УДК 517.956.4

©1999 р. І.І. Клевчук

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

БІФУРКАЦІЯ СТАНУ РІВНОВАГИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Розглядається сингулярно збурена система нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом. Доведено існування інтегральних многовидів. Досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги.

A singularly perturbed system of nonlinear parabolic equations with transformed argument is considered. The existence of an integral manifold is proved. The bifurcation of an invariant torus from the equilibrium point is investigated.

Розглянемо систему нелінійних сингулярно збурених параболічних рівнянь з перетвореним аргументом

$$L(\varepsilon)\partial_t u = D(t)\partial_x^2 u + A(t)u + B(t)u_\Delta + \\ + f(t,x,u,u_\Delta) \qquad (1)$$

і з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \qquad (2)$$

Тут $L(\varepsilon) = \mathrm{diag}[E_m, \varepsilon E_p], m + p = n$, ε – малий додатний параметр, $u_\Delta = u(t, x - \Delta)$, Δ – зсув аргументу, матриці $D(t),\ A(t),\ B(t)$ і функція $f : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^n$ п'ять раз неперервно диференційовні за всіма аргументами і 2π - періодичні відносно $t, x, f(t, x, u, v) = O(|u|^2 + |v|^2)$ при $|u| + |v| \to 0$. Тому функція $f(t, x, u, v)$ задовольняє умови

$$f(t,x,0,0) = 0, |f(t,x,u,v) - f(t,x,u',v')| \le \\ \le \nu \left(|u-u'|^2 + |v-v'|^2\right)^{1/2}, \qquad (3)$$

де $|u| \le \rho,\ |u'| \le \rho,\ |v| \le \rho,\ |v'| \le \rho$, $|u|^2 = u_1^1 + \ldots + u_n^2$, причому стала Ліпшиця ν може бути зроблена як завгодно малою при зменшенні ρ. Функцію $f(t, x, u, v)$ можна довизначити поза областю $\{\{u, v\} \subset \mathbb{R}^n |\ \ |u| \le \rho,\ |v| \le \rho\}$ так, щоб умови (3) виконувалися у всьому просторі. Нехай матриця $L^{-1}(\varepsilon)D(t)$ додатно визначена.

Поряд з (1) розглянемо лінійну систему

$$L(\varepsilon)\partial_t u = D(t)\partial_x^2 u + A(t)u + B(t)u_\Delta. \qquad (4)$$

Розв'язок задачі (4), (2) шукатимемо у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(-ikx), \qquad (5)$$

де $y_{-k}(t) = \bar{y}_k(t)$. Підставляючи (5) в (4) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$L(\varepsilon)dy_k/dt = M_k(t)y_k(t), k = 0, \pm 1, \ldots\ , \qquad (6)$$

де $M_k(t) = -k^2 D(t) + A(t) + B(t)\exp(ik\Delta)$. Позначимо

$$y_k = \begin{bmatrix} v_k \\ u_k \end{bmatrix},\ D(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_3(t) & D_4(t) \end{bmatrix}, A(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ B_3(t) & B_4(t) \end{bmatrix},$$

де $v_k \in \mathbb{R}^m$, $u_k \in \mathbb{R}^p$, матриці $D_1,\ A_1,\ B_1$ мають розмірність $m \times m$, матриці $D_2,\ A_2,\ B_2$ – розмірність $m \times p$, матриці $D_3,\ A_3,\ B_3$ – розмірність $p \times m$, матриці $D_4,\ A_4,\ B_4$ – розмірність $p \times p$. Тоді систему (6) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} dv_k/dt &= M_{k1}(t)v_k + M_{k2}(t)u_k, \\ \varepsilon du_k/dt &= M_{k3}(t)v_k + M_{k4}(t)u_k, \end{aligned} \qquad (7)$$

де $M_{kq} = -k^2 D_q(t) + A_q(t) + B_q(t)\exp(ik\Delta),\ q = 1, 2, 3, 4.$

Лема 1. *Нехай виконується умова*

1) Всі корені характеристичного рівняння $\det(M_{k4}(t) - \lambda E) = 0$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, *лежать у півплощині* $Re\lambda < 0$.

Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *існує інтегральний многовид системи (7), який можна зобразити у вигляді* $u_k = h(t, \varepsilon)v_k$, *де* $h(t, \varepsilon) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + O(\varepsilon^2)$, $h_0(t) = -M_{k4}^{-1}(t)M_{k3}(t)$, $h_1(t) = M_{k4}^{-1}[dh_0/dt + h_0 M_{k1}(t) + h_0 M_{k2}(t)h_0]$.

