УДК 517.977.1

©1999 р. М.Ф. Кириченко*, Ф.О. Сопронюк, Є.М. Тимофієва

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці
*Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова, Київ

КЕРОВНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З РОЗГАЛУЖЕННЯМ СТРУКТУР

Знайдені необхідні та достатні умови керовності для систем з розгалуженням структур. Сформульовано алгебраїчні критерії керовності для нестаціонарних лінійних систем керування зі сталими матрицями. Вони узагальнюють критерій Калмана для стаціонарних систем. Достатні умови керовності нестаціонарних лінійних систем керування з аналітичними матрицями були сформульовані М.Красовським. У даній роботі доведено, що вони є необхідними.

The necessary and sufficient conditions of controllability for systems with variable structures are found. The algebraic criteria of controllability for nonstationary linear control systems with lump-constant matricies are formulated. They generalize Kalman's criteria for stationary systems. The sufficient conditions for controllability of nonstationary linear control systems with analytic matrices were found by N. Krasovsky. In this paper these conditions are proved to be necessary.

Постановка задачі. Нехай $T_0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T_1$ — деяке розбиття відрізка $[T_0, T_1]$, яке в подальшому позначатимемо $\{t_j, 0 \le j \le N\}$, $X_1, X_2, ..., X_N$ — фазові простори відповідно розмірів $n_1, n_2, ..., n_N$, а рух об'єкта керування описується системою

$$\frac{dx_{(j)}(t)}{dt} = A_j(t)x_{(j)}(t) + B_j(t)u_{(j)}(t), \qquad (1)$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j),$$

$$x_{(j)}(t_{j-1}) = C_j x_{(j-1)}(t_{j-1}) + D_j \nu_{(j)}, \quad j = \overline{1, N}, \qquad (2)$$

де $x_{(j)}(t)$ — n_j-вимірний вектор-стовпець станів системи на проміжку $[t_{j-1}, t_j), u_{(j)}(t)$ — m_j-вимірна вектор-функція керування, $\nu_{(j)}$ — r_j-вимірний вектор параметрів керування в переключенні структур, $A_j(t), B_j(t), C_j, D_j$ — відомі матриці відповідно розмірів $n_j \times m_j, n_j \times m_j, n_j \times n_{j-1}, n_j \times r_j$ $(j = \overline{1, N})$, причому $C_1 = E_1$, де E_1 — одинична матриця порядку n_1, D_1 — нульова матриця.

Означення 1. *Система (1), (2) із заданим розбиттям називається керовною на проміжку $[T_0, T_1]$, якщо для довільних точок $x_{(0)} \in X_1$ і $x_{(1)} \in X_N$ фазових просторів X_1, X_N розмірів n_1, n_N відповідно існують такі функції керувань $u_{(j)}(t), t \in [t_{j-1}, t_j)$, і вектори параметрів керувань у переключенні структур $\nu_{(j)}$, $j = \overline{1, N}$, при яких розв'язок (1), (2) задовольняє умови $x(T_0) = x_{(0)}, x(T_1) = x_{(1)}$.*

Нехай $X_j(t, \tau)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків лінійної однорідної системи

$$\frac{dX_j(t, \tau)}{dt} = A_j(t)X_j(t, \tau), \; t, \tau \in [t_{j-1}, t_j),$$

$$X_j(\tau, \tau) = E_j,$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j = \overline{1, N}$.

