УДК 517.956.4

©2000 р. Г.С. Пасічник, С.Д. Івасишен

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Означені дисипативні $\overrightarrow{2b}$-параболічниі системи з виродженнями на початковій гіперплощині. Для таких систем побудована фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші та одержані для неї і її похідних оцінки.

The dissipative $\vec{2b}$-parabolic systems with degenerations on the initial hyperplane are defined. The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem are constructed and the estimates for it and for its derivatives are obtained.

Одним з найважливіших понять у теорії задачі Коші для параболічних систем є поняття фундаментальної матриці розв'язків (ф.м.р.). Найповніші результати для ф.м.р. задачі Коші на даний час одержано для рівномірно параболічних за Петровським систем з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами. Ці результати узагальнювались на випадок $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем [1–3], в яких кожна просторова змінна має, взагалі кажучи, свою вагу відносно часової змінної, параболічних за Петровським систем, коефіцієнти яких можуть необмежено зростати при $|x| \to \infty$ [4–8], і параболічних за Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами при наявності певних вироджень на початковій гіперплощині [9–13]. При вивченні задачі Коші із зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами були введені дисипативні параболічні системи [4]. Ця стаття присвячена поширенню поняття дисипативності на $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи з виродженнями на початковій гіперплощині й дослідженню ф.м.р. задачі Коші для таких систем. Результати статті анонсовані в [11, 14, 15].

1. Нехай $n, b_1, \ldots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j \equiv \equiv s/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \le j \le n$, $q' \equiv \min\limits_{1\le j\le n} q_j$, $q'' \equiv \max\limits_{1\le j\le n} q_j$, $M \equiv \sum_{j=1}^n m_j$; T – задане додатне число; $\mathbf{Z}_+^n$ – множина всіх n-вимірних мультиіндексів. Якщо $x \in \mathbf{R}^n$, то $x_1, \ldots, x_n$ – координати точки x. Користуватимемось ще такими позначеннями: $||k|| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k \in \mathbf{Z}_+^n$; $p(x,y) \equiv \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^{2/m_j} \right)^{1/2}$, $q(x,y) \equiv \equiv (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^{q_j})^{1/q''}$ – спеціальні відстані між точками x і y з $\mathbf{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) | t \in H$,
$x \in \mathbf{R}^n\}$, I – одинична матриця порядку N; $\Delta_x^\xi f(\cdot, x, \cdot) \equiv f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, \xi, \cdot)$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(Lu)(t,x) \equiv$$
$$\equiv \Big(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{||k|| \le 2s} a_k(t,x) \partial_x^k -$$
$$-b(t,x)\Big) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

де a_k, $||k|| \le 2s$, b – квадратні матриці порядку N; $\alpha : [0,T] \to [0,\infty)$, $\beta : [0,T] \to \to [0,\infty)$ – неперервні функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$ і $\alpha(0)\beta(0) = = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

Для того щоб сформулювати припущення щодо коефіцієнтів системи (1), розглянемо відповідну системі (1) систему без вироджень і без члена з коефіцієнтом b

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||\le 2s} a_k(t,x)\partial_x^k\right) u(t,x) = 0,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (2)$$

Означення 1. *Систему* (2) *називатимемо дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D : \mathbf{R}^n \to [1,\infty)$, яка задовольняє такі умови:*

1) $D(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$;

2) функції $b_k(t,x)\equiv a_k(t,x)(D(x))^{||k||-2s}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $||k||\le 2s$, обмежені;

3) система рівнянь

$$\Big(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)\times$$
$$\times\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\Big)v = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}\times\mathbf{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічною, де $\overrightarrow{2B}\equiv(2b_1,\dots,2b_n,2s)$, тобто p-корені рівняння

$$\det\left(Ip - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)(i\sigma)^k\mu^{k_{n+1}}\right) = 0$$

задовольняють умову

$$\exists\,\delta>0\quad\forall\,(t,x)\in\Pi_{[0,T]}\quad\forall\,\sigma\in\mathbf{R}^n\quad\forall\,\mu\in\mathbf{R}:$$
$$\mathrm{Re}\;p(t,x,\sigma,\mu)\le-\delta(\sum_{j=1}^n\sigma_j^{2b_j}+\mu^{2s}).$$

Функція D при цьому називається характеристикою дисипації системи (2).

