УДК 517.983

©1999 р. Н.Є. Лінчук, С.С. Лінчук

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ОДИН КЛАС ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, вивчаються деякі операторні рівняння, які містять різницеві оператори та оператори множення на аналітичні функції.

Some operational equations which contain different operators and the operators of multiplication on the analytical functions are studied in a class of the linear continuous operators on the spaces of the analytical functions.

Нехай G – довільна область розширеної комплексної площини. Через $H(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ – множину всіх лінійних нереревних операторів, що діють з $H(G_1)$ в $H(G_2)$.

Тут вивчаються деякі операторні рівняння, що містять різницеві оператори та оператори множення на аналітичні функції. З цією метою використовується інтегральне зображення Кете [1] операторів з класу $\mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$, за яким між операторами $T \in\mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ і локально аналітичними на множині $\mathcal{C}G_1 \times G_2$ функціями $t(\lambda, z)$ існує взаємно однозначна відповідність, яка встановлюється формулою

$$t(\lambda, z) = T\left[\frac{1}{\lambda - \tilde{z}}\right]. \qquad (1)$$

При цьому функція $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (1), називається характеристичною функцією оператора T.

Нехай $H'(G)$ – простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $H(G)$. Для функціоналу $L \in H'(G)$ функція

$$l(\lambda) = L\left[\frac{1}{\lambda - z}\right], \qquad (2)$$

називається характеристичною . Відомо, що формулою (2) встановлюється взаємно однозначна відповідність між простором $H'(G)$ і простором $H(\mathcal{C}G)$ – локально аналітичних на множині $\mathcal{C}G$ функцій (які дорівнюють нулеві в нескінченно віддаленій точці, якщо остання належить G).

Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить точку 0. Оператор Помм'є неперервно діє в $H(G)$ за правилом $(\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$. Нехай функція $\psi(\lambda)$ така, що функція двох змінних $t(\lambda, z) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ є локально аналітичною на множині $\mathcal{C}G \times G$. Тоді формулою

$$(\psi(\Delta)g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z} g(\lambda) d\lambda \qquad (3)$$

визначається оператор $\psi(\Delta) \in\mathcal{L}(H(G), H(G))$, який називається функцією від оператора Помм'є (контур інтегрування γ_n в (3) вибирається згідно з означенням локально аналітичної функції $t(\lambda, z)$ [1]). У випадку, коли $\psi(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k \lambda^{-k}$, а область G містить точку 0, то $\psi(\Delta) = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k \Delta^k$. Як доведено в [2], формулою

$$(Tf)(z) = L_\zeta\left[\frac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z - \zeta}\right], \qquad (4)$$

де $L \in H'(G)$, визначається загальний вигляд операторів $T \in\mathcal{L}(H(G), H(G))$, які комутують з оператором Δ. Оператор (4) є функцією від оператора Помм'є, оскільки його характеристична функція збігається з $\frac{\lambda l(\lambda)}{\lambda - z}$, де $l(\lambda)$ – характеристична функція функціонала L. Таким чином, комутант оператора Δ в $H(G)$ збігається з множиною операторів, які є функціями від оператора Δ.

Нехай G –довільна область в $\overline{C}$. Для фіксованої функції $\varphi \in H(G)$ оператор множення $(U_\varphi f)(z) = \varphi(z) f(z)$ неперервно діє в $H(G)$. В працях [2], [3] у випадку довільних областей G_1 та G_2 проведено дослідження операторних рівнянь виду

$$TU_{\varphi_1} = U_{\varphi_2} T,$$
$$T\psi_1(\Delta) = \psi_2(\Delta) T$$

в класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$. У зв'язку з цим природно виникає питання про вивчення таких операторних рівнянь:

$$T\psi(\Delta) = U_\varphi T, \tag{5}$$
$$TU_\varphi = \psi(\Delta) T. \tag{6}$$

Але неважко переконатися в тому, що рівняння (5) в нетривіальному випадку має лише нульовий розв'язок. Набагато змістовнішим є рівняння (6), яке і є предметом дослідження цієї статті. Зауважимо ще, що в [4] матричним методом вивчено рівняння виду $TU_{z^p} = \Delta^p T (p \in N)$ в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі функцій, які аналітичні в кругових областях.