Введемо позначення

$$W_{jk}(t, \tau) = X_j(t, t_{j-1})C_j X_{j-1}(t_{j-1}, t_{j-2}) \times$$

$$\times C_{j-1} ... X_{k+1}(t_{k+1}, t_k)C_{k+1}X_k(t_k, \tau)B_k(\tau),$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j), \; \tau \in [t_{k-1}, t_k), \; 1 \le k \le j, \qquad (3)$$

$$W_{jk}(t) = X_j(t, t_{j-1})C_j X_{j-1}(t_{j-1}, t_{j-2}) \times$$

$$\times C_{j-1} ... X_{k+1}(t_{k+1}, t_k)C_{k+1}X_k(t_k, t_{k-1})D_k,$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j), \; 1 \le k \le j, \; j = \overline{1, N}. \qquad (4)$$

Розв'язок (1), (2), який задовольняє початкову умову $x(T_0) = x_{(0)}$, запишемо у вигляді

$$x_{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{j-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{jk}(t,\tau) u_{(k)} d\tau +$$

$$+ \int_{t_{j-1}}^{t} W_{jj}(t,\tau) u_{(j)}(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{j} W_{jk}(t) \nu_{(k)} +$$

$$+ X_{(j)}(t, t_{j-1}) C_j ... X_1(t, t_0) C_1 x_{(0)},\ t \in [t_{j-1}, t_j).$$

Теорема 1. *Для того щоб система (1), (2) була керовною на відрізку $[T_0, T_1]$ із заданим розбиттям, необхідно і досить існування такого $1 \le k_0 \le N$, що*

$$l^T W_{Nk_0}(t_N, t) \ne 0,\ t \in [t_{k_0-1}, t_{k_0}),$$

$$l^T W_{Nk_0}(t_N) \ne 0 \tag{5}$$

для довільного n_N-вимірного вектора $l \ne 0$.

Доведення. Доведення проведемо за схемою, запропонованою в [1,2].

Достатність. Нехай умова (5) виконується. Виберемо

$$u_{(k)}(t) = W_{Nk}^T(t_N, t) l,\ t \in [t_{k-1}, t_k),$$

$$\nu_{(k)} = W_{Nk}^T(t_N) l.$$

Тоді

$$x_{(1)} - X_N(t_N, t_{N-1}) \times$$

$$\times C_N ... X_2(t_2, t_1) C_2 X_1(t_1, t_0) x_{(0)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N, \tau) W_{Nk}^T(t_N, \tau) d\tau +$$

$$+ W_{Nk}(t_N) W_{Nk}^T(t_N) \Bigg) l. \tag{6}$$

Якщо матриця

$$W = \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N, \tau) W_{Nk}^T(t_N, \tau) d\tau +$$

$$+ W_{Nk}(t_N) W_{Nk}^T(t_N) \Bigg)$$

неособлива, тобто $\det W \ne 0$, то з системи лінійних рівнянь (6) відносно невідомих компонент вектора l можна однозначно визначити l. Доведемо, що $\det W \ne 0$. Для цього розглянемо вектор $L^T = (l^T, l^T, ..., l^T)$, де компоненти вектора l повторюються $2N$ разів, і матрицю

$$Q = \mathrm{diag}\,(W_{N1}(t_N, \tau), W_{N2}(t_N, \tau), ...,$$

$$W_{NN}(t_N, \tau), W_{N1}(t_N), ..., W_{NN}(t_N)).$$

Тоді на підставі умови (5) маємо $\|L^T Q\|^2 > 0$, тобто $\|L^T Q\|^2 = l^T W l^T > 0$. Отже, W — додатно визначена матриця, а з умов Сільвестра випливає, що $\det W > 0$. Тому

$$l_0 = W^{-1} C, \tag{7}$$

де $C = x_{(1)} - X_N(t_N, t_{N-1}) C_N ... X_2(t_2, t_1)$ $C_2 X_1(t_1, t_0) x_{(0)}$.

Враховуючи вигляд $u_{(k)}(\tau), \nu_{(k)}$ і (7), маємо

$$u_{(k)}^0(t) = W_{Nk}^T(t_N, t) W^{-1} C,\ t \in [t_{k-1}, t_k),$$

$$\nu_{(k)}^0 = W_{Nk}^T(t_N) W^{-1} C,\ k = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Необхідність. Нехай система (1), (2) цілком керовна, але умова (5) не виконується. Це рівносильно твердженню: існує такий вектор $l \ne 0$, що

$$l^T W_{Nk}(t_N, t) \equiv 0,\ t \in [t_{k-1}, t_k) \text{ і } l^T W_{Nk}(t_N) = 0 \tag{9}$$

для всіх $k = \overline{1, N}$.

