УДК 517.983

©1999 р. Т.І. Звоздецький, С.С. Лінчук

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ЗГОРТКИ В ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У просторах послідовностей, що наділені нормальною за Кете топологією, побудована нетривіальна згортка для довільного лінійного неперервного оператора, який є правим оберненим до узагальненого диференціювання.

A non-trivial convolution for arbitrary linear continues operator which is right inverse to the generalized differentiation is obtained in the spaces of sequences.

Нехай X – топологічний векторний простір. Нагадаємо, що згорткою для лінійного неперервного оператора $M : X \to X$ називається нарізно неперервна, білінійна, комутативна й асоціативна операція $* : X \times X \to X$, для якої $M(x*y) = (Mx)*y$, $x, y \in X$ [1, с.10]. Якщо згортка $*$ не має ануляторів у просторі X, тобто таких ненульових елементів $x \in X$, що $x * y = 0$ для кожного $y \in X$, то кажуть, що вона є нетривіальною.

Побудові згорток для лінійних неперервних операторів у просторах аналітичних функцій та їхнім застосуванням присвячені численні праці багатьох математиків (див. бібліографію в [1]). Оскільки простори аналітичних у кругових областях функцій та деякі підпростори простору цілих функцій є топологічно ізоморфними до просторів послідовностей, що наділені нормальною топологією [2], то природно постає задача про побудову та застосування згорток у просторах послідовностей.

Нехай E – деякий векторний простір послідовностей комплексних чисел $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ над полем $\mathbf{C}$, а E^α – двоїстий до нього простір послідовностей, тобто

$$E^\alpha = \left\{ u : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n u_n| < +\infty, \ \forall x \in E \right\}.$$

Набором передночм $\{p_u(x) : u \in E^\alpha\}$, де

$$p_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n u_n|, \quad x \in E, \quad u \in E^\alpha,$$

на просторі E визначається нормальна за Кете топологія [2].

Скрізь далі через E позначатимемо простір послідовностей, який містить усі фінітні послідовності і наділений нормальною топологією. Крім цього, вважатимемо, що E – повний простір, що рівносильно його досконалості, тобто $(E^\alpha)^\alpha = E$ [2]. Позначимо через $\mathcal{L}(E)$ сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з E в E, а через E' – простір усіх лінійних неперервних функціоналів на E. Відзначимо, що простори E' та E^α є ізоморфними [2].

Нехай $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ – така послідовність відмінних від нуля комплексних чисел, що оператори узагальненого диференціювання $\mathcal{D}_\alpha$ та узагальненого інтегрування $\mathcal{I}_\alpha$, які визначаються співвідношеннями

$$\mathcal{D}_\alpha x = \mathcal{D}_\alpha(x_0, x_1, ..., x_n, ...) =$$
$$= \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} x_1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2, ..., \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} x_{n+1}, ... \right),$$
$$\mathcal{I}_\alpha x = \mathcal{I}_\alpha(x_0, x_1, ..., x_n, ...) =$$
$$= \left(0, \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x_0, ..., \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} x_{n-1}, ... \right),$$

одночасно діють з простору E в простір E. Очевидно, що ці оператори лінійні. Враховуючи досконалість простору E, неважко переконатися, що вони є неперервними.

Ця стаття присвячена побудові в просторі послідовностей E нетривіальної згортки для довільного оператора з $\mathcal{L}(E)$, який є правим оберненим до $\mathcal{D}_\alpha$, тобто для оператора вигляду $\mathcal{I}_\alpha + L$, де L – довільний функціонал з E'. При цьому використовується запропонована в [3] загальна схема відшукання нових згорток для операторів за допомогою комутантів цих операторів. Тому спочатку описується комутант оператора вигляду $\mathcal{I}_\alpha + L$. Зауважимо, що питання про описання комутантів різноманітних операторів, що пов'язані з узагальненими диференціюванням та інтегруванням, досліджувалися багатьма математиками (див. бібліографію в [4]).

Зафіксуємо довільний функціонал $L \in E'$ і опишемо комутант оператора $\mathcal{I}_\alpha + L$ у просторі E. Припустимо, що оператор $T \in \mathcal{L}(E)$ є переставним з $\mathcal{I}_\alpha + L$, тобто

$$(\mathcal{I}_\alpha + L)Tx = T(\mathcal{I}_\alpha + L)x, \qquad x \in E. \quad (1)$$

Для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$ через $e^{(n)}$ позначимо n-й орт, тобто таку послідовність, у якої n-й член дорівнює 1, а всі решта – 0. Відзначимо, що сукупність усіх ортів утворює базис простору E [2]. Нехай $y = Te^{(0)}$, а $\Lambda(x) = x_0 - L(\mathcal{D}_\alpha x)$. Методом математичної індукції доведемо, що тоді при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$Te^{(n)} = \frac{1}{\alpha_n}\mathcal{D}_\alpha[\Phi_n(y)], \quad (2)$$

де

$$\Phi_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k[\Lambda(e^{(k)})\mathcal{I}_\alpha^{n-k+1}y - \\ -e^{(k)}\Lambda(\mathcal{I}_\alpha^{n-k+1}y)]. \quad (3)$$

Коли $n = 0$, то матимемо істинну рівність $Te^{(0)} = y$. Припустимо, що (2) виконується для $n \geq 0$, та доведемо, що ця рівність правильна і для $n+1$. Враховуючи формулу

$$e^{(n+1)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}(\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} + \Lambda(e^{(n+1)})e^{(0)},$$

співвідношення (1), а також те, що

$$(\mathcal{I}_\alpha + L)\mathcal{D}_\alpha x = x - \Lambda(x)e^{(0)}, \quad x \in E, \quad (4)$$

