — p-банахів простір, $0 < p < 1$. В такому разі, $\mathcal{L}(L_p, X) = \{0\}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Lip}(X) = \{0\}$. Зокрема, $\mathrm{Lip}(l_p) = \{0\}$.*

Для $f \in \mathrm{Lip}(X)$ позначимо через $\Theta(f)$ замикання лінійної оболонки множини $\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f(t_k) - f(t_{k-1}))\}$, де $n, \{a_k\}_{k=1}^n, \{t_k\}_{k=0}^n$ пробігають відповідно множини всіх натуральних чисел, всіх наборів з n скалярів та всіх розбиттів відрізка $[0,1]$ на n частин: $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$.

Твердження 10. *Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$, де X — p-банахів простір, $0 < p \le 1$. Тоді $\overline{T(L_p)} = \Theta(\Psi(T))$. Зокрема, T скінченновимірний тоді і тільки тоді, коли $\Theta(\Psi(T))$ є скінченновимірним підпростором простору X.*

Доведення. Досить відзначити, що $y \in \overline{T(L_p)}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{[t_{k-1}, t_k)} \in L_p$ такий, що $\|y - Tx\| < \varepsilon$, оскільки $T(\chi_{[t_{k-1}, t_k)}) = \Psi(T)(t_k) - \Psi(T)(t_{k-1})$. Твердження доведено.

Нагадаємо, що оператор $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$ $(0 < p \le 1)$ називається вузьким [5], якщо для будь-якої вимірної множини $A \subseteq [0,1]$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $x \in L_p$ з властивостями: $x^2 = \chi_A, \int x d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$.

Означення. *Криву $f : [0,1] \to X$ будемо називати зворотною, якщо для будь-яких s і t, $0 \le s < t \le 1$, та довільного $\varepsilon > 0$ існує розбиття $s = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ таке, що $\| \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \Delta f_k \| < \varepsilon$, де $\Delta f_k = f(t_k) - f(t_{k-1})$.*

Теорема 11. *(i) $(0 < p < 1)$ Нехай X – p-банахів простір. Тоді кожна зворотна X-значна ліпшицева крива стала.*

(ii) Для банахового простору X наступні умови еквівалентні:

a) кожна ліпшицева X-значна крива зворотна;

b) кожний оператор $T \in \mathcal{L}(L_1, X)$ вузький.

Спочатку доведемо таку лему.

Лема 12. *Нехай X – p-банахів простір, де $0 < p \le 1$. Тоді оператор $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$ вузький в тому і тільки в тому випадку, коли крива $\Psi(T)$ зворотна.*

Доведення леми 12. Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$ – вузький оператор. Для заданих s і t, $0 \le s < t \le 1$, та $\varepsilon > 0$ виберемо $x \in L_p$ такий, що

$$x^2 = \chi_{[s,t]}, \quad \int x d\mu = 0, \ \|Tx\| < \varepsilon.$$

Нехай, для певності, $x = \chi_A - \chi_B$, де $A \bigsqcup B = [s,t]$. Виберемо розбиття $s = t_0 < t_1 < ... < t_{2n} = t$ таке, що для

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{2i-2}, t_{2i-1})$$

виконується нерівність $\mu(A \Delta A_1) < \varepsilon$. Тоді, поклавши $B_1 = [s,t] \setminus A_1$ та $x_1 = \chi_{A_1} - \chi_{B_1}$, одержимо

$$\|Tx_1\| \le \|Tx\| + \|T\| \|x - x_1\| < \varepsilon + \|T\| 2^p \varepsilon,$$

адже $|x - x_1| = 2\chi_{A \Delta A_1}$ З іншого боку,

$$Tx_1 = T \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \chi_{[t_{k-1}, t_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} T \chi_{[t_{k-1}, t_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} (\Psi(T)(t_k) - \Psi(T)(t_{k-1})).$$

Отже, крива $\Psi(T)$ зворотна.

Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$, крива $\Psi(T)$ зворотна, $A \subseteq [0,1]$, $\mu(A) > 0$ та $\varepsilon > 0$. Виберемо розбиття $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{2m} = 1$ таке, що для

$$A_0 = \bigcup_{i=1}^{m} [\tau_{2i-2}, \tau_{2i-1})$$

маємо $\mu(A\Delta A_0) < \varepsilon$. Для кожного $i = 1, ..., m$ виберемо розбиття

$$\tau_{2i-2} = t_0^i < t_1^i < ... < t_{2n_i}^i = \tau_{2i-1},$$

для якого

$$\| \sum_{j=1}^{2n_i} (-1)^j T\chi_{[t_{j-1}^i, t_j^i)} \| =$$

$$= \| \sum_{j=1}^{2n_i} (-1)^j (\Psi_T(t_j^i) - \Psi_T(t_{j-1}^i)) \| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Тоді, поклавши

$$B_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} [t_{2j-1}^i, t_{2j}^i), \ C_0 = A_0 \setminus B_0$$

і $x_0 = \chi_{B_0} - \chi_{C_0}$, будемо мати, що $x_0^2 = \chi_{A_0}$ і

$$\|Tx_0\| = \| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n_i} (-1)^j T\chi_{[t_{j-1}^i, t_j^i)} \| < m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Покладемо $B = A \bigcap B_0$, $C = A \setminus B$ і $x = \chi_B - \chi_C$. Тоді $x^2 = \chi_A$. Оскільки $A = B \bigsqcup C$ і $A_0 = B_0 \bigsqcup C_0$, причому $B \cap C_0 = B_0 \cap C = \emptyset$, то $A \cap A_0 = (B \cap B_0) \bigsqcup (C \cap C_0)$. Отже, $x(t) = x_0(t)$ на $A \cap A_0$. Крім того, $x(t) = x_0(t)$ поза $A \cup A_0$. Таким чином, $|x - x_0| \le 2\chi_{A\Delta A_0}$. Отже,

$$\|Tx\| \le \|Tx_0\| + \|T\| \|x - x_0\| < \varepsilon + \|T\| 2^p \varepsilon.$$

Внаслідок [5, с.54] цього достатньо для вузькості оператора T.

Доведення теореми 11. (i) випливає з леми 12 та того факту з [6], що при $0 < p < 1$ не існує ненульових вузьких операторів з L_p в будь-який F-простір X. (ii) випливає з леми 12.

Банахові простори X, які задовольняють умову b) з теореми 11, вивчалися в [1]. Так, цю умову задовольняють усі рефлексивні простори, більше того, простори з властивістю Радона-Никодима. Навпаки невірно: простір c_0 задовольняє умову b), але не має властивості Радона-Никодима. Найпростіший приклад банахового простору, який не має властивості b) — це простір L_1. Звичайно, кожний простір, в який L_1 ізоморфно вкладається (наприклад, $C[0,1]$), також не має властивості b). З основного результату праці [11] випливає, що існує банахів простір, який не має властивості b) і не вкладається ізоморфно в простір L_1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kadets V.M., Popov M.M.* On the Liapunov convexity theorem with applications to sign-embeddings // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, N9.— C.1192—1200.
2. *Kalton N.J.* Curves with zero derivatives in F-spaces // Glasgow Math. J.— 1981.— **22**.— P.19—29.
3. *Kalton N.J.* The Existence of Primitives for Continuous Functions in a Quasi-Banach Space // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.— 1996.— **XLIV**.— P.113—117.
4. *Mazur S., Orlicz W.* Sur les espaces metriques lineaires I // Studia Math.— 1948.— **10**.— P.184—208.
5. *Plichko A.M., Popov M.M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces.— Warszawa: Rozpr. mat., 1990.— 85p.
6. *Попов М.М.* Элементарное доказательство отсутствия ненулевых компактных операторов, определенных на пространстве $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. заметки.— 1990.— **47**, N5.— C.154—155.
7. *Popov M.M.* On integrability in F-spaces // Studia Math.— 1994.— **110**, N3.— P.205—220.
8. *Попова Л.В.* Липшицевы кривые и двоичные мартингалы со значениями в пространствах $L_p, 0 < p \le 1$ // Изв. вузов. Мат.— 1992.— N11.— C.39—43.
9. *Rolewicz S.* O funkjach o pochodnej zero // Wiadom. Matem.— 1959.— **3**.— S.127—128.
10. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces.— Warszawa: PWN, 1985.— 285 p.
11. *Talagrand M.* The three-space problem for L_1 // J. Amer. Math. Soc.— 1990.— **3**, N1.— P.9—29.