УДК 517.956.4

©2000 р. І.П. Мединський*, С.Д. Івасишен

*Державний університет "Львівська політехніка", Львів
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО КОРЕКТНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Установлена коректна розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині в спеціальних вагових просторах Гельдера.

The correct resolvability of parabolic systems with degenerations on the initial hyperplane in special weight spaces is established.

В [1—3] побудована й досліджена фундаментальна матриця розв'язків (ф.м.р.) задачі Коші для параболічних систем рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині. Тут ці результати застосовуються до встановлення коректної розв'язності таких систем у спеціальних вагових просторах Гельдера.

1. Використовуватимемо такі позначення: n, b, N — задані натуральні числа; T — задане додатне число; $\alpha, \beta : [0,T] \to [0,\infty)$ — неперервні функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ і $\beta(t) > 0$ для $t > 0$, β монотонно неспадна; $q \equiv 2b/(2b-1)$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) | t \in H, x \in \mathbf{R}^n\}$, $H \subset [0,\infty)$; $\mathbf{C}_N$ — сукупність усіх стовпців висоти N, елементами яких є комплексні числа; $A(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $B(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$, $E^d(t,\tau) \equiv \exp\{dA(t,\tau)\}$, $E_c(t,\tau,x) \equiv \exp\{-c(B(t,\tau))^{1-q}|x|^q\}$, $E_c^d(t,\tau,x) \equiv E_c(t,\tau,x)E^d(t,\tau)$; $\Delta_t^{t'} f(t,\cdot) \equiv f(t,\cdot) - f(t',\cdot)$, $\Delta_x^{x'} f(\cdot,x) \equiv f(\cdot,x) - f(\cdot,x')$, $\Delta_{t,x}^{t',x'} f(t,x,\cdot) \equiv f(t,x,\cdot) - f(t',x',\cdot)$; $t \le t'$; I — одинична матриця порядку N; $p(t,x;t',x') \equiv ((A(t',t))^{1/b} + |x-x'|^2)^{1/2}$ — спеціальна відстань між точками (t,x) і (t',x'); η — характеристична функція проміжку $[0,\infty)$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\times$$
$$\times \sum_{1\le|k|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x))u(t,x) = f(t,x),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

при таких припущеннях:

1) вираз $I\partial_t - \sum\limits_{|k|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k$ рівномірно параболічний за Петровським в $\Pi_{[0,T]}$;

2) коефіцієнти $a_k, |k| \le 2b$, обмежені й неперервні за t в $\Pi_{[0,T]}$ (при цьому неперервність $a_k, |k| = 2b$, рівномірна відносно $x \in \mathbf{R}^n$), а також задовольняють у $\Pi_{[0,T]}$ рівномірну умову Гельдера за x з показником $\gamma \in (0,1)$;

3) $\exists C > 0\ \forall \{t,t'\} \subset (0,T], t < t', \forall x \in \mathbf{R}^n\ \forall k, |k| \le 2b$: $|\Delta_t^{t'} a_k(t,x)| \le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}$.

За умов 1) і 2) в [1, 2] доведено існування ф.м.р. Z задачі Коші для системи (1), для якої правильні оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-(n+|k|)/(2b)} E_c{}^d(t,\tau,x-\xi), \quad (2)$$
$$|\Delta_x^{x'} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C|x-x'|^\gamma (B(t,\tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)} \times$$
$$\times (E_c^d(t,\tau,x-\xi) + E_c^d(t,\tau,x'-\xi)), \qquad (3)$$
$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad |k| \le 2b,$$

з деякими сталими $C > 0, c > 0$ і $d \in \mathbf{R}$.

Якщо виконується ще й умова 3), то в [3] доведена правильність також таких оцінок:

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\leq C(p(t,x;t',x'))^{\gamma}(B(t,\tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x-\xi)+E_c^d(t',\tau,x'-\xi)), \qquad (4)$$

$$\left|\partial_x^k\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right|\leq$$
$$\leq CE^d(t,\tau)(B(t,\tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)}, \qquad (5)$$

$$\left|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right|\leq$$
$$\leq C(p(t,x;t',x'))^{\gamma}(B(t,\tau))^{-|k|/(2b)}E^d(\tilde{t},\tau), \qquad (6)$$

$0<\tau<t\leq t'\leq T$, $\{x,x',\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, $1\leq|k|\leq 2b$, де $\tilde{t}\equiv t+\eta(d)(t'-t)$.

