УДК 517.51

©2000 р. В.В. Михайлюк, О.В. Собчук

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ПРОСТОРУ ФІНІТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Доведено, що кожне відображення, визначене на добутку простору фінітних послідовностей і довільного топологічного простору із значеннями в довільному топологічному векторному просторі, яке неперервне відносно першої змінної і берівського класу α відносно другої змінної, є берівського класу $\alpha+1$ за сукупністю змінних.

It is shoun that each mapping which defined on product of space of finite sequences and arbitrary topological space and which is continuous on the first variable and Baire class α on the second variable is Baire class $\alpha+1$ on joint variables.

1. Вступ. Уперше дослідження берівської класифікації нарізно неперервних векторнозначних відображень було розпочате В.Рудіним в [1]. Ним установлено, що якщо X – метризовний простір, Y – топологічний простір, Z – локально опуклий топологічний векторний простір і $f : X\times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення, то f є першого класу Бера за сукупністю змінних. Слід зазначити, що умова локальної опуклості простору значень у доведенні наведеного твердження в [1] є істотною. Цей результат В.Рудіна узагальнювався в декількох напрямах: а) послаблення умов на перший співмножник; б) послалення умов на простір значень; в) заміна неперервності відносно другої змінної на умову належності до берівського класу α.

Для топологічних просторів X, Y і Z позначимо через $CC(X\times Y, Z)$ клас усіх нарізно неперервних відображень $f : X\times Y \to Z$, через $CB_\alpha(X\times Y, Z)$ — клас усіх відображень, неперервних відносно першої змінної і берівського класу α відносно другої, і через $B_\alpha(X\times Y, Z)$ — клас усіх відображень берівського класу α на $X\times Y$.

Було з'ясовано, що включення $CC(X\times Y, Z) \subseteq B_1(X\times Y, Z)$ виконується в таких випадках: 1) $X = Y = \mathbf{R}^\infty$, $Z = \mathbf{R}$ (О.Собчук [2]); 2) $X = \mathbf{R}^m$, Y – топологічний простір, Z – топологічний векторний простір (А.Каланча, В.Маслюченко [3]), а включення $CB_\alpha(X\times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$ – в наступних випадках: 3) X – метризовний простір, Y – топологічний простір, $Z = \mathbf{R}$ або X – σ-метризовний простір, Y – топологічний простір такий, що добуток $X\times Y$ – досконало нормальний і $Z = \mathbf{R}$ (В.Маслюченко, О.Собчук [4]); 4) X – метризовний простір із скінченною розмірністю Лебеґа-Чеха, Y – топологічний простір, Z – топологічний векторний простір (А.Каланча, В.Маслюченко [5]); 5) X – метризовний простір, Y – топологічний простір, Z – локально опуклий топологічний векторний простір або X – ідеальний σ-метризовний простір, Y – метризовний локально компактний простір і Z – локально опуклий топологічний векторний простір (А.Каланча, В.Маслюченко, В.Михайлюк [6]). Умови теореми з [6] порівняно з умовами теореми з [4] виглядають дещо звуженими, хоча в ній не вимагається досконала нормальність добутку. Природно виникло питання про істотність умови на простір Y у цьому результаті, бо саме вона є досить обтяжливою.

У цій замітці, розвиваючи метод з [2], ми встановлюємо, що включення $CB_\alpha(X\times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$ справджується у випадку, коли $X = \mathbf{R}^\infty$, Y – топологічний простір і Z – топологічний векторний простір.

2. Позначення й допоміжні твердження. Нагадаємо, що простір $\mathbf{R}^\infty = \lim\operatorname{ind}\mathbf{R}^n$ фінітних послідовностей є досконало нормальним і σ-метризовним (див., наприклад, [4]). Для точок $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ і $y = (\eta_1, \eta_2, ...)$ з $\mathbf{R}^\infty$ покладемо $|x - y|_\infty = \max\limits_k |\xi_k - \eta_k|$. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ нехай $A_n = \{a = (\frac{\alpha_1}{n}, \frac{\alpha_2}{n}, ...) : \alpha_k \in \mathbf{Z}, k = 1, 2, ...\}$, $U_n(a) = \{x \in \mathbf{R}^\infty : |x - a|_\infty < \frac{2}{3n}, \}$, $\mathcal{U}_n = \{U_n(a) : a \in A_n\}$.