Доведення. Існування інтегрального многовиду доводиться так, як в [1]. Матриця-функція h задовольняє диференціальне рівняння Ріккаті

$$\varepsilon dh/dt + \varepsilon h M_{k1}(t) + \varepsilon h M_{k2}(t)h = \\ = M_{k3}(t) + M_{k4}(t)h. \qquad (8)$$

Розв'язок рівняння (8) можна шукати у вигляді ряду $h(t, \varepsilon) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \ldots$, звідки знаходяться функції $h_0(t)$ та $h_1(t)$.

Лема доведена.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді ряду (5). Підставляючи (5) в (1) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$L_1(\varepsilon)dy/dt = M(t)y + F(t, y), \qquad (9)$$

де $y = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots)^T$, $L_1(\varepsilon)$ та $M(t)$ – нескінченні блочно-діагональні матриці з блоками $L(\varepsilon)$ та $M_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, відповідно; $F(t, y) = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots)^T$ – нелінійна функція, причому f_k є коефіцієнтами при $\exp(-ikx)$ розкладу функції $f(t, x, u, u_\Delta)$ в ряд Фур'є.

Доведемо, що функція $F(t, y)$ задовольняє умову Ліпшиця по y. Введемо в просторі послідовностей норму $|y| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2\right)^{1/2}$. Розглянемо інший вектор $z = (z_0, z_1, z_{-1}, \ldots)^T$ коефіцієнтів Фур'є розв'язку $v(t, x)$ рівняння (1) і відповідний йому вектор $F(t, z) = (g_0, g_1, g_{-1}, \ldots)^T$. Використовуючи рівність Парсеваля, одержимо

$$|F(t, y) - F(t, z)| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k - g_k|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t, x, u, u_\Delta) - \right.$$

$$\left. - f(t, x, v, v_\Delta)|^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \nu \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|u - v|^2 + |u_\Delta - v_\Delta|^2\right) dx\right)^{1/2} =$$

$$= \nu \left(2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k - z_k|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}\nu |y - z|.$$

Отже, функція F задовольняє умову Ліпшиця із сталою $\sqrt{2}\nu$.

Перепишемо систему (9) у вигляді системи рівнянь

$$L(\varepsilon)dy_k/dt = M_k(t)y_k + f_k(t, y)$$

або у вигляді

$$dv_k/dt = M_{k1}(t)v_k + M_{k2}(t)u_k + \\ + V_k(t, v, u), \quad \varepsilon du_k/dt = \qquad (10) \\ = M_{k3}(t)v_k + M_{k4}(t)u_k + U_k(t, v, u),$$

де $y_k = (v_k, u_k)^T$, $f_k = (V_k, U_k)^T$.

Розглянемо систему рівнянь

$$M_{k3}(t)v_k + M_{k4}(t)u_k + U_k(t, v, u) = 0. \qquad (11)$$

За теоремою про неявну функцію в деякому околі початку координат існує розв'язок $u = \varphi(t, v)$ системи (11); функція $\varphi(t, v)$ п'ять раз неперервно диференційовна за всіма аргументами, причому $\varphi(t, 0) = 0$.

Для дослідження біфуркації стану рівноваги системи (10) побудуємо відповідне рівняння на многовиді з точністю до членів порядку $O(\varepsilon)$ в лінійній частині і $O(1)$ в нелінійній частині. Тоді одержимо систему рівнянь

$$dv_k/dt = P_k(t, \varepsilon)v_k + V_k(t, v, \varphi(t, v)), \qquad (12)$$

де $P_k(t, \varepsilon) = M_{k1}(t) + M_{k2}(t)h_0(t) + \varepsilon M_{k2}(t)h_1(t)$.