2. Ф.м.р. Z породжує об'ємний потенціал

$$u(t,x)\equiv\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (7)$$

Його властивості, а отже, і розв'язків системи (1), описуватимуться належністю функції u до відповідних просторів у залежності від того, до яких просторів належить функція f. Означимо ці простори.

Крім функцій α і β, використовуватимемо ще неперервну і монотонно неспадну функцію $\delta:[0,T]\to[0,\infty)$ таку, що

$$\forall\, t\in(0,T]:\quad 0<\delta(t)\leq\beta(t),$$

$$\Delta(T,0)\equiv\int\limits_0^T\frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta<\infty. \qquad (8)$$

Розглядатимемо простори функцій, які є неперервними або мають потрібну гладкість та задовольняють певні умови при $t\to 0$ і $|x|\to\infty$. Їх поведінка при $t\to 0$ описуватиметься функцією

$$(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^rE^{-d}(T,t),\quad t\in(0,T],$$

а при $|x|\to\infty$ — функцією

$$\Psi(t,x)\equiv\exp\{k(t)|x|^q\},\quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

де $\mu\in\{0,1\}$; $r\in\mathbf{R}$; $k(t)\equiv c_0a(c_0^{2b-1}-(T-B(T,t))a^{2b-1})^{1-q}$, $t\in[0,T]$ (при цьому $k(0)\equiv 0$, якщо $B(T,0)=\infty$), c_0 — фіксоване число з проміжку $(0,c)$, c — стала з оцінок (2)—(6), а число a таке, що $0\leq a<c_0T^{1-q}$.

Функція k монотонно зростає від $k(0)$ до $k(T)$ і має таку властивість [2]:

$$E_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)\leq\Psi(t,x),$$
$$0<\tau<t\leq T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n. \qquad (9)$$

Для заданих чисел $\lambda\in(0,1)$, $\mu\in\{0,1\}$ і $r\in\mathbf{R}$ позначимо через $C_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $C_{\mu,r}^{\lambda,0}$ і $C_{\mu,r}^{0,0}$ простори неперервних функцій $u:\Pi_{(0,T]}\to\mathbf{C}_N$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}\equiv\|u\|_{\mu,r}^{0,0}+[u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)},$$
$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,0}\equiv\|u\|_{\mu,r}^{0,0}+[u]_{\mu,r}^{\lambda,0}$$

і $\|u\|_{\mu,r}^{0,0}$, де

$$\|u\|_{\mu,r}^{0,0}\equiv\sup_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}}\frac{|u(t,x)|E^d(T,t)}{\Psi(t,x)(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^r},$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}\equiv$$
$$\equiv\sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\(t,x)\neq(t',x')}}\left(\frac{|\Delta_{t,x}^{t',x'}u(t,x)|E^d(T,\tilde{t})}{(\delta(t))^{\mu}(\Delta(\bar{t},0))^{r-\lambda/(2b)}}\times\right.$$
$$\left.\times(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))^{-1}(p(t,x;t',x'))^{-\lambda}\right),$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,0}\equiv\sup_{\substack{\{x,x'\}\subset\mathbf{R}^n\\x\neq x'}}\left(\frac{|\Delta_x^{x'}u(t,x)|E^d(T,t)}{(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^{r-\lambda/(2b)}}\times\right.$$
$$\left.\times(\Psi(t,x)+\Psi(t,x'))^{-1}|x-x'|^{-\lambda}\right).$$

Тут $\bar{t}\equiv t+(t'-t)\eta(r-\lambda/(2b))$, $\tilde{t}\equiv t+(t'-t)\eta(d)$ і стала d з оцінок (2)—(6).

За допомогою означених просторів уведемо простір $U_r^{\gamma,\lambda}$. Він складається з функцій $u\in C_{0,r+1}^{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^ku\in C_{0,r+1-|k|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)}$, $0<|k|<2b$, та похідні $\partial_x^ku\in C_{0,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $|k|=2b$. Норма в просторі $U_r^{\gamma,\lambda}$ визначається формулою

$$\|u\|_{U_r^{\gamma,\lambda}}\equiv\|u\|_{0,r+1}^{0,0}+$$

$$+\sum_{0<|k|<2b}\|\partial_x^k u\|_{0,r+1-|k|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)}+\sum_{|k|=2b}\|\partial_x^k u\|_{0,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}.$$

3. Наведемо теорему про коректну розв'язність системи (1).