Теорема 1. *Нехай G_1 і G_2 – довільні області розширеної комплексної площини, $\varphi \in H(G_1)$, а $\psi(\Delta) \in \mathcal{L}(H(G_2), H(G_2))$. Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ був розв'язком операторного рівняння (6), необхідно і досить, щоб*

$$[\varphi(\lambda) - \psi(z)] t(\lambda, z) = t_1(\lambda, z) + t_2(\lambda, z), \tag{7}$$

де функції $t_1(\lambda, z)$ і $t_2(\lambda, z)$ є аналітичними відповідно на множинах $\mathcal{C}G_1 \times \mathcal{C}G_2$, і $G_1 \times G_2$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що оператор $T \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ задовольняє рівняння (6). Через $\tilde{t}(\lambda, z)$ позначимо характеристичну функцію оператора $\psi(\Delta)T$. Зафіксуємо n так, щоб функція $\frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ була аналітичною при $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}_n^{(2)}$ і $z \in G_n^{(2)}$. Нехай $\gamma_{n+1} = \partial G_{n+1}^{(2)}$ [1]. Тоді для $z \in G_{n+1}^{(2)}$ і $g \in H(G_2)$, згідно з (3), маємо

$$(\psi(\Delta) g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} g(\tau) d\tau.$$

За числом $n+1$ виберемо номер $N(n+1)$ таким, щоб характеристична функція $t(\lambda, z)$ оператора T була аналітичною при $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}_{N(n+1)}^{(1)}$ і $z \in G_{n+1}^{(2)}$. Тоді для $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}_{N(n+1)}^{(1)}$ і $z \in G_{n+1}^{(2)} \setminus \overline{G}_n^{(2)}$ одержимо

$$\tilde{t}(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\psi(\tau)}{\tau - z} d\tau =$$

$$= \psi(z) t(\lambda, z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\psi(\tau) - \psi(z)}{\tau - z} d\tau.$$

Зрозуміло, що функція

$$t_1(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\lambda, \tau) \frac{\psi(\tau) - \psi(z)}{\tau - z} d\tau$$

є аналітичною при $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}_{N(n+1)}^{(1)}$ і $z \in \mathcal{C}G_n^{(2)}$; тому функція $t_1(\lambda, z)$ аналітична на множині $\mathcal{C}G_1 \times \mathcal{C}G_2$.

З іншого боку, $\tilde{t}(\lambda, z)$ – характеристична функція оператора TU_φ. Тому для $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}_{N(n+1)+1}^{(1)} \cap G_1$ і $z \in G_{n+1}^{(2)}$ маємо

$$\tilde{t}(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\tau, z) \frac{\varphi(\tau)}{\lambda - \tau} d\tau =$$

$$= \varphi(\lambda) t(\lambda, z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\tau, z) \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\lambda)}{\lambda - \tau} d\tau.$$

Але функція $t_2(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{n+1}} t(\tau, z) \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\tau)}{\lambda - \tau} d\tau$ є аналітичною при $\lambda \in G_1$ і $z \in G_{n+1}^{(2)}$, а значить, і на множині $G_1 \times G_2$. Прирівнюючи одержані вирази для $\tilde{t}(\lambda, z)$, переконуємося, що при $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}_{N(n+1)+1}^{(1)} \cap G_1$ і $z \in G_{n+1}^{(2)} \setminus \overline{G}_n^{(2)}$ виконується рівність (7).

Достатність. Зафіксуємо довільно взяте натуральне число n. Тоді при $\lambda \in \mathcal{C}\overline{G}^{(1)}_{N(n+2)+1} \cap G_1$ і $z \in G^{(2)}_{n+2} \backslash \overline{G}^{(2)}_{n+1}$ виконується рівність (7). Не порушуючи загальності вважатимемо, що функція $\frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ є аналітичною на множині $\mathcal{C}\overline{G}^{(2)}_{n)} \times G^{(2)}_n$. Нехай $\Gamma_{n+1} = \partial G^{(2)}_{n+2}$. Тоді для довільної функції $g \in H(G_1)$ і $z \in G^{(2)}_{n+1}$ маємо

$$(\psi(\Delta)Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z}(Tg)(\lambda)d\lambda. \tag{8}$$

Згідно з означенням локально аналітичної на множині $\mathcal{C}G_1 \times G_2$ функції $t(\lambda, z)$, для числа $n+2$ існує натуральне число $N(n+2)$ таке, що для довільної функції $g \in H(G_1)$ при $z \in G^{(2)}_{n+2}$

$$(Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t(\tau, z)g(\tau)d\tau, \tag{9}$$