Розглянемо відповідну лінійну систему

$$dv_k/dt = P_k(t,\varepsilon)v_k. \tag{13}$$

Використовуючи нерівність Важевського, оцінимо розв'язок $v_k(t)$ системи (13):

$$|v_k(t)| \le |v_k(t_0)| \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda_k(t_1)dt_1, \tag{14}$$

де $\Lambda_k(t)$ – найбільший характеристичний корінь матриці $\frac{1}{2}[P_k(t,\varepsilon) + P_k^*(t,\varepsilon)]$. Нехай для всіх x, що належать одиничній сфері $|x| = 1$, $x \in \mathbb{R}^m$, виконуються нерівності $(Dy,y) \ge \mu > 0$, $(Ay + A^T y, y) \le 2a$, $(B\exp(ik\Delta)y + B^T \exp(-ik\Delta)y, y) \le 2b$, $\frac{1}{2}(M_{k2}h_1x + (M_{k2}h_1)^T x, x) \le k^2\mu_0 + a_0 + b_0$, де $y = (x, -M_{k4}^{-1}M_{k3}x)^T$. Тоді

$$\frac{1}{2}\max(M_k(t)y + M_k^*(t)y, y) \le -k^2\mu + a + b.$$

Враховуючи співвідношення $(P_k(t,0)x + P_k^*(t,0)x, x) = (M_k(t)y + M_k^*(t)y, y)$, одержуємо

$$\Lambda_k(t) = \frac{1}{2}\max_{|x|=1}(P_k(t,\varepsilon)x + P_k^*(t,\varepsilon)x, x) \le$$

$$\le -k^2(\mu - \varepsilon\mu_0) + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{k\to 0} \Lambda_k(t) = -\infty$.

Система (13) є системою лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Згідно з теоремою Флоке існує невироджена матриця $H_k(t,\varepsilon)$, $H_k(t + 2\pi, \varepsilon) = H_k(t,\varepsilon)$, така, що заміна $v_k = H_k(t,\varepsilon)z_k$ зводить систему (13) до вигляду

$$dz_k/dt = C_k(\varepsilon)z_k,$$

де $C_{-k}(\varepsilon) = \bar{C}_k(\varepsilon)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Припустимо, що характеристичне рівняння $\det(C_k(\varepsilon) - \lambda E) = 0$ при деяких значеннях $k = \pm k_1$ має пару коренів $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, а решта коренів задовольняють умову $|Re\lambda| > \gamma + \delta$, $\gamma > \delta > 0$. Для всіх цілих k, крім скінченного числа, виконується нерівність $k^2 \ge (\gamma + \delta + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0)/(\mu - \varepsilon\mu_0)$. Тоді $-k^2(\mu - \varepsilon\mu_0) + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0 \le -(\gamma + \delta)$, $\Lambda_k(t) \le -(\gamma+\delta)$ і з нерівності (14) випливає оцінка

$$|v_k(t)| \le |v_k(t_0)| \exp[-(\gamma + \delta)(t - t_0)], \tag{15}$$

де $t \ge t_0$.

Перепишемо систему (12) у вигляді

$$\begin{aligned} dY_1/dt &= N_1(t,\varepsilon)Y_1 + F_1(t,v), \\ dY_2/dt &= N_2(t,\varepsilon)Y_2 + F_2(t,v), \end{aligned} \tag{16}$$

де $v = (Y_1, Y_2)^T$, $Y_1 = (v_0, v_1, v_{-1}, \ldots, v_{k_0}, v_{-k_0})^T$, $Y_2 = (v_{k_0+1}, v_{-k_0-1}, \ldots)^T$, $N_1(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(P_0, P_1, P_{-1}, \ldots, P_{k_0}, P_{-k_0})$, $N_2(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(P_{k_0+1}, P_{-k_0-1}, \ldots)$, $F_1(t,\varepsilon) = (V_0, V_1, V_{-1}, \ldots, V_{k_0}, V_{-k_0})^T$, $F_2(t,\varepsilon) = (V_{k_0+1}, V_{-k_0-1}, \ldots)^T$, $k_0 = [\sqrt{(\gamma + \delta + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0)/(\mu - \varepsilon\mu_0)}]$. Матрицю $C(\varepsilon) = \mathrm{diag}(C_0, C_1, C_{-1}, \ldots, C_{k_0}, C_{-k_0})$ зведемо до вигляду $C(\varepsilon) = T(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon)$, де $\Gamma(\varepsilon) = \mathrm{diag}(A_1(\varepsilon), \Gamma_1(\varepsilon))$, $A_1(\varepsilon) = \mathrm{diag}(A_3(\varepsilon), A_4(\varepsilon))$, власні значення матриці $A_3(\varepsilon)$ задовольняють умову $Re\lambda > \gamma + \delta$, $A_4(\varepsilon)$ – діагональна матриця з числами $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ по діагоналі, а власні значення матриці $\Gamma_1(\varepsilon)$ задовольняють умову $Re\lambda < -\gamma - \delta$. Таке перетворення можна одержати шляхом зведення матриці $C(\varepsilon)$ до жорданової нормальної форми. В системі (16) зробимо заміну $Y_1(t) = H(t,\varepsilon)T(\varepsilon)Y_3(t)$, де $H(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(H_0, H_1, H_{-1}, \ldots, H_{k_0}, H_{-k_0})$. Тоді одержимо систему