Теорема. *Нехай для системи (1) виконуються припущення 1) — 3) та* $f\in C_{1,r}^{\lambda,0}$ *з* $\lambda<\gamma$ *і* $r>\gamma/(2b)$. *Тоді функція (7) є єдиним розв'язком системи (1) з простору* $U_r^{\gamma,\lambda}$, *для якого правильна оцінка*

$$\|u\|_{U_r^{\gamma,\lambda}}\le C\|f\|_{1,r}^{\lambda,0}. \qquad (10)$$

Доведення. З властивостей ф.м.р. [1,2] випливає, що функція (7) є регулярним у $\Pi_{(0,T]}$ розв'язком системи (1), причому похідні від u обчислюються за формулами

$$\partial_x^k u(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbf{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$|k|<2b,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (11)$$

$$\partial_x^k u(t,x)=\int_0^{t_1}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbf{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_1}^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbf{R}^n}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_1}^t\left(\partial_x^k\int_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right)f(\tau,x)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

$$|k|=2b,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (12)$$

де t_1 — число з проміжку $(0,t)$, вибір якого вкажемо нижче.

Доведемо, що розв'язок (7) належить до простору $U_r^{\gamma,\lambda}$.

Використовуючи позначення

$$I_\nu^r(t_1,t_2,t_3)\equiv\int_{t_1}^{t_2}(B(t_3,\tau))^{-\nu}(\Delta(\tau,0))^r\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau,$$

$$t_1\in[0,T),\quad \{t_2,t_3\}\subset(0,T], \qquad (13)$$

і рівність

$$\int_{\mathbf{R}^n}(B(t,\tau))^{-n/(2b)}E_{c-c_0}(t,\tau,x-\xi)d\xi=C,$$

$$0<\tau<t\le T,\quad x\in\mathbf{R}^n, \qquad (14)$$

за допомогою (2), (8), (9), (11) та означення норми $\|f\|_{1,r}^{0,0}$ маємо

$$|\partial_x^k u(t,x)|\le C\int_0^t(B(t,\tau))^{-(n+|k|)/(2b)}E^d(t,\tau)\times$$

$$\times E^{-d}(T,\tau)(\Delta(\tau,0))^r\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^n}E_{c-c_0}(t,\tau,x-\xi)(E_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi))\times$$

$$\times\frac{|f(\tau,\xi)|E^d(T,\tau)}{\Psi(\tau,\xi)\delta(\tau)(\Delta(\tau,0))^r}d\xi\le$$

$$\le CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)\|f\|_{1,r}^{0,0}\times$$

$$\times I_{|k|/(2b)}^r(0,t,t),\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad |k|<2b. \qquad (15)$$

Зауважимо, що для довільного $t\in(0,T]$ існує єдине число $t_1\in(0,t)$ таке, що: $\Delta(t_1,0)=B(t,t_1)$, при $\tau<t_1$ $\Delta(\tau,0)<B(t,\tau)$ і при $\tau>t_1$ $\Delta(\tau,0)>B(t,\tau)$. Справді, функція $\Delta(\cdot,0)$ монотонно зростає, а $B(t,\cdot)$ монотонно спадає, причому $\Delta(0,0)=B(t,t)=0$. Відзначимо ще, що виконуються нерівності

$$\Delta(t,0)/2\le\Delta(t_1,0)\le\Delta(t,0)\le\Delta(T,0),$$

$$t\in(0,T]. \qquad (16)$$

Дві останні нерівності очевидні, а перша випливає з нерівності

$$\Delta(t_1,0)=B(t,t_1)\ge\Delta(t,t_1)=$$

$$=\Delta(t,0)-\Delta(t_1,0),$$

яка правильна внаслідок (8).