Припустимо, що виконуються наступні умови на коефіцієнти a_k, $||k||\le 2s$, b і характеристику дисипації D.

α_1. Відповідна системі (1) система (2) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$ системою з характеристикою дисипації D.

α_2. $\exists\,C>0\;\;\exists\,\lambda\in(0,1]\;\;\forall\,\{(t,x),(t,y)\}\subset\subset\Pi_{[0,T]}\;\forall\,k\in\mathbf{Z}_+^n,\;||k||\le 2s:\;\;|\Delta_x^y a_k(t,x)|\le\le\;\;C(p(x,y))^\lambda((D(x))^{2s-||k||}+(D(y))^{2s-||k||})$; функції b_k, $||k||\le 2s$, які визначені в $\Pi_{[0,T]}$, є неперервними за t рівномірно щодо $x\in\mathbf{R}^n$.

α_3. Функція b визначена в $\Pi_{[0,T]}$, обмежена, неперервна за t і задовольняє таку умову Гельдера:

$$\exists\,C>0\quad\forall\,\{(t,x),(t,y)\}\subset\Pi_{[0,T]}:$$
$$|b(t,x)-b(t,y)|\le C(p(x,y))^\lambda,$$

де число λ з умови α_2.

α_4. Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

1) $\exists\,C>0\quad\forall\,\{x,y\}\subset\mathbf{R}^n,\;q(x,y)\le 1:$ $D(x)\le CD(y)$;

2) $\exists\,C>0\quad\forall\,\{x,y\}\subset\mathbf{R}^n,\;q(x,y)>1:$ $D(x)\le C\exp\{\epsilon\sum_{j=1}^n|x_j-y_j|(D(y))^{m_j}\}$, де ϵ – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Нехай $g\;:\;\mathbf{R}^n\;\to\;[0,\infty)$ – функція, яка зв'язана з характеристикою дисипації D умовою

α_5. Функція g має похідні $\partial_x^k g$, $||k||\le 2s$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_x^k g(x)|\le C\eta(D(x))^{||k||},$$
$$|\Delta_x^y\partial_x^k g(x)|\le$$
$$\le C\eta(p(x,y))^\lambda((D(x))^{||k||}+(D(y))^{||k||}),$$
$$\{x,y\}\subset\mathbf{R}^n,\quad 0<||k||\le 2s,$$

де $C>0$, $\lambda\in(0,1]$, η – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Оскільки система (1) при $t=0$ вироджується, то не завжди для неї можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t=0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про ф.м.р. задачі Коші згідно з таким означенням.

Означення 2. *Ф.м.р. задачі Коші для системи* (1) *називається квадратна матриця порядку N $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,y\}\subset\mathbf{R}^n$, така, що формулою*

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\;\;(t,x)\in\Pi_{(\tau,T]},$$

визначається розв'язок системи (1), який задовольняє умову

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \ \ x \in \mathbf{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Основний результат цієї статті стосується побудови та одержання оцінок ф.м.р. задачі Коші для дисипативної системи (1).

2. Щоб побудувати ф.м.р. задачі Коші для системи (1), скористаємось процедурою Леві. Для цього спочатку опишемо головний член формули для ф.м.р.

Розглянемо допоміжну систему

$$\Big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\times$$
$$\times \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}-$$
$$-b(t,y)\Big)v(t,x,x_{n+1}) = 0,$$
$$(t,x,x_{n+1}) \in \Pi_{(0,T]}\times\mathbf{R}, \qquad (3)$$

де y – фіксована точка простору $\mathbf{R}^n$.

За умов $\alpha_1 - \alpha_3$ на підставі результатів з [11–13] існує ф.м.р. $Z_0(t,x;\tau,\xi;x_{n+1}-\xi_{n+1};y)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, $\{x_{n+1},\xi_{n+1}\}\subset\mathbf{R}$, задачі Коші для системи (3), для якої правильні оцінки

$$|\partial_x^k\partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}}Z_0(t,x;\tau,\xi;x_{n+1}-\xi_{n+1};y)| \le C_{kk_{n+1}}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-(M+1+||k||+k_{n+1})/(2s)}E_c^d(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c(B(t,\tau))^{1-q_{n+1}}|x_{n+1}-\xi_{n+1}|^{q_{n+1}}\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$
$$\{x_{n+1},\xi_{n+1}\}\subset\mathbf{R},$$

