УДК 517.956.2

©1999 р. Л.М. Івасишин

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ СЛАБКИХ ДОДАТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ: НЕРІВНОСТІ ГАРНАКА, ТЕОРЕМИ ПРО ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ

Вивчаються властивості додатних слабких розв'язків загальних еліптичних систем: різні варіанти L_1-нерівностей Гарнака, теореми про зростання і спадання в необмежених циліндричних та конічних областях.

We study the properties of positive weak solutions of general elliptic systems: various Harnak's L_1 – inequalities, the theorems of the increase and the decrease on unbounded cylindrical and conic domains.

Властивостям додатних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними присвячений цикл праць В.О. Кондратьєва та С.Д. Ейдельмана. Зокрема, в [1] ними встановлено, що додатні слабкі розв'язки еліптичної за Петровським системи рівнянь

$$\sum_{|k|\le m} \partial_x^k (a_k(x)u(x)) = f(x), \quad x \in G,$$

сумовні у всій області G. Наслідками цієї властивості є L_1-нерівності Гарнака, теореми про зростання і спадання додатних розв'язків указаних систем.

Додатні розв'язки еліптичних за Дуглісом – Ніренбергом систем сумовні лише всередині області. На межі області вони мають степеневі особливості.

У цій роботі для додатних розв'язків загальних еліптичних систем доведено нерівності, що є аналогами L_1-нерівностей Гарнака, теореми про зростання і спадання в циліндричних та конічних областях.

1. Позначення, означення, умови. Нехай n, N, t_1, ... ,t_N – задані натуральні, s_1, ... ,s_N – задані цілі недодатні числа такі, що сума $2m \equiv t_1 + ... + t_N + + s_1 + ... + s_N$ парна. Покладемо $t \equiv (t_1, ..., t_N)$, $s \equiv (s_1, ..., s_N)$, $M \equiv \max\limits_{i,j}(s_j + t_i)$. Нехай G – деяка область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою (з класу C^M) межею ∂G.

Розглянемо систему N диференціальних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}(x, \partial_x) u_j(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{N} \sum_{|k|\le s_j+t_i} (-1)^{|k|} \partial_x^k (a_k^{ij}(x) u_j(x)) = f_i(x),$$

$$1 \le i \le N, \quad x \in G. \qquad (1)$$

Зауважимо, що якщо $s_j + t_i < 0$, то вважають, що $L_{ij}(x, \partial_x) \equiv 0$.

Припускатимемо виконаними наступні умови.

А. Система (1) рівномірно еліптична за Дуглісом-Ніренбергом в G з сталою еліптичності δ, тобто $\exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x \in \bar{G} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| det \left(\sum_{|k|=s_j+t_l} (-1)^{|k|} a_k^{lj}(x) (i\sigma)^k \right)_{l,j=1}^{N} \right| \ge$$

$$\ge \delta |\sigma|^{2m}.$$

Б. Всі коефіцієнти системи вимірні, обмежені сталою Λ. Коефіцієнти a_k^{ij}, $|k| = s_j + t_i$, $1 \le i, j \le N$, неперервні в $\bar{G}$, ω – їх модуль неперервності.

У статті вивчаються додатні слабкі розв'язки системи (1). Додатність визначається відносно фіксованого гострого конуса K з простору $\mathbb{C}^N$ [2].

Означення 1. *Додатною частиною вектор-функції u в області G відносно конуса K називається функція*

$$u^+(x) \equiv \begin{cases} u(x), \ u(x) \in K, \\ 0, \ u(x) \bar{\in} K, \end{cases} \qquad x \in G,$$

від'ємною частиною – функція $u^-(x) \equiv u^+(x) - u(x)$, $x \in G$.

Нехай $\rho(x)$ – відстань від точки $x \in G$ до межі ∂G; $a \equiv (a_1, ..., a_N)$; $M(z) \equiv z$, $z \in [0,1]$, $M(z) \equiv 1$, $z \in (1, +\infty)$. Означимо норми у спеціальних вагових L_1-просторах

$$||f; G||_a \equiv \sum_{i=1}^{N} \int\limits_G |f_i(x)| \ [M(\rho(x))]^{a_i} dx,$$

$$||f; G|| \equiv ||f; G||_0.$$

2. Теорема про сумовність. Сформулюємо взятий з [1] результат – теорему про сумовність додатних слабких розв'язків системи (1).

Позначимо $s^* \equiv \max\{s_1, ..., s_N\}$; $e = (1, ..., 1)$ – N-вимірний вектор.