Оцінимо інтеграл $I_\nu^r(0,t,t)$ при $r>\nu-1$. Запишемо його у вигляді суми інтегралів $I_\nu^r(0,t_1,t)$ і $I_\nu^r(t_1,t,t)$. За допомогою (8) і (16) маємо

$$I_\nu^r(0,t_1,t)\le\int_0^{t_1}(\Delta(\tau,0))^{r-\nu}d\Delta(\tau,0)=$$

$$=\frac{(\Delta(t_1,0))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1}\le\frac{(\Delta(t,0))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1}; \qquad (17)$$

$$I^r_\nu(t_1,t,t)\le$$

$$\le -\int_{t_1}^{t}(B(t,\tau))^{-\nu}dB(t,\tau)(\Delta(t,0))^r=$$

$$=\frac{(B(t,t_1))^{1-\nu}}{1-\nu}(\Delta(t,0))^r\le\frac{(\Delta(t,0))^{r-\nu+1}}{1-\nu}, \tag{18}$$

якщо $r\ge 0$ і $\nu<1$;

$$I^r_\nu(t_1,t,t)\le -\int_{t_1}^{t}(B(t,\tau))^{-\nu+r}dB(t,\tau)=$$

$$=\frac{(B(t,t_1))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1}\le\frac{(\Delta(t,0))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1}, \tag{19}$$

якщо $r<0$. Отже,

$$I^r_\nu(0,t,t)\le C(\Delta(t,0))^{r-\nu+1},\quad r>\nu-1,\ \nu<1. \tag{20}$$

З (15) і (20) випливає оцінка

$$\|\partial^k_x u\|^{0,0}_{0,r+1-|k|/(2b)}\le C\|f\|^{0,0}_{1,r},\ |k|<2b. \tag{21}$$

Розглянемо випадок, коли $|k|=2b$. За допомогою (2), (5), (9), (12)—(14), (17)—(19) і нерівності

$$|z|^l\exp\{-c|z|^q\}\le C\exp\{-c_1|z|^q\},\ z\in\mathbf{R}^n, \tag{22}$$

де $l>0$ і $c_0<c_1<c$, одержуємо

$$|\partial^k_x u(t,x)|\le$$

$$\le CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\|f\|^{0,0}_{1,r}I^r_1(0,t_1,t)+$$

$$+[f]^{\lambda,0}_{1,r}I^{r-\lambda/(2b)}_{1-\lambda/(2b)}(t_1,t,t)+$$

$$+\|f\|^{0,0}_{1,r}I^r_{1-\gamma/(2b)}(t_1,t,t))\le$$

$$\le C\|f\|^{\lambda,0}_{1,r}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\Delta(t,0))^r,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

звідки випливає оцінка

$$\|\partial^k_x u\|^{0,0}_{0,r}\le C\|f\|^{\lambda,0}_{1,r},\quad |k|=2b. \tag{23}$$

Нехай (t,x), (t',x') — довільно фіксовані точки шару $\Pi_{(0,T]}$, причому $t\le t'$, і нехай $p\equiv p(t,x;t',x')$. Оцінимо різницю $\Delta u_k\equiv \Delta^{t',x'}_{t,x}\partial^k_x u(t,x)$, $0<|k|\le 2b$.

Коли $p^{2b}\ge\Delta(t,0)$, то з допомогою оцінок (21) і (23) одержуємо

$$|\Delta u_k|\le|\partial^k_x(t,x)|+|\partial^k_{x'}u(t',x')|\le$$

$$\le C\|f\|^{\lambda,0}_{1,r}((\Delta(t,0))^{r+1-|k|/(2b)}\times$$

$$\times E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)+$$

$$+((\Delta(t',0))^{r+1-|k|/(2b)}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x'))\le$$

$$\le C\|f\|^{\lambda,0}_{1,r}p^\zeta(\Delta(t',0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}\times$$

$$\times E^{-d}(T,\tilde t)(\Psi(t,x)+\Psi(t',x')), \tag{24}$$

де $|k|\le 2b$, $\tilde t\equiv t+(t'-t)\eta(d)$, $\zeta=\gamma$ для $|k|<2b$ і $\zeta=\lambda$ для $|k|=2b$.