На підставі припущення про керовність системи можна вибрати функції $u_{(k)}(t)$ та параметри керувань у переключенні структур $\nu_{(k)}$ так, щоб $x(T_0) = x_{(0)}, x(T_1) = x_{(1)}$ для траєкторії системи (1), (2).

Виберемо $x_{(0)} \in X_1$ та $x_{(1)} \in X_N$ такими, щоб виконувалась нерівність

$$l^T (x_{(1)} - X_N(t_N, t_{N-1}) \times$$

$$\times C_N ... X_2(t_2, t_1) C_2 X_1(t_1, t_0) x_{(0)}) \ne 0.$$

Для вибраних $x_{(0)}$ і $x_{(1)}$ маємо

$$\sum_{k=1}^{N} \Bigg(\int_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N, \tau) u_{(k)}(\tau) d\tau +$$

$$+W_{Nk}(t_N)\nu_k\Big) = x_{(1)}-$$

$$-X_N(t_N,t_{N-1})C_N...X_2(t_2,t_1)C_2X_1(t_1,t_0)x_{(0)}.$$

Тоді, з одного боку,

$$l^T\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N,\tau)u_{(k)}(\tau)d\tau+$$

$$+W_{Nk}(t_N)\nu_k\Big) = l^T\Big(x_{(1)} - X_N(t_N,t_{N-1})\times$$

$$\times C_N...X_2(t_2,t_1)C_2X_1(t_1,t_0)x_{(0)}\Big) \neq 0,$$

а з другого — на підставі (9) маємо, що ліва частина останнього співвідношення дорівнює нулеві. Отримане протиріччя завершує доведення необхідності. Теорема 1 доведена.

З доведення теореми 1 випливає, що для системи (1), (2) існує не єдиний набір функцій $u_{(k)}(t)$ і параметрів $\nu_{(k)}$, які забезпечують виконання заданих крайових умов. Це підтверджує, наприклад, рівність

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N,\tau)u_{(k)}(\tau)d\tau+$$

$$+W_{Nk}(t_N)\nu_k\Big) = x_{(1)}-$$

$$-X_N(t_N,t_{N-1})C_N...X_2(t_2,t_1)C_2X_1(t_1,t_0)x_{(0)}.$$

Покажемо, що серед усіх цих наборів $u_{(k)}(t), \nu_{(k)}$, $k=\overline{1,N}$, функції $u^0_{(k)}(t)$ і параметри $\nu^0_{(k)}$, які визначаються співвідношеннями (8), є оптимальними в тому розумінні, що

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_k(\tau)\|^2 d\tau + \|\nu_k\|^2\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u^0_{(k)}(\tau)\|^2 d\tau + \|\nu^0_{(k)}\|^2\Big). \qquad (10)$$

Скористаємось тотожностями

$$\|u_k(\tau)\|^2 - 2(u^0_{(k)}(\tau))^T[u_{(k)}(t) - u^0_{(k)}(t)] =$$

$$= \|u^0_{(k)}(\tau)\|^2 + \|u_{(k)}(t) - u^0_{(k)}(t)\|^2,$$

$$\|\nu_k\|^2 - 2(\nu^0_{(k)})^T[\nu_{(k)} - \nu^0_{(k)}] =$$

$$= \|\nu^0_{(k)}\|^2 + \|\nu_{(k)} - \nu^0_{(k)}\|^2,$$

де

$$\|u_{(k)}(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{m_k} u^2_{(k)j} = u^T_{(k)}(t)u_k(t),$$

$$\|\nu_{(k)}(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{r_k} \nu^2_{(k)} = \nu^T_{(k)}\nu_{(k)}.$$

