УДК 517.51

©2000 р. В.В. Михайлюк

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧКОВО РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ

За допомогою розбиттів одиниці узагальнюється теорема Бера про функції першого класу.

The Baire's theorem on first class functions is generalized with the help of partitions of unity.

Дослідження властивостей функцій першого класу Бера, тобто поточкових границь неперервних функцій, та їх взаємозв'язків з іншими класами функцій – досить популярна тема загальної теорії функцій. Дослідження цієї теми широко проводились у працях багатьох математиків нашого століття, а почались з класичної праці Р. Бера [1], в якій, зокрема, було доведено, що дійснозначна функція дійсної змінної є функцією першого класу Бера тоді і тільки тоді, коли вона є точково розривною на кожній замкненій множині. Певним розвитком цієї теореми в бік необхідності є результат [2,с.125], який полягає в тому, що кожна дійснозначна функція першого класу Бера на берівському просторі є точково розривною.

У даній статті ми розв'яжемо обернену задачу, а саме, встановимо, коли умови типу точкової розривності забезпечують належність функції до першого класу Бера, і узагальнимо теорему Бера на ширший клас просторів.

Спочатку введемо деякі поняття. Нехай X – топологічний простір і число $\varepsilon > 0$. Говоритимемо, що *функція* $f : X \to \mathbf{R}$ *рівномірно наближається на* ε *функціями першого класу Бера*, якщо існує така функція першого класу Бера $g : X \to \mathbf{R}$, що $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ для кожного $x \in X$, і *локально наближається на* ε *функціями першого класу Бера*, якщо для кожної точки x з X існує такий її окіл U, що функція $f_{|U}$ рівномірно наближається на ε функціями першого класу Бера. Оскільки рівномірна границя функцій першого класу Бера також є функцією першого класу Бера, то це фактично означає, що функція $f : X \to \mathbf{R}$ є першого класу Бера тоді і тільки тоді, коли вона рівномірно наближається на ε функціями першого класу Бера для кожного $\varepsilon > 0$. Крім того, з рівномірної наближуваності, звичайно, випливає локальна. Наступне просте спостереження дає відповідь на обернене питання і буде корисним для доведення основного результату.

Твердження 1. *Нехай* X *– паракомпакт, число* $\varepsilon > 0$ *і функція* $f : X \to [0,1]$ *локально наближається на* ε *функціями першого класу Бера. Тоді* f *рівномірно наближається на* ε *функціями першого класу Бера.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – локально скінченне покриття паракомпакта X відкритими множинами U_i, на яких функція f рівномірно наближається на ε, тобто для кожного $i \in I$ існує така функція першого класу Бера $f_i : U_i \to [0,1]$, що $|f_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ для кожного $x \in U_i$. Згідно з теоремою з [3, с.447], покриття $\mathcal{U}$ можна вибрати так, що існує розбиття одиниці $(h_i : i \in I)$ на X таке, що $\operatorname{supp}(h_i) = h_i^{-1}((0,1]) = U_i$. Для кожного $i \in I$ виберемо послідовність неперервних функцій $f_n^{(i)} : U_i \to [0,1]$ таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(i)}(x) = f_i(x)$ для кожного $x \in U_i$. Функції $f_n^{(i)}$ та f_i довизначимо на $X \setminus U_i$, поклавши там скрізь значення 0. Оскільки $\operatorname{supp}(h_i) = U_i$ і функції $f_n^{(i)}$ є неперервними на U_i і обмеженими, то функції $h_i f_n^{(i)}$ є неперервними на X і $\operatorname{supp}(h_i f_n^{(i)}) \subseteq U_i$. Оскільки покриття $\mathcal{U}$ є локально скінченним, то отримаємо, що функції $g_n = \sum\limits_{i\in I} h_i f_n^{(i)}$ також є неперервними. Тому функція $g : X \to \mathbf{R}$, яка визначається таким чином:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} h_i(x) f_n^{(i)}(x) = \sum_{i\in I} h_i(x) f_i(x),$$

