УДК 517.51 + 517.98

©2000 р. О.В. Маслюченко

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

КОЛИВАННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКУ КОМПАКТІВ ЕБЕРЛЕЙНА

Будується нарізно неперервна функція на добутку двох компактів Еберлейна з наперед заданим коливанням.

It is constructed a separately continuous function on product of two Eberlein compact with given oscilation.

1. Уточнена обернена задача теорії нарізно неперервних функцій полягає в тому, щоб з'ясувати, для яких напівнеперервних зверху функцій $g : X \to [0, +\infty]$, визначених на добутку X топологічних просторів X_1 та X_2, існує нарізно неперервна функція $f : X \to \mathbf{R}$ така, що її коливання $\omega_f = g$. Це питання пов'язане з задачею про побудову нарізно неперервної функції f з наперед заданою множиною точок розриву $S = D(f) = \mathrm{supp}\omega_f$, де $\mathrm{supp}g$ — носій функції g, яка називається загальною оберненою задачею теорії нарізно неперервних функцій. На даний час детально вивчений лише той випадок, коли X_1 та X_2 — метризовні простори. Зокрема, в [1] (заявлено в [2]) повністю розв'язана обернена задача на добутках метризовних просторів, а в [3] (заявлено в [4]) — уточнена обернена задача на добутку метризовних просторів, один з яких є берівським.

У [3] була введена певна геометрична властивість підмножин добутку, яка названа навскісною апроксимовністю, і доведено (теорема 1), що коли X_1 та X_2 — цілком регулярні простори і g така напівнеперервна зверху функція, що всі прообрази $g^{-1}([\varepsilon, +\infty])$ з $\varepsilon > 0$ навскіс апроксимовні, а один із них має тип G_δ, то існує нарізно неперервна функція f така, що $\omega_f = g$. Таким чином, при розв'язуванні уточненої оберненої задачі, з'ясування достатніх умов на функцію зводиться до знаходження достатніх умов для навскісної апроксимовності підмножин добутку. В [3] при апроксимації множин істотно використовувалась наявність σ-локально скінченної бази, яка характеризує метризовні простори. Тому, якщо X_1 та X_2 — неметризовні простори, то з'ясування навскісної апроксимовності потребує нових методів.

У цій праці за допомогою одного уточнення теореми Прейса-Симона [5, с.170] ми з'ясуємо, що сепарабельні підмножини добутку компактів Еберлейна, які містяться в добутку ніде не щільних множин, є навскіс апроксимовними. Звідси, зокрема, випливає, що для довільної невід'ємної обмеженої напівнеперервної зверху функції f, визначеної на добутку двох компактів Еберлейна, носій якої сепарабельний і міститься в добутку множин першої категорії, існує нарізно неперервна функція, коливання якої дорівнює g. З теореми Наміоки [6] одержуємо, що друга умова на носій необхідна. Але, як ми з'ясуємо, умова сепарабельності носія не є необхідною, хоча вона істотна.

2. Нагадаємо, що простір називається *компактом Еберлейна*, якщо він гомеоморфний деякій слабко компактній підмножині банахового простору зі слабкою топологією. Топологічний простір ми будемо називати *еберлейновим*, якщо він гомеоморфний деякій підмножині компакта Еберлейна. Як відомо, метризовні простори є еберлейновими. Нехай T — довільна множина і $c_0(T)$ — це множина всіх збіжних до нуля фун-

кцій $x: T \to \mathbf{R}$, тобто таких, що множина $\{t \in T\colon |x(t)| > \varepsilon\}$ є скінченною для всіх $\varepsilon > 0$. На множині $c_0(T)$ завжди розглядатимемо топологію поточкової збіжності. За теоремою Аміра-Лінденштрауса [7] довільний еберлейновий простір гомеоморфний деякій відносно компактній підмножині $c_0(T)$. Приступимо до доведення уточненого варіанта теореми Прейса-Симона [5, с.170]. Наступна лема є основним кроком в її доведенні.