де $k\in\mathbf{Z}_+^n$ і $k_{n+1}\in\mathbf{Z}_+^1$ довільні, $C_{kk_{n+1}}>0$, $c>0$ і $d\in\mathbf{R}$ – деякі сталі; $q_{n+1}\equiv\frac{2s}{2s-1}$; $A(t,\tau)\equiv\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $B(t,\tau)\equiv\int_\tau^t\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$, $E_c^d(t,\tau,x)\equiv E_c(t,\tau,x)E^d(t,\tau)$, $E_c(t,\tau,x)\equiv\exp\{-c\sum_{j=1}^n(B(t,\tau))^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\}$, $E^d(t,\tau)\equiv\exp\{dA(t,\tau)\}$, $0<\tau<t\le T$, $x\in\mathbf{R}^n$. При цьому, зокрема, функція $\partial_x^kZ_0(t,x;\tau,\xi;z;y)$, $z=z_1+iz_2\in\mathbf{C}$, як функція аргументу $B(t,\tau)^{-1/(2s)}z$ при фіксованих t, τ, x, ξ є цілою функцією, для якої справджуються оцінки

$$|\partial_x^kZ_0(t,x;\tau,\xi;z;y)|\le C_k\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-(M+1+||k||)/(2s)}E_c^d(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c(B(t,\tau))^{1-q_{n+1}}|z_1|^{q_{n+1}}+$$
$$+c'(B(t,\tau))^{1-q_{n+1}}|z_2|^{q_{n+1}}\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbf{R}^n, \quad z\in\mathbf{C}, \qquad (4)$$

де $C_k>0$, $c>0$, $c'>0$, $d\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{Z}_+^n$.

Нехай $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)$ – перетворення Фур'є матриці $Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)$ за z. Тоді матриця $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, є ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\Big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\eta^{k_{n+1}}\partial_x^k-$$
$$-b(t,y)\Big)\hat{v}(t,x)=0, \ \ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

для довільно фіксованих точок $\eta\in\mathbf{R}$ і $y\in\mathbf{R}^n$.

З оцінок (4) на підставі леми 1.1 з [5] випливають такі оцінки:

$$|\partial_x^k\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)|\le$$
$$\le C_k(B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2s)}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\exp\{-cB(t,\tau)\eta^{2s}\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbf{R}^n,$$
$$\eta\in\mathbf{R}, \quad k\in\mathbf{Z}_+^n. \qquad (5)$$

Візьмемо

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\equiv\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;D(y);y).$$

За допомогою оцінок (5) одержуються оцінки

$$|\partial_x^k\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|\le C_k(B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2s)}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\exp\{-cB(t,\tau)(D(y))^{2s}\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbf{R}^n, \quad k\in\mathbf{Z}_+^n. \qquad (6)$$

Зауважимо, що матриця $\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi,y\}\subset\mathbf{R}^n$, є ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\Big(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\sum_{||k||\le 2s}a_k(t,y)\partial_x^k-$$

$$-b(t,y)\Big)v(t,x)=0,\ \ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad(7)$$

для кожної фіксованої точки $y\in\mathbf{R}^n$. Для ф.м.р. $\hat{Z}$ правильні твердження, аналогічні відповідним твердженням з [10] (див. властивості 1–6). Наведемо два з них.

Твердження 1. *Нехай коефіцієнти системи (7) задовольняють умови $\alpha_1-\alpha_3$. Тоді правильна оцінка*

$$\Big|\Delta_y^{y'}\partial_x^m\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\Big|\le C(p(y,y'))^{\lambda}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-(M+||m||)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\Big(\exp\{-cB(t,\tau)(D(y))^{2s}\}+$$
$$+\exp\{-cB(t,\tau)(D(y'))^{2s}\}\Big)\times$$
$$\times\Big((D(y))^{2s}+(D(y'))^{2s}\Big),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad\{x,\xi,y,y'\}\subset\mathbf{R}^n,\quad m\in\mathbf{Z}_+^n.\qquad(8)$$

Твердження 2. *Нехай виконуються умови $\alpha_1-\alpha_4$, а квадратна матриця порядку N $\varphi(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, неперервна і для неї справджуються оцінки*