є функцією першого класу Бера. Зауважимо, що

$$|h_i(x)f(x) - h_i(x)f_i(x)| \le \varepsilon h_i(x).$$

Тому

$$|f(x) - g(x)| = |\sum_{i\in I} h_i(x) f(x) -$$

$$- \sum_{i\in I} h_i(x) f_i(x)| \le \varepsilon \sum_{i\in I} h_i(x) = \varepsilon.$$

Отже, f рівномірно наближається на ε функціями першого класу Бера.

Перейдемо до викладення основних результатів.

Теорема 1. *Нехай X – досконалий паракомпакт, функція $f : X \to \mathbf{R}$ – точково розривна на кожній замкненій множині в X. Тоді f – першого класу Бера.*

Доведення. Нехай φ – довільний гомеоморфізм числової прямої $\mathbf{R}$ на інтервал (0,1). Покладемо $\tilde{f} = \varphi \circ f$. Зрозуміло, що функція $\tilde{f}$ також є точково розривною на кожній замкненій множині і f є функцією першого класу Бера тоді і тільки тоді, коли функція $\tilde{f}$ є функцією першого класу Бера.

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і покажемо, що $\tilde{f}$ локально наближається на ε функціями першого класу Бера. Нехай $\mathcal{G}$ – сукупність усіх відкритих множин в X, на яких функція $\tilde{f}$ рівномірно наближається на ε функціями першого класу Бера. Покладемо $G = \bigcup \mathcal{G}$. Зрозуміло, що множина G є відкритою і непорожньою, зокрема, всі точки неперервності функції $\tilde{f}$ входять у множину G. Розглянемо замкнену множину $F = X \setminus G$. Переконаймося, що $F = \emptyset$. Нехай це не так. Згідно з умовою, функція $\tilde{f}_{|F}$ є точково розривною. Візьмемо точку x_0 , в якій функція $\tilde{f}_{|F}$ є неперервною, і позначимо $y_0 = \tilde{f}(x_0)$. Оскільки F – замкнена множина в досконало нормальному просторі X, то існує послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих множин G_n таких, що $\overline{G_{n+1}} \subseteq G_n$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = F$. Покладемо $G_0 = X$. Згідно з теоремою Веденісова [3, с.82], для кожного $n \in \mathbf{N}$ існує неперервна функція $\psi_n : X \to [0,1]$, для якої $\psi_n^{-1}((0,1]) = G_{n-1} \setminus \overline{G_{n+1}} = U_n$. Система $(U_n : n \in \mathbf{N})$ утворює локально скінченне відкрите покриття простору G, тому функція $\psi = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \psi_n$ є додатною і неперервною на G, а послідовність функцій $(\varphi_n = \frac{\psi_n}{\psi} : n \in \mathbf{N})$ утворює локально скінченне розбиття одиниці на G, причому $\varphi_n^{-1}((0,1]) = U_n$.

Розглянемо простори $X_n = X \setminus G_{n+1}$, які є паракомпактами, як замкнені підпростори паракомпакту. Оскільки $X_n \subseteq G$ для кожного $n \in \mathbf{N}$, то з означення множини G випливає, що функції $f_n = \tilde{f}_{|X_n}$ локально, а згідно з твердженням 1 і рівномірно наближаються на ε функціями першого класу Бера. Отже, існує така послідовність функцій першого класу Бера $\tilde{g_n} : X_n \to \mathbf{R}$, що

$$|\tilde{g_n}(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

для кожного $x \in X_n$.