$$dY_3/dt = \Gamma(\varepsilon)Y_3 + T^{-1}(\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)F_1(t,v),$$

$$dY_2/dt = N_2(t,\varepsilon)Y_2 + F_2(t,v). \tag{17}$$

Оскільки матриця $\Gamma(\varepsilon)$ є блочно-діагональною, то систему (17) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} dw_1/dt &= A_1(\varepsilon)w_1 + G_1(t,w,\varepsilon), \\ dw_2/dt &= A_2(t,\varepsilon)w_2 + G_2(t,w,\varepsilon), \end{aligned} \tag{18}$$

де $A_2(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\Gamma_1(\varepsilon), N_2(t,\varepsilon))$, $Y_3 = (w_1, Y_4)^T$, $w_2 = (Y_4, Y_2)^T$,$w_1 \in \mathbb{R}^{l+2}$, $w =$

(w_1, w_2), w_2 належить деякому банаховому простору $\mathbb{M}$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці $\Gamma_1(\varepsilon)$ справджується оцінка $|\exp[\Gamma_1(\varepsilon)t]| \le N\exp[-(\gamma+\delta)t], t \ge 0, N > 1$. Тоді для фундаментальної матриці $K(t,s)$ системи $dw_2/dt = A_2(t,\varepsilon)w_2$ з нерівності (15) випливає оцінка

$$|K(t,s)| \le N\exp[-(\gamma+\delta)(t-s)], t \ge s. \quad (19)$$

Аналогічно можна одержати оцінку

$$|\exp[A_1(\varepsilon)t]| \le N\exp[(-\gamma+\delta)t], t \le 0. \quad (20)$$

Оскільки вектор-функція F та функції V_k задовольняють умову Ліпшиця і $F(t,0) = 0$, $V_k(t, 0, \varphi(t,0)) = 0$, то

$$G_1(t,0,\varepsilon) = G_2(t,0,\varepsilon) = 0,$$

$$(|G_1(t,w,\varepsilon) - G_1(t,v,\varepsilon)|^2 + \quad (21)$$

$$+|G_2(t,w,\varepsilon) - G_2(t,v,\varepsilon)|^2)^{1/2} \le \nu_1|w-v|.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (19) – (21). Тоді при*

$$\nu_1 < \frac{\delta}{N(1+2N)} \quad (22)$$

існує функція $w_2 = h(t,w_1,\varepsilon)$, що визначена на $\mathbb{R}^{l+4}$, задовольняє умови $h(t,0,\varepsilon) = 0$, $|h(t,w_1,\varepsilon) - h(t,w_1',\varepsilon)| \le \frac{1}{2}|w_1 - w_1'|$ і така, що множина $S^- = \{(t,w_1,w_2)|\ t \in \mathbb{R},\ w_1 \in \mathbb{R}^{l+2},\ w_2 = h(t,w_1,\varepsilon),\ w_2 \in \mathbb{M}\}$ є інтегральним многовидом системи (18). Для кожного розв'язку $w(t) = (w_1(t), h(t,w_1(t),\varepsilon))$ системи (18), який належить S^-, виконується оцінка

$$|w(t)| \le 2N|w_1(\sigma)|\exp[\gamma(\sigma-t)], \quad t \le \sigma.$$

Теорема доводиться аналогічно доведенню теореми 1 з [2].

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (19) – (22). Тоді існує функція $w_1 = g(t,w_2,\varepsilon)$, яка визначена на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}$, задовольняє умови $g(t,0,\varepsilon) = 0$, $|g(t,w,\varepsilon) - g(t,w',\varepsilon)| \le \frac{1}{2}|w - w'|$ і така, що множина $S^+ = \{(t,w_1,w_2)|\ t \in \mathbb{R},\ w_2 \in \mathbb{M},\ w_1 = g(t,w_2,\varepsilon),\ w_1 \in \mathbb{R}^{l+2}\}$ є інтегральним многовидом системи (18). Для кожного розв'язку $w(t) = (g(t,w_2(t),\varepsilon), w_2(t))$ системи (18), що належить S^+, виконується оцінка $|w(t)| \le 2N|w_2(\sigma)|\exp[\gamma(\sigma-t)],\ t \ge \sigma$.*

Доведення теореми 2 можна провести тим же шляхом, що і доведення теореми 1.