Теорема 1. *Нехай система (1) задовольняє умови А та Б, а u – її слабкий розв'язок в G. Якщо для деякого $q \geq 0$ скінченні норми*

$$||u^-; G||_{(s^*+q)e-s}, \quad ||f; G||_{t+(s^*+q)e}, \tag{2}$$

то скінченною є норма $||u; G||_{(s^*+q)e-s}$ та існує стала $C > 0$, яка залежить лише від n, N, t, s, δ, Λ, ω, така, що

$$||u; G||_{(s^*+q)e-s} \leq$$

$$\leq C \left(||u; G_1|| + ||u^-; G||_{(s^*+q)e-s} + \right.$$

$$\left. + ||f; G||_{t+(s^*+q)e} \right), \tag{3}$$

де G_1 – деяка підобласть області G, компактно в неї вкладена.

За допомогою теореми 1 встановлюються інші властивості розв'язків: нерівності Гарнака, теореми про зростання і спадання. При їх доведенні використовується і розвивається методика з [1].

3. Нерівності Гарнака. Під L_1-нерівностями Гарнака розуміють нерівності, в яких L_1-норма розв'язку по деякій області оцінюється зверху такою ж нормою по меншій області. Виявляється, що для розв'язків системи (1) правильні нерівності, в яких оцінюється норма розв'язку в спеціальних вагових L_1-просторах. Називатимемо їх також L_1-нерівностями Гарнака.

Позначимо через $B_R(y)$ кулю в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром в точці y; $B_R \equiv B_R(0)$.

Сформулюємо різні варіанти L_1-нерівностей Гарнака.

Теорема 2. *Нехай система (1) задовольняє умови А та Б в B_R, а u – її слабкий розв'язок у B_R. Нехай норми $||u^-; B_R||_{(s^*+q)e-s}$ і $||f; B_R||_{t+(s^*+q)e}$ скінченні. Тоді для будь-якого $R_1 < R$ існує стала $C > 0$, яка залежить лише від n, N, t, s, δ, Λ, ω, R, R_1 і така, що правильна нерівність*

$$||u; B_R||_{(s^*+q)e-s} \leq C \left(||u; B_{R_1}|| + \right.$$

$$\left. + ||u^-; B_R||_{(s^*+q)e-s} + ||f; G||_{t+(s^*+q)e} \right). \tag{4}$$

Теорема 3. *Нехай u – слабкий розв'язок в G системи (1), яка задовольняє умови А та Б. Якщо норми (2) скінченні, то правильна оцінка*

$$||u; B_{R_2}(y^2)|| \leq C \left(||u; B_{R_1}(y^1)|| + \right.$$

$$\left. + ||u^-; G||_{(s^*+q)e-s} + ||f; G||_{t+(s^*+q)e} \right), \tag{5}$$

де $B_{R_2}(y^2)$ та $B_{R_1}(y^1)$ – довільні кулі в області G, а стала $C > 0$ залежить лише від n, N, t, s, δ, Λ, ω, R_1, y^1, R_2, y^2.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови теореми 3, то для будь-якої кулі $B_R(y)$ з області G існує стала $C > 0$, яка залежить лише від n, N, t, s, δ, Λ, ω, R, y і така, що*

$$||u; G||_{(s^*+q)e-s} \leq C \left(||u; B_R(y)|| + \right.$$

$$\left. + ||u^-; G||_{(s^*+q)e-s} + ||f; G||_{t+(s^*+q)e} \right). \tag{6}$$

Доведемо теорему 2. З теореми 1, записаної для області B_R, випливає, що існує число $R' < R$ таке, що

$$||u; B_R||_{(s^*+q)e-s} \leq C \left(||u; B_{R'}|| + \right.$$

$$+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\big). \quad (7)$$

Якщо $R' \le R_1$, то з цієї оцінки випливає потрібна нерівність.

Нехай $R' > R_1$. Вибравши число R_2 з інтервалу $(\max\{R',1\},R)$ і оцінивши знизу норму зліва в (7) нормою $||u;B_{R_2}||$, одержимо

$$||u;B_{R_2}|| \le C\left(||u;B_{R'}||+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+\right.$$

$$\left.+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\right). \quad (8)$$

Зафіксуємо $R_0 < R_2$ і зробимо заміну $x = R_0y/R_2$. Тоді u, як функція y, є розв'язком системи