Виберемо для кожного $n \in \mathbf{N}$ послідовність неперервних функцій $g_{nk} : X_n \to \mathbf{R}$ таку, що $\lim\limits_{k\to\infty} g_{nk}(x) = \tilde{g_n}(x)$ для кожного $x \in X_n$. Оскільки всі функції $\tilde{g}_n$ є обмеженими, адже функції f_n обмежені, то і функції g_{nk} також можна вибрати обмеженими. Довизначимо функції g_{nk} нулем на $\overline{G \setminus X_n}$. Оскільки $\mathrm{supp}(\varphi_n) = U_n = G_{n-1} \setminus \overline{G_{n+1}} \subseteq G \setminus G_{n+1} = X_n$, а функції є неперервними й обмеженими на X_n, то функції $\varphi_n g_{nk}$ є неперервними на G. Розглянемо функції $g_n : X \to \mathbf{R}$, що визначаються таким чином:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) g_{kn}(x) + y_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x),$$

якщо $x \in G$, і $g_n(x) = y_0$, якщо $x \in F$. Зауважимо, що функції g_n є неперервними в кожній точці відкритої множини G, бо на ній функція g_n є сумою двох неперервних функцій. А оскільки $(\mathrm{supp}(\varphi_k))\bigcap G_{k+1} = \emptyset$, то $(\mathrm{supp}(\varphi_k))\bigcap G_{n+1} = \emptyset$ для кожного $k \le n$. Тому для $x \in G_{n+1} \setminus F$ маємо

$$g_n(x) = y_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x) = y_0,$$

адже $(\varphi_k : k \in \mathbf{N})$ є розбиттям одиниці на G. Отже, $g_{n|_{G_{n+1}}} \equiv y_0$ і функції g_n є неперервними в кожній точці множини F. Перейшовши до границі при $n \to \infty$, одержимо, що

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) g_k(x),$$

якщо $x \in G$, і

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = y_0,$$

якщо $x \in F$. Як і в доведенні попереднього твердження, для $x \in G$ маємо

$$|g(x) - \tilde{f}(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) g_k(x) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \tilde{f}(x)| =$$

$$= |\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)(g_k(x) - \tilde{f}(x))| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\varepsilon = \varepsilon.$$

Нагадаємо, що x_0 – точка неперервності функції $\tilde{f}_{|_F}$, $y_0 = \tilde{f}(x_0)$, а $g_{|_F} \equiv y_0$. Тому існує такий відкритий окіл U точки x_0 в X, що

$$|\tilde{f}(x) - g(x)| \le \varepsilon$$

для кожного $x \in U$. Врахувавши, що g – функція першого класу Бера, отримаємо, що $x_0 \in G$, а це суперечить вибору множини G. Отже, наше припущення невірне, тобто $F = \emptyset$. Значить, функція $\tilde{f}$ локально, а згідно з твердженням 1, і рівномірно наближається на ε функціями першого класу Бера. Оскільки, це можна зробити для кожного $\varepsilon > 0$, то функція $\tilde{f}$ сама є функцією першого класу Бера, а значить, і f є функцією першого класу Бера.

Тепер легко одержується наступне узагальнення теореми Бера.

Теорема 2. *Нехай X – спадково берівський досконалий паракомпакт (зокрема, повнометризовний простір чи досконалий компакт) і $f : X \to \mathbf{R}$. Тоді рівносильними є такі умови:*

(i) f є функцією першого класу Бера;

(ii) f є точково розривною на кожній замкненій множині в просторі X.

Доведення. Нагадаємо, що простір називається спадково берівським, якщо кожний замкнений його підпростір є берівським. А оскільки функція першого класу Бера на берівському просторі є точково розривною, то імплікація $(i) \implies (ii)$ виконується навіть просто для спадково берівських просторів. Обернене твердження – це теорема 1.

На завершення цієї замітки автор висловлює щиру подяку В.К.Маслюченку за корисні поради й постійну увагу до даної праці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.*Baire R.* Sur les fonctions de variebles reéles // Analli di Mat. pura ed appl., ser 3.— 1899.— **3**.— P.1-123.

2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии.— М.: Наука, 1975.— 408 с.

3. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М:Мир, 1986.— 751 с.