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)|\le C\beta(t)\Big((B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+(B(t,\tau))^{\lambda/(2s)}(D(\xi))^{-l}\Big)E_c^d(t,\tau,x-\xi),\quad(9)$$
$$|\Delta_x^{x'}\varphi(t,x;\tau,\xi)|\le C_l(p(x,x'))^{\lambda_1}\times$$
$$\times\beta(t)\Big((B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda_2)/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+(B(t,\tau))^{\lambda_2/(2s)}(D(\xi))^{-l}\Big)\times$$
$$\times\Big(E_c^d(t,\tau,x-\xi)+E_c^d(t,\tau,x'-\xi)\Big),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad\{x,\xi,x'\}\subset\mathbf{R}^n,$$
$$0<\lambda_1<\lambda,\quad\lambda_2\equiv\lambda-\lambda_1,\qquad(10)$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Тоді функція

$$u(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{Z}(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0<\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$

має неперервні похідні, які входять у систему (7). При цьому похідні $\partial_x^k u$, $||k||\le\le 2s-1$, одержуються формальним диференціюванням під знаками інтегралів, а похідні старших порядків обчислюються за формулами

$$\partial_x^k u(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbf{R}^n}\partial_x^k\hat{Z}(t,x;\theta,y;y)\Delta_y^x\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$
$$+\int_\tau^t\left(\int_{\mathbf{R}^n}\partial_x^k\hat{Z}(t,x;\theta,y;y)dy\right)\frac{\varphi(\theta,x;\tau,\xi)}{\alpha(\theta)}d\theta,$$
$$||k||=2s,$$
$$\alpha(t)\partial_t u(t,x;\tau,\xi)=\varphi(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(t)\partial_t\hat{Z}(t,x;\theta,y;y)\times$$
$$\times\Delta_y^x\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$
$$+\int_\tau^t\left(\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(t)\partial_t\hat{Z}(t,x;\theta,y;y)dy\right)\times$$
$$\times\frac{\varphi(\theta,x;\tau,\xi)}{\alpha(\theta)}d\theta,$$
$$0<\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n.$$

3. Наведемо основну теорему, що стосується ф.м.р. задачі Коші для дисипативної

$\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням при $t=0$.

Теорема. *Нехай виконуються умови $\alpha_1-\alpha_4$. Тоді існує ф.м.р. $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, задачі Коші для системи (1), для якої справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\Big((B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+(D(\xi))^{-l}\Big)\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$
$$||k||<2s, \tag{11}$$

де l – довільно фіксоване додатне число, $C_l>0$, $c>0$, $d\in\mathbf{R}$.

Якщо g – функція, яка задовольняє умову α_5, то для Z правильні також оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le$$
$$\le C\sum_{j=0}^{||k||}(B(t,\tau))^{-(M+||k||-j)/(2s)}(D(x))^j\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\exp\{g(x)-g(\xi)\},$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$
$$||k||<2s, \tag{12}$$

де $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbf{R}$.

Зауважимо, що у випадку слабкого виродження, тобто коли $\int\limits_0^T\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}<\infty$, ф.м.р. визначена також при $\tau=0$, а в оцінках (11) і (12) можна брати $\tau=0$.

4. Ф.м.р. задачі Коші для системи (1) шукатимемо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\hat Z(t,x;\tau,\xi;\xi)+$$
$$+\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\hat Z(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n, \tag{13}$$

де $\varphi(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ – невідома квадратна матриця порядку N, яку підберемо так, щоб функція $Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ була розв'язком системи (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau,\xi)\in\Pi_{(0,T]}$.

Припускатимемо, що шукана функція φ є неперервною і для неї справджуються оцінки (9), (10).

Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (13) і використавши припущення відносно φ, одержимо на підставі твердження 2 для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t,x;\tau,\xi)=K(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbf{R}^n}K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n, \tag{14}$$

де

$$K(t,x;\tau,\xi)\equiv$$
$$\equiv\beta(t)\sum_{||k||\le 2s}\Delta_x^\xi a_k(t,x)\partial_x^k\hat Z(t,x;\tau,\xi;\xi)+$$
$$+\Delta_x^\xi b(t,x)\hat Z(t,x;\tau,\xi;\xi). \tag{15}$$