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\le s_j+t_i}(-1)^{|k|}\partial_y^k\left[\left(\frac{R_2}{R_0}\right)^{|k|-t_i-s^*}\times\right.$$

$$\left.\times a_k^{ij}\left(\frac{R_0}{R_2}y\right)u_j(y)\right]=\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^{t_i+s^*}f_i\left(\frac{R_0}{R_2}y\right),$$

$$1\le i\le N,\quad y\in B_{R_2}.$$

Для цієї системи числа δ і Λ незмінні, а модуль неперервності дорівнює $\omega(R_2h/R_0)$. Застосуємо до розв'язку виписаної системи нерівність (8). Перейшовши в цій нерівності до старої змінної x, одержимо

$$||u;B_{R_0}|| \le C\left(||u;B_{R_0R'/R_2}||+\right.$$

$$\left.+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\right). \quad (9)$$

Виберемо $R_0 = R'b^r$, де $b = R'/R_2$. При $r = 0$ маємо

$$||u;B_{R'}|| \le C\left(||u;B_{R'b}||+\right.$$

$$\left.+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

Норму $||u;B_{R'b}||$ оцінимо за допомогою (9) при $r=1$, норму $||u;B_{R'b^2}||$ – при $r=2$ і т.д. Одержимо

$$||u;B_{R'}|| \le C\left(||u;B_{R'b^r}||+\right.$$

$$\left.+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

Число r виберемо так, щоб $R'b^r = R'(R'/R_2)^r < R_1$. Матимемо

$$||u;B_{R'}|| \le C\left(||u;B_{R_1}||+\right.$$

$$\left.+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

З (7) при застосуванні доведеної оцінки одержимо нерівність (4) і у випадку $R' > R_1$.

Зауваження. *З останньої виписаної оцінки та оцінки (8) випливає нерівність*

$$||u;B_{R_2}|| \le C\left(||u;B_{R_1}||+\right.$$

$$\left.+||u^-;B_R||_{(s^*+q)e-s}+||f;B_R||_{t+(s^*+q)e}\right), \quad (10)$$

з допомогою якої доводиться теорема 3.

Доведемо теорему 3. Задані точки y^1 та y^2 з'єднаємо ламаною, що лежить в G. Нехай h – відстань від ламаної до межі ∂G. Покриємо ламану кулями $B_{h/4}(x^1)$, $B_{h/4}(x^2)$,..., $B_{h/4}(x^{l-1})$, $B_{h/4}(x^l)$, де $x^1 = y^1$, $x^2,\dots,x^{l-1},x^l = y^2$ – точки на ламаній. Застосуємо оцінку (10):

$$||u;B_{h'}(x^i)|| \le C\left(||u;B_{h/4}(x^i)||+\right.$$

$$\left.+||u^-;G||_{(s^*+q)e-s}+||f;G||_{t+(s^*+q)e}\right),$$

де $h' \in \left(\frac{3}{4}h,h\right)$. Нехай x – довільна точка на поверхні кулі $B_{h/4}(x^i)$. Тоді

$$||u;B_{h/2}(x)|| \le ||u;B_{h'}(x^i)|| \le$$

$$\le C\left(||u;B_{h/4}(x^i)||+\right.$$

$$\left.+||u^-;G||_{(s^*+q)e-s}+||f;G||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

Очевидно, що при великому l існує така точка x на поверхні кулі $B_{h/4}(x^i)$, що $B_{h/2}(x) \supset B_{h/4}(x^{i+1})$. Тому маємо

$$||u;B_{h/4}(x^{i+1})|| \le$$

$$\le ||u;B_{h/2}(x)|| \le C\left(||u;B_{h/4}(x^i)||+\right.$$

$$\left.+||u^-;G||_{(s^*+q)e-s}+||f;G||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

Застосувавши цю оцінку $l-1$ раз, одержимо

$$||u;B_{h/4}(y^2)|| \le C\left(||u;B_{h/4}(y^1)||+\right.$$

$$\left.+||u^-;G||_{(s^*+q)e-s}+||f;G||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

З (10) випливає нерівність

$$||u;B_{R_2}(y^2)|| \le C\left(||u;B_{h/4}(y^2)||+\right.$$

$$\left.+||u^-;G||_{(s^*+q)e-s}+||f;G||_{t+(s^*+q)e}\right).$$

Шукана оцінка (5) є наслідком двох останніх нерівностей.

Твердження теореми 4 випливає з таких міркувань. Застосуємо до розв'язку u теорему 1. Область G_1 покриємо кулями, норму по кожній такій кулі оцінимо за теоремою 3 нормою по заданій кулі $B_R(y)$. Підсумувавши одержані оцінки і скориставшись скінченністю покриття, одержимо оцінку (6).

4. Теореми про зростання і спадання. Виявляється, що зростання і спадання додатних розв'язків системи (1) треба вивчати не у всьому циліндрі чи конусі, а відступивши від межі. Це є наслідком того, що такі розв'язки не є сумовними до межі.