де $\gamma_n = \partial G^{(1)}_{N(n+2)+1}$. Тоді, згідно з (8) та (9), з урахуванням (7) одержимо, що при $z \in G^{(2)}_{n+1}$

$$(\psi(\Delta)Tg)(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \int\limits_{\gamma_n} t(\tau, \lambda)g(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_n} g(\tau)d\tau(\int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\psi(\lambda) - \varphi(\tau)}{\lambda - z} t(\tau, \lambda)d\lambda +$$

$$\int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{\varphi(\tau)t(\tau, \lambda)}{\lambda - z} d\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t(\tau, z)\varphi(\tau)g(\tau)d\tau -$$

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_n} g(\tau)d\tau \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{t_1(\tau, \lambda)}{\lambda - z} d\lambda -$$

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_n} g(\tau)d\tau \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{t_2(\tau, \lambda)}{\lambda - z} d\lambda =$$

$$= (TU_\varphi g)(z).$$

Теорема 1 доведена.

Застосуємо теорему 1 до конкретних операторних рівнянь.

Теорема 2. *Нехай G_1 і G_2 – довільні області розширеної комплексної площини, причому $0 \in G_2$, а k – фіксоване ненульове комплексне число. Для того щоб оператор T з классу $\mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ був розв'язком рівняння $TU_z = k\Delta T$, необхідно і досить, щоб існувала аналітична на множині $G_2 \cup (k(\mathcal{C}G_1)^{-1})$ функція $\varphi(z)$ така, що*

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{z\varphi(z) - \frac{k}{\lambda}\varphi(\frac{k}{\lambda})}{\lambda z - k} f(\lambda)d\lambda, \tag{10}$$

де f – довільна функція з простору $H(G_1)$, $z \in G^{(2)}_n$, а контур γ_n вибрано згідно з означенням локально аналітичної на множині $\mathcal{C}G_1 \times G_2$ функції

$$t(\lambda, z) = \frac{z\varphi(z) - \frac{k}{\lambda}\varphi(\frac{k}{\lambda})}{\lambda z - k}.$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що оператор $T \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє співвідношення $TU_z = k\Delta T$. Тоді при $\lambda \in \mathcal{C}G_1$ і $z \in G_2$ маємо

$$(\lambda z - k)t(\lambda, z) = z\varphi(z) - k\psi(\lambda), \tag{11}$$

де $\varphi \in H(G_2)$, $\psi \in H(\mathcal{C}G_1)$. З рівності (11) випливає, що для кожного z з деякого досить малого околу точки $z_0 = 0$ ліва частина рівності (11) дорівнює нулеві при $\lambda = \frac{k}{z} \in \mathcal{C}G_1$. Тому для таких z

$$z\varphi(z) - k\psi(\frac{k}{z}) = 0. \tag{12}$$

Оскільки функція $\frac{k}{z}\varphi(\frac{k}{z})$ є аналітичною на множині $k(\mathcal{C}G_1)^{-1}$ і в деякому околі точки $z_0 = 0$ вона збігається з $\varphi(z)$, то $\varphi(z)$ однозначно продовжується до функції, аналітичної на множині $G_2 \cup (k(\mathcal{C}G_1)^{-1})$. За теоремою єдиності для аналітичних функцій, одержуємо, що $\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\varphi(\frac{k}{\lambda})$. Тому

$$t(\lambda, z) = \frac{z\varphi(z) - \frac{k}{\lambda}\varphi(\frac{k}{\lambda})}{\lambda z - k}.$$

Відновлюючи за характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ дію оператора T на довільну функцію $f \in H(G_1)$, одержимо, що T подається у вигляді (10).

Достатність умов теореми 2 перевіряється безпосереднім обчисленням.

У праці [5] при дослідженні умов еквівалентності диференціальних операторів скінченного порядку розглядалася також задача про описання лінійних неперервних операторів та ізоморфізмів, що діють у просторі цілих функцій і комутують зі степенем оператора диференціювання $D = \frac{d}{dz}$. При цьому по суті як очевидний використовувався такий факт: оператор $T \in \mathcal{L}(H(C), H(C))$ є розв'язком операторного рівняння $TD^m = D^m T, m \in N$, тоді і тільки тоді, коли $T = \sum\limits_{j=0}^{m-1} T_j$, де кожен з операторів T_j задовольняє відповідне операторне рівняння $T_j D = w^j D T_j$, а $w = exp(\frac{2\pi i}{m})$. На помилковість цього твердження вперше вказав М.І.Нагнибіда [6], який дав повне і правильне розв'язання сформульованої задачі.

Як застосування теорем 1 і 2 встановимо, що для рівнянь, які розглядаються в цій статті, твердження, аналогічне наведеному вище факту з [5], є правильним.