Оцінимо ядро K, використовуючи оцінки (6), умови $\alpha_2-\alpha_4$ та нерівності [10]

$$(p(x,\xi))^\lambda E_c(t,\tau,x-\xi)\le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{\lambda/(2s)}E_{c_0}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,\quad 0<c_0<c;$$
$$(B(t,\tau))^pE^d(t,\tau)\le(\beta(t))^p(A(t,\tau))^pE^d(t,\tau)\le$$
$$\le(\beta(T))^pE^{d_0}(t,\tau),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad p>0,\quad d_0>d;$$
$$E_c(t,\theta,x-y)E_c(\theta,\tau,y-\xi)\le E_c(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<\theta<t\le T,\quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbf{R}^n,$$
$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}E_c(t,\theta,x-y)E_c(\theta,\tau,y-\xi)\times$$
$$\times\Big(B(t,\theta)B(\theta,\tau)\Big)^{-M/(2s)}dy\le$$
$$\le C(\delta)(B(t,\tau))^{-M/(2s)}E_{c(1-\delta)}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<\theta<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$

де δ – довільно фіксоване число з проміжку $(0,1)$. Маємо

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C\beta(t)((B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,x-\xi)\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}\times$$
$$\times\Big(\sum_{||k||\le 2s}(B(t,\tau))^{(2s-||k||)/(2s)}\times$$
$$\times\left((D(x))^{2s-||k||}+(D(\xi))^{2s-||k||}\right)+1\Big),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n, \tag{16}$$

де $0<c_0<c$, $d_0>d$.

Якщо $q(x,\xi)\le 1$, то з (16) на підставі умови α_4 одержуємо

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C_0\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c_0B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}. \tag{17}$$

Нехай $q(x,\xi)>1$. Тоді за допомогою умови α_4 та нерівності Юнга маємо

$$D(x)\le CE_{-\epsilon/q'}(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\{\frac{M\epsilon}{2s}B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}$$

і, вибравши ϵ так, щоб $c_1\equiv c_0-\max\{2s\epsilon/q^{'},M\epsilon\}>0$, одержимо

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C_0'\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c_1B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}, \tag{18}$$

де $d_1>d_0$.

З оцінок (17) і (18) випливає оцінка

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\le C_1\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c_1B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\},$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n. \tag{19}$$

На підставі цієї оцінки рівняння (14) розв'язується методом послідовних наближень, при цьому φ визначається формулою

$$\varphi(t,x;\tau,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,x;\tau,\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n, \tag{20}$$

де $K_1\equiv K$, а для $m\ge 2$

$$K_m(t,x;\tau,\xi)\equiv$$
$$\equiv\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbf{R}^n}K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy.$$

Оцінимо ядра K_m, $m\ge 2$. Маємо

$$K_2(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{A_1}K(t,x;\theta,y)K(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$
$$+\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{A_2}K(t,x;\theta,y)K(\theta,y;\tau,\xi)dy\equiv$$
$$\equiv I_1+I_2, \tag{21}$$

де $A_1\equiv\{y\in\mathbf{R}^n\mid q(y,\xi)\le 1\}$, $A_2\equiv\{y\in\mathbf{R}^n\mid q(y,\xi)>1\}$.

Використавши умову α_4 та оцінку (19), одержимо

$$|I_1|\le C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2s},\frac{\lambda}{2s})\beta(t)\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-1-(M-2\lambda)/(2s)}E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\{-c_2B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\},$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n, \tag{22}$$

де $0<c_2<c_1$, $C_2(\delta)>0$, δ – довільно фіксоване число з проміжку $(0,1)$, $\mathcal{B}$ – бета-функція Ейлера.

Для оцінки I_2 скористаємося такою оцінкою, яка випливає з (19):

$$|K(\theta,y;\tau,\xi)|\le$$
$$\le C_{1l}\beta(\theta)(D(\xi))^{-l}E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(\theta,\tau,y-\xi),$$
$$0<\tau<\theta\le T,\quad \{y,\xi\}\subset \mathbf{R}^n,\quad q(y,\xi)>1,$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Маємо

$$|I_2|\le C_l\beta(t)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2s},1)(D(\xi))^{-l}(B(t,\tau))^{\lambda/(2s)}\times$$
$$\times E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n. \tag{23}$$

З (21)–(23) випливає оцінка

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)|\le\Big(C_2(\delta)\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2s},\frac{\lambda}{2s})\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-1-(M-2\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-c_2B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+C_{2l}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2s},1)(B(t,\tau))^{\lambda/(2s)}(D(\xi))^{-l}\Big)\times$$
$$\times\beta(t)E^{d_1}_{c_1(1-\delta)}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n.$$