Справді, оскільки на підставі монотонності δ і нерівності $A(t',t)\le p^{2b}$

$$\Delta(t',0)=\Delta(t,0)+\Delta(t',t)\le$$

$$\le p^{2b}+\delta(T)A(t',t)\le(1+\delta(T))p^{2b},$$

то маємо

$$(\Delta(t,0))^{r+1-|k|/(2b)}\le$$

$$\le(\Delta(t,0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}p^\zeta\le$$

$$\le(\Delta(t',0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}p^\zeta,$$

$$(\Delta(t',0))^{r+1-|k|/(2b)}=$$

$$=(\Delta(t',0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}(\Delta(t',0))^{\zeta/(2b)}\le$$

$$\le C(\Delta(t',0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}p^\zeta.$$

Розглянемо випадок, коли $p^{2b}<\Delta(t,0)$. Нехай точки t_1 і t_2 такі, що $B(t,t_1)=\Delta(t_1,0)$ і $B(t,t_2)=p^{2b}$. Якщо $t_1<t_2$, то на підставі (11) і (12) запишемо

$$\Delta u_k=$$

$$=\int_0^{t_1}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbf{R}^n}\Delta^{t',x'}_{t,x}\partial^k_x Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbf{R}^n}\Delta^{t',x'}_{t,x}\partial^k_x Z(t,x;\tau,\xi)\Delta^x_\xi f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_2}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbf{R}^n}\partial^k_x Z(t,x;\tau,\xi)\Delta^x_\xi f(\tau,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{t_2}^{t'}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\partial_{x'}^k Z(t,x';\tau,\xi)\Delta_\xi^{x'}f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right)f(\tau,x)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\partial_{x'}^k\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t',x';\tau,\xi)d\xi\right)\Delta_x^{x'}f(\tau,x)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}+$$

$$+\int\limits_{t_2}^{t}\left(\partial_x^k\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right)f(\tau,x)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}-$$

$$-\int\limits_{t_2}^{t'}\left(\partial_{x'}^k\int\limits_{\mathbf{R}^n}Z(t',x';\tau,\xi)d\xi\right)f(\tau,x')\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{8}J_j, \tag{25}$$

де $0<|k|\le 2b$.

Використовуючи (4), (9), (13), (14) і (17), одержуємо

$$|J_1|\le C\|f\|_{1,r}^{0,0}p^\gamma E^{-d}(T,\tilde t)\times$$
$$\times(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))I_{(|k|+\gamma)/(2b)}^{r}(0,t_1,t)\le$$
$$\le C\|f\|_{1,r}^{0,0}p^\zeta E^{-d}(T,\tilde t)(\Psi(t,x)+$$
$$+\Psi(t',x'))(\Delta(t,0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)},$$

де число ζ таке ж, як у (24).

Оцінимо J_2. За допомогою (4), (9), (13), (14), (17) і (22) маємо

$$|J_2|\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}p^\gamma E^{-d}(T,\tilde t)(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{t_2}(B(t,\tau))^{-\gamma/(2b)}\times$$
$$\times(\Delta(\tau,0))^{r-\lambda/(2b)}((B(t,\tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)}+$$
$$+p^\lambda(B(t,\tau))^{-|k|/(2b)})\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\le$$
$$\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}p^\gamma E^{-d}(T,\tilde t)\times$$
$$\times(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))(I_{(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1,t_2,t)+$$
$$+p^\lambda I_{(|k|+\gamma)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1,t_2,t)). \tag{26}$$

Оскільки $p^\lambda=(B(t,t_2))^{\lambda/(2b)}\le(B(t,\tau))^{\lambda/(2b)}$, $\tau\le t_2$, то

$$p^\lambda I_{(|k|+\gamma)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1,t_2,t)\le I_{(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1,t_2,t). \tag{27}$$

З використанням (8), (16) і того, що $\lambda<\gamma$, одержуємо

$$I_{(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1,t_2,t)\le(\Delta(t_2,0))^{r-\lambda/(2b)}\times$$
$$\times\int\limits_{t_1}^{t_2}(B(t,\tau))^{-(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\le$$
$$\le\begin{cases}C(\Delta(t,0))^{r+1-(|k|+\gamma)/(2b)}, & |k|<2b,\\ C(\Delta(t,0))^{r+1-(|k|+\lambda)/(2b)}p^{\lambda-\gamma}, & |k|=2b.\end{cases} \tag{28}$$

З (26)—(28) випливає оцінка

$$|J_2|\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,\tilde t)(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))P_{\zeta|k|},$$

де $P_{\zeta|k|}\equiv p^\zeta(\Delta(t,0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}$.