Враховуючи рівність

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (u^0_k(\tau))^T[u_k(\tau) - u^0_{(k)}(\tau)]d\tau+$$

$$+(\nu^0_{(k)})^T[\nu_{(k)} - \nu^0_{(k)}]\Big) =$$

$$= l^{0T}\Big(\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N,\tau)[u_k(\tau) - u^0_{(k)}(\tau)]d\tau+$$

$$+W_{Nk}(t_N)[\nu_{(k)} - \nu^0_{(k)}]\Big)\Big) =$$

$$= l^{0T}\Big(\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N,\tau)u_k(\tau)d\tau+$$

$$+W_{Nk}(t_N)\nu_{(k)}\Big) - \sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_{Nk}(t_N,\tau)u^0_k(\tau)d\tau+$$

$$+W_{Nk}(t_N)\nu^0_{(k)}\Big)\Big) = l^{0T}(C-C) = 0,$$

отримуємо

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_k(\tau)\|^2 d\tau + \|\nu_k\|^2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u^0_{(k)}(\tau)\|^2 d\tau + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_k(\tau) -$$

$$-u^0_{(k)}(\tau)\|^2 d\tau + \|\nu^0_k\|^2 + \|\nu_{(k)} - \nu^0_{(k)}\|^2\Big).$$

Звідси випливає правильність нерівності (10).

Необхідні й достатні умови (5) керовності системи (1), (2) виражаються через функції $W_{Nk}(t_N,\tau)$ і $W_{Nk}(t_N)$, які потрібно обчислювати для різних значень $\tau \in [t_{k-1},t_k)$, $k=\overline{1,N}$. Тому практично використовувати їх дуже важко. Важливо отримати умови керовності, які виражаються безпосередньо через матриці $A_j(t), B_j(t), C_j$ і D_j, $j=\overline{1,N}$. Розглянемо випадок, коли на проміжку $[t_{j-1},t_j)$ система стаціонарна. Тобто розглянемо систему

$$\frac{dx_{(j)}(t)}{dt} = A_j x_{(j)}(t) + B_j u_{(j)}(t),\ t\in[t_{j-1},t_j), \tag{11}$$

з умовами керованого переключення структур

$$x_{(j)}(t_{j-1}) = C_j x_{(j-1)}(t_{j-1}-0) + D_j\nu_{(j)},\ j=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Запровадимо позначення

$$S_j(B) = (B, A_jB, ..., A_j^{n_j-1}B),$$

$$S_{n_N}(B) = (\exp(A_N(t_N-t_{N-1}))D_N, ...,$$

$$\exp(A_N(t_N-t_{N-1}))C_N ... \exp(A_3(t_3-t_2))\times$$

$$\times C_3\exp(A_2(t_2-t_1))D_2, S_N(B_N),$$

$$\exp(A_N(t_N-t_{N-1}))C_N S_{N-1}(B_{N-1}), ...,$$

$$\exp(A_N(t_N-t_{N-1}))C_N ... \exp(A_3(t_3-t_2))\times$$

$$\times C_3\exp(A_2(t_2-t_1))C_2S_1(B_1)).$$

Подальша теорема є результатом, який узагальнює критерій керовності для систем з кусково-сталими параметрами.

Теорема 2. *Для того щоб система (11), (12) була цілком керовною на проміжку $[T_0,T_1]$ із заданим розбиттям, необхідно і досить виконання умови*

$$\operatorname{rank} S_{n_N} = n_N. \tag{13}$$

Доведення. *Достатність.* Потрібно довести, що при виконанні умови (13) система (11), (12) цілком керовна на $[T_0,T_1]$ з розбиттям $\{t_j,\ 0\le j\le N\}$. Тобто потрібно довести, що якщо ранг матриці S_{n_N} дорівнює n_N, то не існує такого сталого вектора $l\neq 0$, для якого виконуються умови

$$l^T W_{Nk}(t_N,\tau) = 0,\ \tau\in[t_{k-1},t_k), \tag{14}$$

$$l^T W_{Nk}(t_N) = 0,\ k=\overline{1,N}, \tag{15}$$

де $W_{Nk}(t_N,\tau), W_{Nk}(t_N)$ мають вигляд (3), (4) відповідно при $j=N$, $t=t_N$.