Нехай $U \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < x_1 < +\infty, x_2^2 + ... + x_n^2 < < R^2\}$ – нескінченний циліндр, $U_z \equiv U \bigcap \{x_1 < z\}$, $U_z^h \equiv U_z \bigcap \{x_2^2 + ... + x_n^2 < (R-h)^2\}$, де h, R – фіксовані додатні числа, причому h досить мале. Сформулюємо теореми про зростання і спадання в циліндрі.

Теорема 5. *Нехай система (1) задовольняє умови А та Б в U, а u – її слабкий розв'язок в U. Якщо для деякого $a > 0$ правильні оцінки*

$$||u^-; U_z|| \le Ce^{az}, \quad ||f; U_z|| \le Ce^{az}, \quad z > 0, \tag{11}$$

то існують сталі $C_1 > 0$ і $a_1 > a$ такі, що

$$||u; U_z^h|| \le C_1 e^{a_1 z}, \quad z > 0.$$

Теорема 6. *Нехай u – додатний слабкий розв'язок в U однорідної ($f \equiv 0$) системи (1), яка задовольняє умови А та Б в U. Тоді існує стала $a > 0$, така, що*

$$||u; U_z^h \setminus U_{z-1}^h|| \ge ||u; U_1^h|| e^{-az}, \quad z > 1.$$

Доведемо теорему 5. Циліндр U_z розіб'ємо на області $I_\nu \equiv \{x \in U \mid \nu < x_1 \le \nu + 1\}$, $0 \le \nu \le [z] - 1$, $I_{[z]} \equiv \{x \in U \mid [z] < x_1 \le z\}$. Розглянемо області B_ν з гладкими (з класу C^M) межами такі, що: 1) $I_\nu \subset B_\nu$, $1 \le \nu \le [z]$; 2) $B_\nu \subset I_{\nu-1} \bigcup I_\nu \bigcup I_{\nu+1}$, $1 \le \nu \le [z] - 1$, $B_{[z]} \subset U_{[z]+1} \setminus U_{[z]}$. Тоді циліндр U_z^h має розбиття $I_\nu^h \equiv I_\nu \bigcap U_z^h$, $B_\nu^h \equiv B_\nu \bigcap U_z^h$. Застосувавши нерівність Гарнака (6) для області B_ν, одержимо

$$||u; I_\nu^h|| \le ||u; B_\nu^h|| \le C_0 ||u; B_\nu||_{(s^*+q)e-s} \le$$
$$\le C_2 \left(||u; I_{\nu-1}^h|| + ||u^-; B_\nu|| + ||f; B_\nu||\right),$$
$$1 \le \nu \le [z].$$

Використання цієї оцінки кілька разів дає оцінку

$$||u; I_\nu^h|| \le C_2^\nu ||u; I_0^h|| +$$
$$+ C_3 \left(||u^-; U_{[z]+1}|| + ||f; U_{[z]+1}||\right).$$

З цієї оцінки з урахуванням (11) випливає потрібна оцінка. Справді, маємо

$$||u; U_z^h|| \le \sum_{\nu=0}^{[z]} ||u; I_\nu^h|| \le C_2^{[z]} ([z]+1) ||u; I_0^h|| +$$
$$+ C \left(||u^-; U_{[z]+1}|| + ||f; U_{[z]+1}||\right) \le$$
$$\le C_2^{[z]} (z+1) + Ce^{a[z]} \le C_1 e^{a_1 z}.$$

За допомогою таких же міркувань і того ж розбиття доводиться теорема 6. Основною тут є оцінка

$$||u; I_\nu^h|| \le C ||u; I_{\nu+1}^h||, \quad 0 \le \nu \le [z] - 1,$$

з якої випливає нерівність

$$||u; U_1^h|| = ||u; I_0^h|| \le C^{[z]} ||u; I_{[z]}^h|| \le$$
$$\le C^{[z]} ||u; U_z^h \setminus U_{z-1}^h|| \le e^{az} ||u; U_z^h \setminus U_{z-1}^h||,$$

що і треба було довести.

У наступних теоремах вивчається поведінка додатних розв'язків системи (1) у конусі. Нехай $V \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | x_n^2 > \alpha \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2\}$ – нескінченний конус; $V_z \equiv V \bigcap \{|x_n| < z\}$,

$$V_z^h \equiv V_z \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n | (x_n - h)^2 > \alpha \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\},$$

де h, α – додатні числа, причому h досить мале.