Лема 1. *Нехай X — відносно компактна в $c_0(T)$ множина, і множина $U \neq \emptyset$ відкрита в X. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують відкрита в X непорожня множина $V \subseteq U$ і скінченна множина $T_0 \subseteq T$ такі, що $|x(t)| \le \varepsilon$ для всіх $x \in V$ і $t \in T \setminus T_0$.*

Доведення. Вважатимемо, що X — компакт. Нехай $F_E = \{x \in X\colon |x(t)| \ge \varepsilon$ для всіх $t \in E\}$ для довільного $E \subseteq T$. Зрозуміло, що F_E замкнені в X, причому $F_E = \emptyset$, якщо E нескінченна і $F_\emptyset = X$. Покладемо $G_E = \{x \in X\colon |x(t)| > \varepsilon$ для довільного $t \in E\}$. Розглянемо систему $\mathcal{E}$ усіх множин $E \subseteq T$, для яких $G_E \neq \emptyset$. Зрозуміло, що всі $E \in \mathcal{E}$ скінченні і $\emptyset \in \mathcal{E}$. Покажемо, що існує максимальний елемент в $\mathcal{E}$ відносно включення $\subseteq$. Якщо це не так, то в $\mathcal{E}$ існує строго зростаюча послідовність множин E_n. Нехай F_n — це замикання $G_{E_n} \cap U$. Тоді (F_n) — спадна послідовність непорожніх компактів $F_n \subseteq F_{E_n}$. Отже, $\bigcap F_n \neq \emptyset$. Але, з іншого боку, $\bigcap F_n \subseteq F_{E_n} = F_E = \emptyset$, бо $E = \bigcup E_n$ нескінченна. Нехай T_0 — максимальний елемент $\mathcal{E}$ і $V = G_{T_0} \cap U$. Тоді $|x(t)| \le \varepsilon$ для $x \in V$ і $t \in T \setminus T_0$.

Доведемо тепер теорему Прейса-Симона в зручній для нас редакції. Ми казатимемо, що послідовність множин A_n простору X *збігається* до точки x, якщо в будь-якому околі цієї точки містяться всі A_n, починаючи з деякого номера. Нехай $A_n \subseteq c_0(T)$. Скажемо, що A_n *рівномірно збігається до x_0 на множині S*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0, що $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ для $x \in A_n$, $t \in S$, $n > n_0$.

Теорема 1. *Нехай множина X відносно компактна в $c_0(T)$ і $x_0 \in X$. Тоді існує послідовність відкритих в X множин $V_n \neq \emptyset$ і злічення множина $T_0 \subseteq T$ такі, що V_n збігається до x_0 і рівномірно збігається до нуля на $T \setminus T_0$.*

Доведення. Нехай $E_n = \{t \in T\colon |x_0(t)| > 1/n\}$. Побудуємо індуктивно зростаючу послідовність скінченних множин $T_n \supseteq E_n$ і послідовність відкритих в X множин $V_n \neq \emptyset$ таких, що для $x \in V$ нерівність $|x(t) - x_0(t)| \le 1/n$ виконується для $t \in T_{n-1}$, а $|x(t)| \le 1/n$ для $t \in T \setminus T_n$. Покладемо $U_0 = X$. За лемою 1 існують скінченна множина T_1 і відкрита непорожня множина $V_1 \subseteq U_0$ такі, що $|x(t)| \le 1$ для $x \in V_1$ і $t \in T \setminus T_1$, причому можна вважати, що $T_1 \supseteq E_1$. Нехай $U_1 = \{x \in X\colon |x(t) - x_0(t)| < 1/2$ при $t \in T_1\}$. За лемою 1 існує скінченна множина $T_2 \supseteq E_2 \cup T_1$ і відкрита непорожня множина $V_2 \subseteq U_1$ такі, що $|x(t)| \le 1/2$ для $x \in V_2$ і $t \in T \setminus T_1$. Продовжуючи аналогічним чином побудову, одержимо множини V_n і T_n, які задовольняють потрібні властивості. Покладемо $T_0 = \bigcup T_n$. Зрозуміло, що $|x(t)| \le 1/n$ для $n \in \mathbf{N}$, $t \in T \setminus T_0$ і $x \in V_n$. Тому V_n рівномірно прямують до нуля на $T \setminus T_0$. Покажемо, що V_n збігаються до x_0. Нехай U — окіл x_0. Можна вважати, що $U = \{x \in X\colon |x(t_0) - x_0(t_0)| < \varepsilon\}$ для деяких $t_0 \in T$ і $\varepsilon > 0$. Якщо $t_0 \notin T_0$, то $x_0(t_0) = 0$ і тому для $n > 1/\varepsilon$ матимемо, що $V_n \subseteq U$. Нехай тепер $t_0 \in T_0$. Тоді $t_0 \in T_n$ для всіх n, більших деякого n_0. Отже, $|x(t_0) - x_0(t_0)| \le 1/n$ для $n > n_0$ і $x \in V_n$. Значить, знову $V_n \subseteq U$ при $n > n_0$. Теорему доведено.