Скориставшись (2), (8), (14) і (22), одержимо

$$|J_3|\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\Delta(t,0))^{r-\lambda/(2b)}\times$$
$$\times\int\limits_{t_2}^{t}(B(t,\tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau.$$

Оскільки

$$\int\limits_{t_2}^{t}(B(t,\tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau=$$
$$=\frac{p^{2b-|k|+\lambda}}{1-(|k|-\lambda)/(2b)},$$

то маємо

$$|J_3|\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,t)\times$$
$$\times\Psi(t,x)(\Delta(t,0))^{r-\lambda/(2b)}p^{2b-|k|+\lambda}\le$$
$$\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)P_{\zeta|k|}.$$

Аналогічно одержується оцінка

$$|J_4|\le C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x')P_{\zeta|k|}.$$

За допомогою (6), (8) і (16) маємо

$$|J_5| \leq C\|f\|_{1,r}^{0,0} p^\gamma E^{-d}(T,\tilde{t})\Psi(t,x)\times$$

$$\times \int_{t_1}^{t_2} (B(t,\tau))^{-|k|/(2b)}(\Delta(\tau,0))^r \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq$$

$$\leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}(\Delta(t,0))^r E^{-d}(T,\tilde{t})\times$$

$$\times\Psi(t,x)\int_{t_1}^{t_2}(B(t,\tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)}\times$$

$$\times\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau \leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}(\Delta(t,0))^r E^{-d}(T,\tilde{t})\times$$

$$\times\Psi(t,x)(B(t,t_2))^{1-(|k|-\gamma)/(2b)} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}E^{-d}(T,\tilde{t})\Psi(t,x)P_{\zeta|k|},$$

а на підставі (5) аналогічно одержуємо

$$|J_6| \leq C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,\tilde{t})\times$$

$$\times(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))p^\lambda\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t_2}(B(t,\tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)}\times$$

$$\times(\Delta(\tau,0))^{r-\lambda/(2b)}\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau \leq$$

$$\leq C[f]_{1,r}^{\lambda,0}E^{-d}(T,\tilde{t})(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))P_{\zeta|k|}.$$

Інтеграл J_7 оцінюється так:

$$|J_7| \leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)\times$$

$$\times\int_{t_2}^{t}(B(t,\tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)}(\Delta(\tau,0))^r\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau \leq$$

$$\leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\Delta(t,0))^r\times$$

$$\times p^{2b-|k|+\lambda} \leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)P_{\zeta|k|}.$$

Аналогічно одержується оцінка

$$|J_8| \leq C\|f\|_{1,r}^{0,0}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x')P_{\zeta|k|}.$$

Для випадку, коли $t_1 \geq t_2$, замість (25) використовується зображення $\Delta u_k = J_1 + J_3' + J_4' + J_7' + J_8'$, де J_1 таке ж, як у (25), а J_j' відрізняється від J_j, $j \in \{3,4,7,8\}$, тим, що в ньому t_2 замінено на t_1. Оцінки J_j' одержуються аналогічно оцінкам J_j.

З (21), (23), (24) та оцінок J_j, $j \in \{1,...,8\}$, J_j', $j \in \{3,4,7,8\}$, випливає оцінка (10).

Отже, функція (7) є розв'язком системи (1) з простору $U_r^{\gamma,\lambda}$. Для неї, зокрема, правильна оцінка

$$|u(t,x)| \leq CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\Delta(t,0))^{r+1},$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (29)$$

Доведемо єдиність розв'язку системи (1) у просторі $U_r^{\gamma,\lambda}$. Для цього досить довести, що розв'язок $u \in U_r^{\gamma,\lambda}$ однорідної системи (1) є нульовим. Нехай (t,x) — довільно взята точка з $\Pi_{(0,T]}$ і $t_0 \in (0,t)$. Функція u в $\Pi_{(t_0,T]}$ є розв'язком задачі Коші для однорідної системи з початковою функцією $u(t_0,\cdot)$. На підставі результатів з [4] для параболічної системи без вироджень правильна формула

$$u(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n} Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi, \qquad (30)$$

За допомогою (2), (9), (14), (29) і (30) одержуємо

$$|u(t,x)| \leq CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\Delta(t_0,0))^{r+1},$$

звідки при $t_0 \to 0$ випливає, що $u(t,x) = 0$. Оскільки точка (t,x) довільна з $\Pi_{(0,T]}$, то маємо $u = 0$ в $\Pi_{(0,T]}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України.— 1994.— N6.—С.7—11.

2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1995.— 51с.— Деп. в ДНТБ України 12.07.95, N1808-Ук95.

3. *Мединський І. П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". N364. Прикладна математика.— Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1999.— С.298—307.

4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.