Сформульоване твердження рівносильне такому: якщо для даного розбиття відрізка $[T_0,T_1]$ існує такий вектор $l\neq 0$ розміру n_N, що виконуються умови (14) і (15), то ранг матриці S_{n_N} менший, ніж n_N.

Функції $W_{Nk}(t_N,\tau)$ аналітичні на проміжках $[t_{k-1},t_k)$, $k=\overline{1,N}$, тому з (14) випливає

$$\frac{d^s}{d\tau^s} l^T W_{Nk}(t_N,\tau)\Big|_{\tau=t_k-0} = 0,\ \tau\in[t_{k-1},t_k),$$

$$s=0,1,...,n_k-1,\ k=1,2,...,N-1,$$

$$\frac{d^s}{d\tau^s} l^T W_{N,k+1}(t_N,\tau)\Big|_{\tau=t_k+0} = 0,\ \tau\in[t_k,t_{k+1}),$$

$$s=0,1,...,n_{k+1}-1,\ k=1,2,...,N-1.$$

Оскільки з цих рівностей одержується, що

$$l^T\exp(A_N(t_N-t_{N-1}))C_N ... \exp(A_{j+1}(t_{j+1}-$$

$$-t_j))C_{j+1}(-1)^s A_j^s B_j = 0,$$

$$s=0,1,...,n_j-1,\ j=1,2,...,N-1,$$

$$l^T\exp(A_N(t_N-t_{N-1}))C_N ... \exp(A_{j+2N}(t_{j+2}-$$

$$-t_{j+1}))C_{j+2}\exp(A_{j+1}(t_{j+1}-$$

$$-t_j))(-1)^k A_j^k B_j = 0,$$

$$k=0,1,...,n_{j+1}-1,\ j=1,2,...,N-1,$$

то, враховуючи означення матричної функції $\exp(At)$ і (15), отримуємо

$$\operatorname{rank} S_{n_N} < n_N.$$

Ця суперечність завершує доведення достатності умови (13).

Необхідність умов теореми буде встановлена, якщо доведемо, що при виконанні умов (5) на проміжку $[T_0, T_1]$ з розбиттям $\{t_j, 0 \le j \le N\}$ випливає рівність рангу матриці S_{n_N} числу n_N. Але це твердження рівнозначне такому: якщо ранг матриці S_{n_N} менший, ніж n_N, то не виконуються умови (5). Припустимо, що ранг матриці S_{n_N} менший, ніж n_N. Тоді існує такий n_N-вимірний вектор $l \neq 0$, що $l^T S_{n_N} = 0$, тобто

$$l^T \exp(A_N(t_N - t_{N-1}))C_N ... \exp(A_{j+1}(t_{j+1} - t_j))C_{j+1} S_j(B_j) = 0, \quad (16)$$

$$l^T \exp(A_N(t_N - t_{N-1}))C_N ... \exp(A_j(t_j - t_{j-1}))D_j = 0, \; j = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Рівність (16) означає, що

$$l_{1j}^T A_j^s B_j = 0, \; s = 0, 1, ..., n_j - 1, \quad (18)$$

де

$$l_{1j}^T = l^T \exp(A_N(t_N - t_{N-1})) \times C_N ... \exp(A_{j+1}(t_{j+1} - t_j))C_{j+1}, \; j = \overline{1, N}.$$

З (18) легко одержати, що

$$l_{1j}^T A_j^s B_j = 0, \; s = 0, 1, 2, ...$$

Тоді

$$l^T W_{Nj}(t_N, \tau) = l^T \exp(A_N(t_N - t_{N-1}))C_N ... \exp(A_{j+1}(t_{j+1} - t_j))C_{j+1} \times \exp(A_j(t_j - \tau))B_j = l_{1j}^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_j - \tau)^k}{k!} A_j^k B_j \equiv 0,$$

$$\tau \in [t_{j-1}, t_j), \quad j = \overline{1, N}. \quad (19)$$

З (17) і (19) отримуємо, що не виконуються умови (5), а це суперечить керовності системи (11), (12). Теорема 2 доведена.