Наступне твердження є основою подальших конструкцій.

Теорема 2. *Нехай X — відносно компактна підмножина $c_0(T)$ і X_0 — сепарабельна ніде не щільна в X множина. Тоді існують злічення диз'юнктна система $\mathcal{G}$ відкритих в X непорожніх множин і злічення множина $T_0 \subseteq T$ такі, що $x(t) = 0$ для $x \in X_0$ і $t \in T \setminus T_0$, причому:*

(i) $\overline{G} \cap X_0 = \emptyset$ для всіх $G \in \mathcal{G}$;

(ii) у кожному околі U довільної точки x_0 міститься деяке $G \in \mathcal{G}$;

(iii) для кожного $\varepsilon > 0$ всі множини $G \in \mathcal{G}$, за винятком скінченного їх числа, містяться в множині $\{x \in X : |x(t)| < \varepsilon$

для $t \in T \setminus T_0\}$.

Доведення. Нехай (x_k) — деяка щільна в X_0 послідовність. За попередньою теоремою для кожного k існують зліченна множина $T_k \subseteq T$ і послідовність відкритих в X непорожніх множин V_{kn}, яка збігається до x_k і рівномірно прямує до нуля на $T \setminus T_k$. Покладемо $T_0 = \bigcup T_k$. Зараз ми побудуємо диз'юнктну сім'ю відкритих непорожніх множин G_{km} таких, що $|x(t)| < \frac{1}{k+m}$ для $x \in G_{km}$ і $t \in T \setminus T_0$, $\overline{G_{km}} \cap X_0 = \emptyset$ і $G_{km} \subseteq V_{kn}$ для деякого $n = n_{km} \geq m$. Нехай $\nu : \mathbf{N^2} \to \mathbf{N}$ — деяка бієкція. Припустимо, що вже побудовані G_{km}, якщо $\nu(k,n) < l$. Побудуємо G_{km} для $\nu(k,m) = l$. Покладемо $U = X \setminus \bigcup_{\nu(i,j)<l} \overline{G_{ij}}$. Зрозуміло, що U — окіл x_k. Оскільки V_{kn} прямує до x_k, то існує номер n_0 такий, що $V_{kn} \subseteq U$, для $n \geq n_0$, тому $V_{kn} \cap G_{ij} = \emptyset$, якщо $\nu(i,j) < l$ і $n \geq n_0$. Оскільки V_{kn} рівномірно прямують до нуля на $T \setminus T_k \supseteq T \setminus T_0$, то існує n_1 таке, що $|x(t)| < \frac{1}{k+m}$ для $n \geq n_1$, $x \in V_{kn}$ і $t \in T \setminus T_0$. Покладемо $n = n_{km} = \max\{n_0, n_1, m\}$. Візьмемо за G_{km} таку відкриту непорожню підмножину V_{kn}, що $\overline{G_{km}} \cap X_0 = \emptyset$. Тоді $G_{km} \cap G_{ij} = \emptyset$ для $\nu(i,j) < \nu(k,m)$ і $|x(t)| < \frac{1}{k+m}$ для $x \in G_{km}$ і $t \in T \setminus T_0$.

Покладемо $\mathcal{G} = \{G_{km}\colon k,m \in \mathbf{N}\}$. Властивості (i), (iii) випливають безпосередньо з побудови. Превіримо (ii). Оскільки V_{kn} прямує до x_k і $G_{km} \subseteq V_{kn_{km}}$, причому $n_{km} \geq m$, то G_{km} також прямують до x_k. Залишилось урахувати, що (x_k) щільна в X_0.

3. У цьому пункті за допомогою теореми 2 ми розробимо метод апроксимації ніде не щільних сепарабельних підмножин еберлейнових просторів. Нагадаємо означення апроксимовності [3]. Нехай $\mathcal{B}$ — деяка система відкритих підмножин X. Множина $S \subseteq X$ називається *$\mathcal{B}$-апроксимовною*, якщо існують сім'я $\pi : S \to 2^X$ і диз'юнктна сім'я $\tau : P \to \mathcal{B}$, яка визначена на тілі $P = \bigcup \pi(S)$ сім'ї π такі, що $p \in \tau(p)$, $\overline{\tau(p)} \cap \overline{S} = \emptyset$, $s \in \overline{\pi(s)}$, для всіх $p \in P$ і $s \in S$, і система $\tau(P_E)$, де $P_E = \bigcup \pi(E)$ локально скінченна поза $\overline{E}$, для довільної $E \subseteq S$. Система $\mathcal{B}$ відкритих множин X називаться *псевдобазою*, якщо в довільній непорожній відкритій підмножині X місититься деякий непорожній елемент $\mathcal{B}$.