Лема 1. *Сім'я $\mathcal{U}_n$ – відкрите локально скінченне покриття простору $\mathbf{R}^\infty$, причому, для кожного $x \in \mathbf{R}^\infty$ потужність множини $A_n^m(x) = \{a \in A_n : \{x' \in \mathbf{R}^\infty : |x - x'|_\infty < \frac{1}{3n}\} \bigcap U_n(a) \neq \emptyset\}$ не перевищує 2^m, де m – такий перший номер, що $x \in \mathbf{R}^m$.*

Доведення леми подібне до доведення леми 2 з [2].

Лема 2. *Нехай X, Y – топологічні простори, Z – топологічний векторий простір, $(h_a)_{a\in A}$ – локально скінченне розбиття одиниці на X, $(f_a)_{a\in A}$, $f_a : Y \to Z$, — сім'я відображень берівського класу α на Y. Тоді відображення $f(x, y) = \sum\limits_{a\in A} h_a(x)f_a(y)$ є берівського класу α на $X \times Y$.*

Доведення цієї леми можна знайти в [4].

3. Основний результат.

Теорема. *Нехай Y – топологічний простір, Z – топологічний векторний простір, $f : \mathbf{R}^\infty \times Y \to Z$ – неперервне відносно першої змінної і берівського класу α відносно другої змінної відображення. Тоді f є берівського класу $\alpha + 1$ за сукупністю змінних.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ нехай $(h_a)_{a\in A_n}$ — підпорядковане покриттю $\mathcal{U}_n$ розбиття одиниці на просторі $\mathbf{R}^\infty$. Покладемо $f_n(x, y) = \sum\limits_{a\in A_n} h_a(x)f(a, y)$. Згідно з лемою 1, покриття $\mathcal{U}_n$ є локально скінченним, а отже, таким буде й розбиття одиниці. Тому, згідно з лемою 2, відображення f_n є берівського класу α за сукупністю змінних. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y)$ для кожної точки $(x, y) \in \mathbf{R}^\infty \times Y$.

Нехай $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^\infty \times Y$ і W – радіальний заокруглений окіл нуля в Z. Далі, нехай W' — такий радіальний заокруглений окіл нуля в Z, що $\underbrace{W' + ... + W'}_{2^m} \subseteq W$. Оскільки $f(x, y_0)_{|\mathbf{R}^m}$ – неперервне відображення, то існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in \mathbf{R}^m$, що задовольняють нерівність $|x - x_0|_\infty < \delta$, маємо $f(x_0, y_0) - f(x, y_0) \in W'$. Нехай n_0 — такий номер, що $\frac{1}{n_0} < \delta$. Оскільки потужність множини $A_n^m(x_0)$ не перевищує 2^m, то $f(x_0, y_0) - f_n(x_0, y_0) = \sum\limits_{a\in A_n} h_a(x_0)(f(x_0, y_0) - f(a, y_0)) = \sum\limits_{a\in A_n^m(x_0)} h_a(x_0)(f(x_0, y_0) - f(a, y_0)) \in \sum\limits_{a\in A_n^m(x_0)} h_a(x_0)W' \subseteq W$ для всіх $n \geq n_0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$.

На завершення автори висловлюють подяку В.Маслюченку за постановку задачі та увагу до даної праці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and applications, Part B. Edited by L.Nachbin. Adv. in Math. supplem. studies 7B. Academic Press.— 1981.— P.741— 747.

2. *Собчук О.В.* Нарізно неперервні функції на просторі фінітних послідовностей.— Чернівці, 1993.— 5 с.— Деп. в ДНТБ України, N1701—Ук93.

3. *Каланча А.К., Маслюченко В.К.* Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках з скінченно вимірним співмножником // Зб. наук. пр. Кам'янець-Подільського державного педагогічного ун-ту. Серія фізико-математична (математика).— Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний педагогічний ун-т, інформаційно-видавничий відділ.- 1998.— Вип. 4.— С.43—46.

4. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії.— 1993.— Вип. 3.— С.95—102.

5. *Каланча А.К., Маслюченко В.К.* Розмірність Лебеґа-Чеха і берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. (у друці).

6. *Каланча А.К., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Застосування теореми Дуґунджі до питань берівської класифікації векторнозначних відображень // Мат. методи і фіз.-мех. поля (у друці).