Теорема 7. *Нехай u – слабкий розв'язок системи (1) в конусі V, яка задовольняє в V умови А, Б і таку умову:*

$$|a_k^{ij}(x)| \le C|x_n|^{|k| - t_i - s^*}, \ |k| \le s_j + t_i,$$

$$1 \le i, j \le N. \tag{12}$$

Якщо для деякого $a > 0$ правильні оцінки

$$||u^-; V_z|| \le C(1+z)^a, \ ||f; V_z|| \le C(1+z)^a,$$
$$z > 0, \tag{13}$$

то існують сталі $C_1 > 0$ і $a_1 > a$ такі, що

$$||u; V_z^h \setminus V_1^h|| \le C_1(1+z)^{a_1}, \quad z > 1.$$

Теорема 8. *Нехай однорідна ($f \equiv 0$) система (1) задовольняє умови А, Б і (12) в V, а u – її додатний слабкий розв'язок. Тоді існують сталі $C > 0$ та $a > 0$ такі, що*

$$||u; V_z^h \setminus V_{z/4}^h|| \ge C(1+z)^{-a}, \quad z > 1.$$

Доведемо теорему 7. Нехай область B така, що $\partial B \in C^M$ і $V_{2^2} \setminus V_1 \subset B \subset V_{2^3} \setminus V_1$; $B^h \equiv B \bigcap V_{2^3}^h$. Для області B застосуємо нерівність Гарнака (6):

$$||u; V_{2^2}^h \setminus V_2^h|| \le ||u; B^h|| \le ||u; B||_{(s^*+q)e-s} \le$$
$$\le C\left(||u; V_2^h \setminus V_1^h|| + ||u^-; V_{2^3}|| + ||f; V_{2^3}||\right). \tag{14}$$

В системі (1) зробимо заміну $x = 2y$. Тоді u, як функція y, є розв'язком системи

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{|k| \le s_j + t_i} (-1)^{|k|} \partial_y^k \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|-t_i-s^*} \times\right.$$
$$\left.\times a_k^{ij}(2y) u_j(y)\right] = 2^{t_i+s^*} f_i(2y),$$
$$1 \le i \le N, \quad y \in V_{2^2}^h \setminus V_2^h,$$

для якої на підставі умови (12) числа δ, Λ і функцію ω можна вважати незмінними. До розв'язку u цієї системи використаємо оцінку (14). Перейдемо до змінної x; при цьому $V_{2^2}^h \setminus V_2^h$ перейде в $V_{2^3}^h \setminus V_{2^2}^h$, $V_2^h \setminus V_1^h$ – в $V_{2^2}^h \setminus V_2^h$. У результаті одержимо

$$||u; V_{2^3}^h \setminus V_{2^2}^h|| \le C\left(||u; V_{2^2}^h \setminus V_2^h|| + \right.$$
$$\left. + ||u^-; V_{2^4}|| + ||f; V_{2^4}||\right).$$

Повторивши викладені міркування кілька разів і згорнувши одержані нерівності , матимемо

$$||u; V_{2^\nu}^h \setminus V_{2^{\nu-1}}^h|| \le C^{\nu-1} ||u; V_2^h \setminus V_1^h|| +$$
$$+ C^{\nu-1}(\nu-1)(||u^-; V_{2^{\nu+1}}|| +$$
$$+ ||f; V_{2^{\nu+1}}||), \quad \nu \ge 2.$$

За допомогою цієї оцінки і умов (13) одержимо потрібну оцінку. Справді,

$$||u; V_z^h \setminus V_1^h|| \le \sum_{\nu=1}^{[\log_2 z]+1} ||u; V_{2^\nu}^h \setminus V_{2^{\nu-1}}^h|| \le$$
$$\le C^{[\log_2 z]} \, ||u; V_2^h \setminus V_1^h|| +$$
$$+ C^{[\log_2 z]} \, (\log_2 z)^2 \, (||u^-; V_{2^{[\log_2 z]+1}}|| +$$
$$+ ||f; V_{2^{[\log_2 z]+1}}||) \le C_1(1+z)^{a_1}.$$

Твердження теореми 8 випливає з оцінки

$$||u; V_2^h \setminus V_1^h|| \le C^{\nu-1} ||u; V_{2^\nu}^h \setminus V_{2^{\nu-1}}^h||$$

при $\nu = [\log_2 z]$.

Зауваження. *Якщо в системі (1) $s_1 = \ldots = s_N$ (спряжена до (1) система має структуру Петровського), то її додатні розв'язки сумовні в усій області G. Тому в нерівностях Гарнака присутні норми в просторі L_1 і зростання та спадання вивчається у цілому циліндрі чи конусі. Ці результати доведено в [1].*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д.* Положительные решения линейных уравнений с частными производными // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1974.— **31**.— С.85—146.

2. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1979.— 318с.