Теорема 3. *Нехай G_1 і G_2 – довільні області розширеної комплексної площини, причому $0 \in G_2$, а m – фіксоване натуральне число. Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ був розв'зком рівняння*

$$TU_{z^m} = \Delta^m T, \tag{13}$$

необхідно і досить, щоб його можна було подати у вигляді

$$T = \sum_{j=0}^{m-1} T_j,$$

де оператор $T_j \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ задовольняє рівняння $TU_z = w^j \Delta T, j = \overline{0, m-1}$.

Доведення. Припустимо, що оператор $T \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (13). Нехай n – довільне фіксоване натуральне число, а $N(n)$ – вибране згідно з означенням локально аналітичної на множині $\mathcal{C}G_1 \times G_2$ функції $t(\lambda, z)$. Подіявши обома частинами рівності (13) на функцію $\frac{1}{\lambda - z}$, одержимо, що при $z \in \mathcal{C}\overline{G}^{(1)}_{N(n)+1}$ виконується рівність

$$(\lambda^m z^m - 1) t(\lambda, z) =$$

$$= z^m \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(z) \lambda^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(\lambda) z^k, \tag{14}$$

де $\varphi_k(z) = T z^k \in H(G_2)$, а $\psi_k(z) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k t}{\partial \lambda^k}(\lambda, 0) \in H(\mathcal{C}G_1), k = \overline{0, m-1}$. З рівності (14) випливає, що для z з деякого околу точки $z_0 = 0$ при кожному $j, j = \overline{0, m-1}$, виконуються рівності

$$\sum_{k=0}^{m-1} z^k w^{-j(k+1)} \varphi_k(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^{k-1} \psi_k(\frac{w^j}{z}). \tag{15}$$

Оскільки функція $\sum\limits_{k=0}^{m-1} z^{k-1} \psi_k(\frac{w^j}{z})$ є аналітичною при $z \in w^j (\mathcal{C}\overline{G}^{(1)}_{N(n)+1})^{-1}$, то з (15) випливає, що кожна з функцій

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k w^{-j(k+1)} \varphi_k(z), j = \overline{0, m-1}, \tag{16}$$

однозначно продовжується до функції, аналітичної на множині $G^{(2)}_n \cup (w^j (\mathcal{C}\overline{G}^{(1)}_{N(n)+1})^{-1})$. Тоді з (14)–(16) одержимо, що характеристичну функцію $t(\lambda, z)$ при $z \in G^{(2)}_n, \lambda \in \mathcal{C}\overline{G}^{(1)}_{N(n)+1}$ можна подати у вигляді

$$t(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{w^j}{m} \frac{z g_j(z) - \frac{w^j}{\lambda} g_j(\frac{w^j}{\lambda})}{\lambda z - w^j}. \tag{17}$$

Оскільки кожна з функцій $g_j(z), j = \overline{0, m-1}$, є аналітичною на множині $G_2 \cup (w^j (\mathcal{C}G_1)^{-1})$, то за теоремою 2 функція

$$t_j(\lambda, z) = \frac{w^j}{m} \frac{z g_j(z) - \frac{w^j}{\lambda} g_j(\frac{w^j}{\lambda})}{\lambda z - w^j}$$

є характеристичною функцією оператора $T_j \in \mathcal{L}(H(G_1), H(G_2))$, що задовольняє співвідношення $T_j U_z = w^j \Delta T_j, j = \overline{0, m-1}$. Крім того, з (17) одержуємо, що $T = \sum\limits_{j=0}^{m-1} T_j$. Таким чином, доведена необхідність умов теореми 3, а їх достатність є очевидною.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.– 1953.– **191**.– S.30–49.

2. *Линчук Н.Е.* Некоторые операторные уравнения в аналитических пространствах, связанные с оператором Поммье.– Черновиц. ун-т.– Черновцы, 1986.– 19 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, N 1581.

3. *Линчук Н.Е.,Линчук С.С.* Об одном классе операторных уравнений в аналитических пространствах // Укр. мат. журн.– 1983.–**35**, N4.– С.510–515.

4. *Нагнибіда М.І.* Про деякі властивості ганкелевих операторів у просторах аналітичних функцій // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. – Чернівці, 1990.–С.164–169.

5. *Delsartes J.,Lions I.L.* Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe // Comment. math. helv.–1957.–**32**, N 32.–P.113–128.

6. *Нагнибида Н.И.* К вопросу об изоморфизмах аналитического пространства, перестановочних со степенью оператора дифференцирования // Докл. АН СССР.–1966.– **167**, N 6.–С.1230–1233.