Теорема 3. *Нехай X — еберлейновий простір і S — його сепарабельна ніде не щільна підмножина і $\mathcal{B}$ — псевдобаза в X. Тоді S є сильно $\mathcal{B}$-апроксимовною.*

Доведення. Будемо вважати, що X — відносно компактний підпростір $c_0(T)$. Нехай $X_0 = \overline{S}$. Виберемо $\mathcal{G}$ і T_0 згідно з теоремою 2. Оскільки $\mathcal{B}$ — псевдобаза, то можна вважати, що $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$. Тоді $x(t) = 0$ для $x \in X$ і $t \in T \setminus T_0$. Нехай $T_0 = \{t_1, t_2, ...\}$. Розглянемо скінченне підпокриття $\mathcal{U}_n$ компакта X_0, вписане в його покриття множинами $\{x\colon |x(t_m) - x_0(t_m)| < 1/2n$ для всіх $m < n\}$, де $x_0 \in X_0$. Зрозуміло, що $|x'(t_m) - x''(t_m)| < 1/n$ для $x', x'' \in U \in \mathcal{U}_n$ і $m < n$. Для кожного $s \in S$ візьмемо $U_n(s) \in \mathcal{U}_n$, так що $s \in U_n(s)$. У кожній множині $U_n(s)$ виберемо множину $G_n(s) \in \mathcal{G}$ і точку $p_n(s) \in G_n(s)$ так, щоб в однакових множинах $U_n(s)$ вибирались однакові множини $G_n(s)$ і точки $p_n(s)$. Тоді $|p_n(s)(t_m) - s(t_m)| < 1/n$ для $m < n$ і $s \in S$. Врахувавши (iii), одержимо, що $p_n(s) \to s$. Покладемо $\pi(s) = \{p_n(s)\colon n \in \mathbf{N}\}$ і $\tau(p) = G_n(s)$ для $p = p_n(s)$. Зрозуміло, що $s \in \overline{\pi(s)}$ і $p \in \tau(p)$. Перевіримо, що $\tau(P_E)$, де $P_E = \bigcup \pi(E)$, локально скінченна поза $\overline{E}$. Візьмемо $x_0 \in X \setminus \overline{E}$. Якщо $x_0(t_0) \neq 0$ для деякого $t_0 \in T \setminus T_0$, то локальна скінченність $\tau(P_E) \subseteq \mathcal{G}$ випливає з (iii). Нехай тепер $x_0(t) = 0$ для всіх $t \in T \setminus T_0$. Тоді, оскільки $x(t) = 0$ для $t \in T \setminus T_0$, $x \in \overline{E} \subseteq X_0$ і $x_0 \notin E$, то існує $\varepsilon > 0$ і окіл $U_0 = \{x\colon |x(t_m) - x_0(t_m)| \leq \varepsilon$ для $m < n\}$ точки x_0 такі, що $U_0 \cap \overline{E} = \emptyset$. Нехай $U = \{x\colon |x(t_m) - x_0(t_m)| < \varepsilon/2$, при $m < n\}$. Тоді $|\{G \in \tau(P_E)\colon G \cap U \neq \emptyset\}| \leq |\{U_n(s)\colon U_n(s) \cap U \neq \emptyset, n \in \mathbf{N}, s \in S\}$. Але $|x(t_m) - s(t_m)| < 1/n$ для $x \in U_n(s)$. Тому $U_n(s) \cap U = \emptyset$, якщо $n > 2/\varepsilon$ і $s \in E$. Отже, система $\{U_n(s)\colon U_n(s) \cap U \neq \emptyset, n \in \mathbf{N}, s \in S\}$ скінченна.

З попередньої теореми і результатів праці [3] випливає наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай простір X є добу-*

тком двох еберлейнових просторів і $g : X \to [0,+\infty)$ — обмежена напівнеперервна зверху функція, для якої множина $g^{-1}([0,+\infty))$ сепарабельна й міститься в добутку ніде не щільних множин. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \to \mathbf{R}$ така, що $\omega_f = g$.