З допомогою такої ж методики доводиться правильність оцінок

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)|\le$$
$$\le\Big(C_m(\delta)(B(t,\tau))^{-1-(M-m\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-c_2B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+C_{ml}(B(t,\tau))^{(m-1)\lambda/(2s)}(D(\xi))^{-l}\Big)\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{m-1}\mathcal{B}(\frac{k\lambda}{2s},\frac{\lambda}{2s})\beta(t)E^{d_1}_{c_1(1-(m-1)\delta)}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,\quad m\ge 2.$$

Виберемо натуральне число m_0 так, щоб $(M-(m_0-1)\lambda+l)/(2s)+1\le 0$. Тоді, взявши $\delta\equiv\delta_0(m_0-1)$, $c_*\equiv c_1(1-\delta_0)$, $\delta_0<1/2$, одержимо

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)|\le$$
$$\le C_*\beta(t)(D(\xi))^{-l}E^{d_*}_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n, \tag{24}$$

де $d_*\ge d_1$, $C_*>0$.

Щоб оцінити ядра K_m з $m>m_0$, спочатку за допомогою нерівностей (19) і (24) маємо

$$|K_{m_0+1}(t,x;\tau,\xi)|\le C_1C_*\beta(t)(D(\xi))^{-l}\times$$
$$\times\int\limits_\tau^t(B(t,\theta))^{-1+\lambda/(2s)}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbf{R}^n}\Big(E^{d_*}_{c_*}(t,\theta,x-y)E^{d_*}_{c_*}(\theta,\tau,y-\xi)\Big)\times$$
$$\times E_{c_1\delta_0}(t,\theta,x-y)(B(t,\theta))^{-M/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-c_1B(t,\theta)(D(y))^{2s}\}dy\le$$
$$\le C_1C_*L\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2s},1)\beta(t)(D(\xi))^{-l}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{\lambda/(2s)}E^{d_*}_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$

де

$$L\equiv\int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp\{-c_1\delta_0\sum_{j=1}^n|z_j|^{q_j}\}dz.$$

Далі методом математичної індукції встановлюється оцінка

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)|\le(C_1L)^kC_*\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{k-1}\mathcal{B}(\frac{\lambda}{2s},1+\frac{j\lambda}{2s})\beta(t)(D(\xi))^{-l}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{k\lambda/(2s)}E^{d_*}_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,\quad k\ge 1.$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (20) мажорується збіжним рядом

$$\hat{C}_0\beta(t)\Bigg(\sum_{m=1}^{m_0}(B(t,\tau))^{-1-(M-m\lambda)/(2s)}\times$$
$$\times\exp\{-c_2B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$
$$+\sum_{m=2}^{m_0}(B(t,\tau))^{(m-1)\lambda/(2s)}(D(\xi))^{-l}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Big(C_1L\Gamma(\frac{\lambda}{2s})(B(t,\tau))^{\lambda/(2s)}\Big)^k}{\Gamma(1+\frac{k\lambda}{2s})}(D(\xi))^{-l}\Bigg)\times$$
$$\times E^{d_*}_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0<\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$

де Γ – гама-функція Ейлера. Отже, ряд (19) при таких t, τ, x, ξ, що $\delta_1<\tau<t\le T$, $t-\tau\ge\delta_2$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, де δ_1, δ_2 – довільні досить малі додатні сталі, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми φ правильна оцінка (9).

Тепер доведемо правильність оцінки (10). При $(p(x,x'))^{2s}>\frac14B(t,\tau)$ оцінка (10) випливає з (9). Тому досить розглянути випадок, коли $(p(x,x'))^{2s}\le\frac14B(t,\tau)$. Спочатку оцінимо

$$|\Delta^{x'}_xK(t,x;\tau,\xi)|\equiv$$

$$\equiv \beta(t) \sum_{||k||\le 2s} |\Delta_x^{x'} a_k(t,x)||\partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;\xi)| +$$

$$+\beta(t) \sum_{||k||\le 2s} |\Delta_{x'}^{\xi} a_k(t,x')||\Delta_x^{x'} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;\xi)| +$$

$$+|\Delta_x^{x'} b(t,x)||\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;\xi)| +$$

$$+|\Delta_{x'}^{\xi} b(t,x')||\Delta_x^{x'} \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;\xi)|. \qquad (25)$$