При дослідженні систем керування зі змінною структурою важливими є питання про те, чи при будь-яких розбиттях відрізка $[T_0, T_1]$ справджується керовність. Слушною є наступна теорема.

Теорема 3. *Для існування розбиття $\{t_j, 0 \le j \le N\}$, при якому виконується умова (13), необхідно, щоб* $\operatorname{rank} \tilde{S}(N) = n_N$, *де матриця $\tilde{S}(N)$ має вигляд* [3]

$$\tilde{S}(N) = (S_N(C_N S_{N-1}(...(C_2 S_1(B_1))...)), S_N(C_N S_{N-1}(...(C_3 S_2(D_2, B_2))...)), ..., S_N(C_N S_{N-1}(D_{N-1}, B_{N-1})), S_N(D_N, B_N)).$$

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню необхідності умов теореми 2.

Нехай функціонування об'єкта керування описується системою

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (20)$$

де $x(t), u(t)$ є відповідно n-вимірним та m-вимірним векторами.

Означення 2. *Система (20) називається керовною на заданому відрізку $[T_0, T_1]$, якщо для двох довільних значень $x_{(0)}$ та $x_{(1)}$ з фазового простору X можна вказати таку функцію керування $u(t)$, $t \in [T_0, T_1]$, що розв'язок рівняння (20) задовольняє крайові умови $x(T_0) = x_{(0)}$ та $x(T_1) = x_{(1)}$.*

Теорема 4. *Якщо елементи матриць $A(t)$ та $B(t)$ є аналітичними функціями, то необхідна і достатня умова керовності системи (20) на відрізку $[T_0, T_1]$ має вигляд*

$$\operatorname{rank}(Z_1(t^*), Z_2(t^*), ..., Z_n(t^*)) = n, \quad (21)$$

де $t^* \in (T_0, T_1)$, матриці $Z_{(k)}(t)$ визначаються в околі точки t^* рекурентними співвідношеннями

$$Z_1(t) = B(t), \; Z_k(t) = A(t)Z_{k-1}(t) - \frac{dZ_{k-1}(t)}{dt}, \; k = \overline{2, n}. \quad (22)$$

Попередньо доведемо лему.

Лема. *Якщо* $\operatorname{rank}(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)) = r$, $r < n$, *для довільного $t \in [T_0, T_1]$, то існують $\{t_0', t_1'\} \subset [T_0, T_1]$ такі, що* $\operatorname{rank}(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_r(t)) = r$ *для всіх* $t \in [t_0', t_1']$.

Доведення леми. Припустимо, що для всіх $t \in [T_0, T_1]$ $\operatorname{rank}(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_r(t)) < r$, і розглянемо $j(t)$ — кількість перших лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці $(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_r(t))$. Тобто $j(t)$ — це таке j, що $Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_j(t)$ є лінійно незалежними, а $Z_{j+1}(t)$ лінійно залежить від $Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_j(t)$. Покладемо $j_* = j(t_*) = \max\limits_{t\in[T_0,T_1]} j(t)$. Тоді матриця $(Z_1(t_*), Z_2(t_*), ..., Z_{j_*}(t_*))$ має визначник $\Delta_{j_*}(t_*)$ порядку j_*, відмінний від нуля. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\Delta_{j_*}(t_*) > 0$. З аналітичності $\Delta_{j_*}(t)$ випливає, що $\Delta_{j_*}(t) > 0$ у деякому околі (t'_*, t''_*) точки t_*. Отже, $Z_{j_*+1}(t) = \sum\limits_{i=1}^{j_*} C_i^1(t) Z_i(t)$ при $t \in (t'_*, t''_*)$, де $C_i^1(t)$ — аналітичні функції від t. Легко бачити, що