4. З'ясуємо, що умова сепарабельності носія в попередній теоремі не є необхідною, проте вона є істотною.

Нехай T — незліченний дискретний простір і $X = \alpha(T \times \alpha\mathbf{N})$, де $\alpha Z = Z \cup \{\infty\}$ — одноточкова компактифікація локально компактного простору Z. Зрозуміло, що X — компакт Еберлейна, адже відображення $h : X \to c_0(T)$, яке визначене за правилом $h(\infty) = 0$, $h((t,\infty)) = \chi_{\{t\}}$, $h((t,n)) = \frac{n}{n+1}\chi_{\{t\}}$, здійснює гомеоморфне вкладення в $c_0(T)$. Нехай $F = \{(t,\infty)\colon t \in T\} \cup \{\infty\}$. Зрозуміло, що множина F замкнена, ніде не щільна в X і несепарабельна. Покладемо $S = \{(x,x)\colon x \in F\}$. Нехай $g = \chi_S$ — характеристична функція S. Тоді, взявши за f характеристичну функцію множини $\{(x,x)\colon x \in T \times \mathbf{N}\}$, одержимо, що f нарізно неперервна на X^2, $\omega_f = g$ і носій $\mathrm{supp} g = S$ несепарабельний. Таким чином, умова сепарабельності $\mathrm{supp} g$ не є необхідною.

Нехай X і F такі, як і раніше, $Y = [0,1]$ і $S = F \times \{0\}$. Покладемо $g = \chi_S$. Доведемо, що g не є коливанням жодної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbf{R}$. Ми покажемо навіть більше, а саме, що не існує нарізно неперервної функції f, для якої $D(f) \supseteq S$. Припустимо, що це не так. Тоді існує нарізно неперервна функція f, яка є розривною у всіх точках S. Нехай $\mathcal{V}$ — зліченна база Y, а $\mathcal{G}$ — зліченна база $\mathbf{R}$, причому $\emptyset \notin \mathcal{V}$ і $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Занумеруємо зліченну множину Ω всіх четвірок $\omega = (V,W,G,H) \in \mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ таких, що $0 \in V \supseteq W$ і $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$, у послідовність елементів $\omega_n = (V_n, W_n, G_n, H_n)$. Розглянемо множину T_n усіх тих $t \in T$, для яких $f((t,\infty) \in G_n$ для $y \in V_n$, а $f((t,m_t),y) \in H_n$ для деякого $m_t \in \mathbf{N}$ і всіх $y \in W_n$. Оскільки f нарізно неперервна і розривна на S, то $T = \bigcup T_n$. Тоді існує номер n такий, що T_n нескінченна. Нехай $\omega_n = (V,W,G,H)$, $x'_t = (t,\infty)$, $x''_t = (t,n_t)$. Тоді $f(x'_t,y) \in G$ і $f(x''_t,y) \in H$ для $t \in T_n$ і $y \in W \subseteq V$. Отже, з того, що $\infty \in \overline{\{x'_t \in T_n\}} \cap \overline{\{x''_t \in T_n\}}$, випливає, що $f(\infty,y) \in \overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ для $y \in W$, що є неможливим. Таким чином, умова сепарабельності $\mathrm{supp} g$ істотна.

На завершення статті автор висловлює щиру подяку В.К.Маслюченку і В.В.Михайлюку за постановку задачі і постійну увагу до цієї праці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні функції // Матеріали міжнар. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана — Чернівці: Рута, 1995.— С.192—246.

2. *Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів // Там само.— С.103.

3. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Побудова нарізно неперервної функції з даним коливанням // Укр. мат. журн.— 1998.— **50**, N7.— С.948—959.

4. *Маслюченко О.В.* Про характеризацію коливань нарізно неперервних функцій // Всеукраїнська наук. конф. "Розробка та застосування математичних моделей в науково-технічних дослідженнях", присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С. Казимірського (5-7 жовтня 1995 р.): Тези доповідей. Ч.1.— Львів, 1995.— С.80—81.

5. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций.— М.: Изд-во Московского ун-та, 1989.— 222 с.

6. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math.— 1974.— **51**, N2.— P.515—531.

7. *Amir D., Lindenstraus J.* The structure of weakly compact set in Banach spaces // Ann. of Math.— 1986.— **88**.— C.35—46.