Скориставшись теоремою про середнє та оцінками (6), одержимо

$$|\Delta_x^{x'} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;\xi)| \le C(p(x,x'))^{\lambda_0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-(M+||k||+\lambda_0)/(2s)} E_{c_0}^d(t,\tau,x-\xi) \times$$

$$\times \exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\},$$

$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbf{R}^n,$$

$$(p(x,x'))^{2s} \le B(t,\tau),$$

$$||k|| \le 2s, \quad \lambda_0 \in (0,1]. \qquad (26)$$

Використавши припущення щодо коефіцієнтів системи (1) та оцінки (6), (25) і (26) з $\lambda_0 = \lambda$, прийдемо до нерівності

$$|\Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi)| \equiv C\beta(t)(p(x,x'))^{\lambda} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-1-M/(2s)} E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x-\xi) \times$$

$$\times \exp\{-c_1 B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\},$$

$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbf{R}^n,$$

$$(p(x,x'))^{2s} \le B(t,\tau),$$

з якої випливає, зокрема, оцінка

$$|\Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)(p(x,x'))^{\lambda_1} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda_2)/(2s)} E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x-\xi) \times$$

$$\times \exp\{-c_1 B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\},$$

$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbf{R}^n,$$

$$(p(x,x'))^{2s} \le B(t,\tau). \qquad (27)$$

Перейдемо до оцінки $\Delta_x^{x'} \varphi$. На підставі (14) маємо

$$\Delta_x^{x'} \varphi(t,x;\tau,\xi) = \Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+ \int_\tau^\nu \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy +$$

$$+ \int_\nu^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy -$$

$$- \int_\nu^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} K(t,x';\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^4 J_j, \qquad (28)$$

де величина ν така, що $B(t,\nu) = (p(x,x'))^{2s}$.

Для доданка J_1 маємо оцінку (27). Оскільки в інтегралі J_2 $B(t,\theta) \ge (p(x,x'))^{2s}$, то для $\Delta_x^{x'} K(t,x;\theta,y)$ можна скористатись оцінкою (27). Тоді одержимо

$$|J_2| \le C\beta(t)(p(x,x'))^{\lambda_1} \times$$

$$\times \Big((B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda-\lambda_2)/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-c_2 B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\} +$$

$$+ (B(t,\tau))^{\lambda_2/(2s)} (D(\xi))^{-l} \Big) E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x-\xi).$$

$$(29)$$

Інтеграли J_3 і J_4 оцінюються однаково, при цьому використовуються оцінки (9) і (19). Для J_3 оцінка має такий вигляд:

$$|J_3| \le C\beta(t)(p(x,x'))^{\lambda} \times$$

$$\times \Big((B(t,\tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-c_2 B(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\} +$$

$$+ (B(t,\tau))^{\lambda/2s} (D(\xi))^{-l} \Big) E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x-\xi). \quad (30)$$

З (28)–(30) випливає оцінка (10) для випадку, коли $(p(x,x'))^{2s} \le \frac{1}{4}B(t,\tau)$.

Доведемо тепер правильність оцінки (11). Для першого доданка з (13) правильна оцінка (6). Тому оцінимо похідні від другого доданка

$$W(t,x;\tau,\xi) \equiv$$

$$\equiv \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{Z}(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Використовуючи твердження 2, оцінки (6) і (9), як і при оцінюванні ядер K_m, $m \ge 1$, для $||k|| < 2s$ одержимо

$$|\partial_x^k W(t, x; \tau, \xi)| \le$$

$$\le C \int\limits_\tau^t (B(t, \theta))^{-||k||/(2s)} (B(\theta, \tau))^{-1+\lambda/(2s)} \times$$

$$\times \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int\limits_{A_1} E_c^d(t, \theta, x - y) E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times$$

$$\times (B(t, \theta) B(\theta, \tau))^{-M/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-c(B(t, \theta)(D(y))^{2s} +$$

$$+ B(\theta, \tau)(D(\xi))^{2s})\} dy +$$

$$+ C \int\limits_\tau^t (B(t, \theta))^{-||k||/(2s)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int\limits_{A_2} E_c^d(t, \theta, x - y)(B(t, \theta))^{-M/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-cB(t, \theta)(D(y))^{2s}\} \times$$