$$Z_{j_*+k}(t) = \sum_{i=1}^{j_*} C_i^k(t) Z_i(t) \qquad (23)$$

для всіх $k \in \{1, 2, ...\}$. У співвідношенні (23) $C_i^k(t)$ — аналітичні функції, які виражаються через $C_i^1(t)$ та їх похідні.

Враховуючи (23), одержимо $\operatorname{rank}(Z_1(t_*), Z_2(t_*), ..., Z_n(t_*)) < r$, що суперечить умові леми. Лема доведена.

Доведення теореми 4. *Необхідність.* Припустимо супротивне. Нехай $\operatorname{rank}(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)) < n$ для всіх $t \in [T_0, T_1]$. Це означає, що існує проміжок $[T'_0, T'_1] \subset [T_0, T_1]$, для якого при $t \in [T'_0, T'_1]$ $\operatorname{rank}(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)) = r < n$, де $r = \max\limits_{t\in[T_0,T_1]} \operatorname{rank}(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t))$.

За лемою на проміжку (T'_0, T'_1) існує точка t_*, в околі якої $l_0^T(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_k(t)) = 0$ для $k > r$, $\|l_0\| > 0$. Нехай вектор l такий, що $l_0^T = l^T X(T_1, t_*)$, де $X(T_1, t)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків системи $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$.

Покажемо, що виконується умова $l^T W(T_1, t) = 0$ при всіх $t \in [T_0, T_1]$, де $W(T_1, t) = X(T_1, t)B(t)$ — матриця імпульсних перехідних функцій системи (20).

Подамо функцію $W(T_1, t)$ у вигляді ряду $W(T_1, t) = W(T_1, t_*) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} W^{(k)}(T_1, t_*)(t - t_*)$, де $W^{(k)}(T_1, t_*) = \frac{d^k}{dt^k}(W(T_1, t))\Big|_{t=t_*} = (-1)^k X(T_1, t)\left(A(t)Z_k(t) - \frac{dZ_k(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_*}$.

Оскільки правильні рівності

$$l^T X(T_1, t_*)B(t_*) = l_0^T B(t_*) = l_0^T Z_1(t_*) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(l^T X(T_1, t)B(t))\Big|_{t=t_*} = \left(l^T \frac{dX(T_1, t)}{dt} B(t) + l^T X(T_1, t)\frac{dB(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_*} =$$

$$= l^T X(T_1, t)\left(-A(t)B(t) + \frac{dB(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_*} = -l_0^T Z_2(t_*) = 0, ...$$

$$\frac{d^k}{dt^k}(l^T X(T_1, t)B(t))\Big|_{t=t_*} = (-1)^k l^T X(T_1, t)\left(A(t)Z_k(t) - \frac{dZ_k(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_*} = (-1)^k l_0^T Z_{k+1}(t_*) = 0, ...$$

то $l^T W(T_1, t) = 0$ для $t \in [T_0, T_1]$.

Одержане протиріччя завершує доведення необхідності умов теореми 4. Достатність теореми доведена в [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением.— М.: Наука, 1968.— 476с.

2. *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения.— К.: Вища школа, 1978.— 184с.

3. *Кириченко Н.Ф., Тимофеева Е.Н.* Алгебраические критерии вполне управляемости нестационарных линейных динамических систем // Адаптивные и экспертные системы в управлении: Тезисы докл. 5-го Ленинградского симпозиума по теории адаптивных систем, 17-19 апреля / Под ред. В.А. Якубовича. - Ленинград: 1991.— Ч.1.— С.33-34.