Доведемо, що інтегральна множина S^- стійка в тому розумінні, що вона притягує до себе всі близькі розв'язки $w(t)$ $(t \ge \sigma)$ за експоненціальним законом. Зауважимо, що поведінка розв'язків системи (18) на інтегральному многовиді S^- описується рівнянням

$$dz/dt = A_1(\varepsilon)z + G_1(t,z,h(t,z,\varepsilon),\varepsilon). \quad (23)$$

Теорема 3. *Нехай $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ – довільний розв'язок системи (18) з початковою умовою $w(\sigma)$ при $t = \sigma$. За умови (22) існує розв'язок $\xi(t) = (z(t), h(t,z(t),\varepsilon))$, який належить S^- і такий, що правильна оцінка $|w(t) - \xi(t)| \le 2N|w_2(\sigma) - h(\sigma,z(\sigma),\varepsilon)|\exp[\gamma(\sigma-t)],\ t \ge \sigma$.*

Теорема доводиться аналогічно доведенню теореми 5 з [2].

Систему (23) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} dw_3/dt &= A_3(\varepsilon)w_3 + \\ &+G_3(t,w_3,w_4,h(t,w_3,w_4,\varepsilon),\varepsilon), \\ dw_4/dt &= A_4(\varepsilon)w_4 + \\ &+G_4(t,w_3,w_4,h(t,w_3,w_4,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned} \quad (24)$$

де $z = (w_3, w_4)$, $G_1 = (G_3, G_4)$. Згідно з припущенням відносно власних значень матриць $A_3(\varepsilon)$ та $A_4(\varepsilon)$ правильні оцінки

$$\begin{aligned} |\exp[A_3(\varepsilon)t]| &\le N\exp[(\gamma-\delta)t], t \ge 0, \\ |\exp[A_4(\varepsilon)t]| &\le N\exp[(\gamma+\delta)t], t \le 0. \end{aligned} \quad (25)$$

За умови (22) згідно з [3, с.42] існує інтегральний многовид S_1^+ системи (24), який можна подати у вигляді $w_3 = r(t,w_4,\varepsilon)$. При цьому функція $r(t,w,\varepsilon)$ задовольняє умови $r(t,0,\varepsilon) = 0$, $|r(t,w,\varepsilon) - r(t,v,\varepsilon)| \le \frac{1}{2}|w -$

$v|$, $w \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$. Звідси випливає існування центрального многовиду. Покладемо $r_1(t,w,\varepsilon) = h(t, r(t,w,\varepsilon), w, \varepsilon)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються оцінки (19) – (22), (25). Тоді існує центральний многовид* $S = \{(t, w_3, w_4, w_2)|\ t \in \mathbb{R},\ w_4 \in \mathbb{R}^2,\ w_3 = r(t, w_4, \varepsilon),\ w_3 \in \mathbb{R}^l,\ w_2 = r_1(t, w_4, \varepsilon),\ w_2 \in \mathbb{M}\}$ *системи (18).*

Рівняння на многовиді S має вигляд

$$dw_4/dt = A_4(\varepsilon)w_4 + \tag{26}$$
$$+G_4(t, r(t, w_4, \varepsilon), w_4, r_1(t, w_4, \varepsilon), \varepsilon).$$

Систему (26) перепишемо у вигляді

$$dx/dt = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)]x + X(t, x, \bar{x}, \varepsilon),$$
$$d\bar{x}/dt = [\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon)]\bar{x} + \bar{X}(t, x, \bar{x}, \varepsilon), \tag{27}$$

де x – комплексна змінна, $X(t+2\pi, x, \bar{x}, \varepsilon) = X(t, x, \bar{x}, \varepsilon)$, $X(t, x, \bar{x}, \varepsilon) = O(|x|^2)$ при $|x| \to 0$.