$$\times \Big((B(\theta, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times$$

$$\times \exp\{-cB(\theta, \tau)(D(\xi))^{2s}\} \Big) dy + C(D(\xi))^{-l} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t (B(t, \theta))^{-M/(2s)} (B(\theta, \tau))^{\lambda/(2s)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}^n} E_c^d(t, \theta, x - y) E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times$$

$$\times (B(t, \theta))^{-M/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-cB(t, \theta)(D(y))^{2s}\} dy \le$$

$$\le C \Big(B(t, \tau))^{-(M+||k||-\lambda)/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + (D(\xi))^{-l} \Big) \times$$

$$\times E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi),$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \tag{31}$$

де $0 < c_1 < c$, $d_1 > d$, A_1 і A_2 такі ж, як в (21). Зауважимо, що при оцінюванні другого доданка використовується нерівність

$$(B(\theta, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times$$

$$\times \exp\{-cB(\theta, \tau)(D(\xi))^{2s}\} \le$$

$$\le C_l (D(\xi))^{-l} E_{c(1-\delta)}^d(\theta, \tau, y - \xi),$$

$$0 < \tau < \theta \le T, \quad \{y, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad q(y, \xi) > 1.$$

З (6), (13) і (31) випливає оцінка (11).

Якщо в оцінці (19) опустити множник $\exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}$, то оцінки ядер K_m можна проводити подібно до вищевикладеного. При цьому для Z одержаться оцінки

$$|\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \le C(B(t, \tau))^{-(M+||k||)/(2s)} \times$$

$$\times E_c^d(t, \tau, x - \xi),$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad ||k|| < 2s, \tag{32}$$

Для одержання оцінки (12) в рівнянні (1) зробимо заміну шуканої функції за формулою [5]

$$u(t, x) = e^{g(x)} v(t, x), \ \ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{33}$$

де g задовольняє умову α_5. У результаті заміни (33) для функції v одержиться система

$$\Big(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{||j|| \le 2s} \sum_{\substack{k \ge j, \\ ||k|| \le 2s}} C_k^j e^{-g(x)} a_k(t, x) \times$$

$$\times \partial_x^{k-j} e^{g(x)} \partial_x^j - b(t, x) \Big) v(t, x) = 0,$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{34}$$

Легко перевірити, що при виконанні умов $\alpha_1 - \alpha_3$ для системи (1) при досить малому η такі ж умови будуть виконані і для системи (34). Тому для цієї системи існує ф.м.р. $Z_1(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, задачі Коші, для якої правильна оцінка (32). Тоді матриця

$$Z(t, x; \tau, \xi) \equiv \exp\{g(x) - g(\xi)\} Z_1(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \tag{35}$$

є ф.м.р. задачі Коші для системи (1). Якщо для матриці Z_1 використати оцінки (32), то з α_5 і (35) одержимо для Z оцінку (12).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР.— 1960.—**133**, N1.— С.40—43.

2. *Ивасишен С.Д. Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1968.— Вып.1.— С.3—175, 271—273.

3. *Ивасишен С.Д.* Интегральные представления и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, N4.— С.500—506.

4. *Эйдельман С.Д.* О задаче Коши для параболических систем с растущими коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1959.— **127**, N4.— С.760—763.

5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

6. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией // Дифференц. уравнения.— 1971.— **7**, N9.— С.1684—1695.

7. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* Исследование поведения L_2-норм решений сильно параболических систем с диссипацией // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, N3.— С.676—690.

8. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.63.— М.: ВИНИТИ, 1990.— С.201—316.

9. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України.— 1994.— N6.— С.7—11.

10. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1995.— 51 с.— Деп. в ДНТБ України 12.07.95, N1808-Ук95.

11. *Березан Л., Івасишен С., Пасічник Г.* Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Всеукраїнська наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (15 –19.09.1997, Дрогобич): Тези доп.— Київ, 1997.— С.15.

12. *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". N337. Прикл. математика.— 1998.— С.73—76.

13. *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.— 1998.— N12.— С.7—12.

14. *Пасічник Г.С.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конф. Ч.2.— Чернівці–Київ, 1998.— С.183—186.

15. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.— 1999.— N6.— С.18—22.