Нехай відсутній сильний резонанс, тобто для всіх цілих m_1, m_2, $0 < m_2 < 6$, виконується нерівність $m_2\beta(0) + m_1 \neq 0$. Тоді перше рівняння системи (27) перетворимо за допомогою підстановки

$$x = p + W_2(t, p, \bar{p}, \varepsilon) +$$
$$+W_3(t, p, \bar{p}, \varepsilon) + W_4(t, p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{28}$$

де W_2, W_3, W_4 – форми відповідно другого, третього і четвертого порядків з періодичними коефіцієнтами. Перетворення (28) можна підібрати так, що рівняння для p набуде вигляду [4, c.1542]

$$dp/dt = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)]p + [\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon)]p^2\bar{p} +$$
$$+P(t, p, \bar{p}, \varepsilon),$$

де $P(t + 2\pi, p, \bar{p}, \varepsilon) = P(t, p, \bar{p}, \varepsilon)$, $P(t, p, \bar{p}, \varepsilon) = O(|p|^5)$ при $|p| \to 0$. Перейдемо до полярних координат, поклавши $p = r\exp(i\varphi)$. Тоді одержимо дійсну систему

$$d\varphi/dt = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(t, r, \varphi, \varepsilon), \tag{29}$$
$$dr/dt = \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(t, r, \varphi, \varepsilon),$$

де $R(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^5)$, $\Phi(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$ при $|r| \to 0$.

Нехай $\gamma(0) < 0$. Тоді з [4,5] випливає, що при досить малому ε система (29) має інваріантний тор $S_\varepsilon = \{(t, \varphi, r)|\ t \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathbb{R},\ r = S(t, \varphi, \varepsilon)\}$. При цьому $S(t + 2\pi, \varphi, \varepsilon) = S(t, \varphi, \varepsilon)$, $S(t, \varphi + 2\pi, \varepsilon) = S(t, \varphi, \varepsilon)$ і справджується рівність

$$S(t, \varphi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon N} + O(\varepsilon), \quad N = -\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)}.$$

Звідси випливає існування інваріантного тора системи (1).

Отже, одержуємо наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай виконується умова 1 та умови (19) – (22), (25); характеристичне рівняння* $\det(C_k(\varepsilon) - \lambda E) = 0$ *при деяких значеннях* $k = \pm k_1$ *має пару коренів* $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, *а решта коренів задовольняють умову* $|Re\lambda| > \gamma + \delta$, $\gamma > \delta > 0$*; відсутній сильний резонанс,* $\gamma(0) < 0$. *Тоді при досить малому* ε *існує інваріантний тор системи (1).*

Інваріантний тор буде умовно стійким. Нехай $l = 0$ і виконуються умови теореми 5. Тоді інваріантний тор системи (29) буде стійким, тому із теореми 3 випливає стійкість інваріантного тора системи (1).

Зауваження 1. *Аналогічно [6] можна довести, що за умови* $\beta'(0) - \delta(0)\alpha'(0)/\gamma(0) \neq 0$ *значення* $\varepsilon = 0$ *є точкою субфуркації періодичних розв'язків системи (1).*

Зауваження 2. *Результати цієї роботи можна узагальнити на системи вигляду*

$$L(\varepsilon)\partial_t u = \sum_{k=1}^{q} D_k(t)\partial^2_{x_k} u + A(t)u +$$
$$+B(t)u_\Delta + f(t, x, u, u_\Delta),$$

$x = (x_1, ..., x_q)$, $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_q)$ *з періодичними умовами* $u(t, x_1, ..., x_k + 2\pi, ..., x_q) = u(t, x_1, ..., x_q)$, $k = 1, ..., q$.

Зауваження 3. *У працях [7,8] досліджені релаксаційні коливання в сингулярно збурених параболічних системах та біфурка-*

ція народження циклу автономного параболічного рівняння з перетвореним аргументом та малою дифузією.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Задирака К. В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы// Укр. мат. журн.– 1965.–**17**, N1.–С.47–63.

2. *Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений// Укр. мат. журн.– 1982.–**34**, N3.– С.334–340.

3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1977.– 304 с.

4. *Бибиков Ю. Н.* Бифуркация типа Хопфа для квазипериодических движений// Дифференц. уравнения.– 1980.–**16**, N9.– С.1539-1544.

5. *Самойленко А.М., Полеся И.В.* Рождение инвариантных множеств в окрестности положения равновесия//Дифференц. уравнения.–1975.–**11**, N8.–С.1409–1415.

6. *Клевчук І. І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням// Укр. мат. журн.– 1995.– **47**, N8.– С.1022–1028.

7. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах.— М.: Изд. фирма "Физ.-мат. литература", 1995.— 336с.

8. *Кащенко С.А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах//Журн. вычисл. мат. и мат. физ.– 1991.– **31**, N3.–С.467–473.