отримуємо

$$Te^{(n+1)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}(\mathcal{I}_\alpha + L)Te^{(n)} + \Lambda(e^{(n+1)})Te^{(0)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n+1}}\left(\Phi_n(y) - \Lambda[\Phi_n(y)]\right) + \Lambda(e^{(n+1)})y.$$

Оскільки, очевидно,

$$\Lambda[\Phi_n(y)] = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (5)$$

то

$$Te^{(n+1)} = \frac{1}{\alpha_{n+1}}\mathcal{D}_\alpha\left[\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Lambda(e^{(k)})\mathcal{I}_\alpha^{n-k+2}y - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1}e^{(k+1)}\Lambda(\mathcal{I}_\alpha^{n-k+1}y)\right] +$$

$$+\mathcal{D}_\alpha[\Lambda(e^{(n+1)})\mathcal{I}_\alpha y] - \mathcal{D}_\alpha\left[\frac{\alpha_0}{\alpha_{n+1}}e^{(0)}\Lambda(\mathcal{I}_\alpha^{n+2}y)\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n+1}}\mathcal{D}_\alpha[\Phi_{n+1}(y)],$$

що й треба було довести.

Скориставшись лінійністю й неперервністю операторів T й $\mathcal{I}_\alpha + L$, а також співвідношеннями (2)–(5), одержимо, що для довільного $x \in E$

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} x_n Te^{(n)} =$$

$$= \mathcal{D}_\alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}(\mathcal{I}_\alpha + L)\mathcal{D}_\alpha[\Phi_n(y)]\right] =$$

$$= \mathcal{D}_\alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}\Big(\Phi_n(y) - \Lambda[\Phi_n(y)]\Big)\right] =$$

$$= \mathcal{D}_\alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}\Phi_n(y)\right].$$

Таким чином, доведене

Твердження 1. *Нехай L – довільний фіксований функціонал з E', а $\Lambda(x) = x_0 - L(\mathcal{D}_\alpha x)$. Якщо оператор $T \in \mathcal{L}(E)$ є переставним з $\mathcal{I}_\alpha + L$, то для довільної послідовності $x \in E$*

$$Tx = \mathcal{D}_\alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{\alpha_n}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left[\Lambda(e^{(k)})\mathcal{I}_\alpha^{n-k+1}y - \right.\right.$$

$$-e^{(k)}\Lambda(\mathcal{I}_\alpha^{n-k+1}y)\big]\Big), \qquad (6)$$

де y – деяка послідовність з E, причому $y = T\, e^{(0)}$.

Відзначимо, що оскільки оператор T є лінійним і неперервним, то для послідовності $y = Te^{(0)}$ та довільної послідовності $x \in E$ ряд у правій частині (6) збігається в просторі E. Припустимо, що цей ряд збігається за топологією простору E для довільних послідовностей x та y з E.

Для кожного $n = 0, 1, 2, ...$ розглянемо білінійне нарізно неперервне відображення $f_n : E \times E \to E$, яке визначається співвідношенням

$$f_n(x, y) = \frac{x_n}{\alpha_n}\, \Phi_n(y).$$

Оскільки за припущенням ряд із правої частини (6) збігається в E для кожних $x\,, y\, \in\, E$, то послідовність $\{f_n(x, y) : n \ge 0\}$ є поточково обмеженою в E.

Означення 1. *Будемо говорити, що простір E має властивість (A), якщо кожна поточково обмежена в E послідовність білінійних нарізно неперервних відображень $g_n : E \times E \to E$ $(n \ge 0)$ є одностайно неперервною, тобто*

$$\forall v \in E^\alpha \quad \exists u \in E^\alpha \quad \forall x, y \in E \quad \forall n \ge 0 :$$

$$p_v(g_n(x, y)) < p_u(x)\, p_u(y).$$

Відзначимо, що таку властивість мають, наприклад, простори Фреше [5, с.113].

Нехай E має властивість (A). Тоді з поточкової обмеженості послідовності $\{f_n(x, y) : n \ge 0\}$ отримаємо, що вона є одностайно неперервною в E. Тому

$$\forall v \in E^\alpha \quad \exists u \in E^\alpha \quad \forall n, m = 0, 1, 2, ... :$$

$$p_v\left(\frac{1}{\alpha_n}\Phi_n(e^{(m)})\right) =$$

$$= p_v\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m}\left[\Lambda(e^{(k)})e^{(n+m-k+1)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -e^{(k)}\Lambda(e^{(n+m-k+1)})\right]\right) < |u_n u_m|.$$

Позначивши $l_k = \Lambda(e^{(k)})$ і скориставшись тим, що

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m}(l_k e^{(n+m-k+1)} - l_{n+m-k+1}e^{(k)}) =$$

$$= \sum_{k=\max\{n,m\}+1}^{n+m+1} \frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m} l_{n+m-k+1}e^{(k)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m} l_{n+m-k+1}e^{(k)},$$

одержимо:

$$\forall v \in E^\alpha \quad \exists u \in E^\alpha \quad \forall n, m = 0, 1, 2, ...$$

$$\forall k = 0, 1, ..., \min\{n, m\},$$

$$\max\{n, m\} + 1, ..., n + m + 1 : \qquad (7)$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m} l_{n+m-k+1}v_k\right| < |u_n u_m|.$$

Таким чином, установлено

Твердження 2. *Нехай простір E має властивість (A), L - довільний фіксований функціонал з E', $\Lambda(x) = x_0 - L(\mathcal{D}_\alpha x)$ і $l_k = \Lambda(e^{(k)})$. Тоді якщо для кожної послідовності $y \in E$ існує оператор $T \in \mathcal{L}(E)$, переставний з $\mathcal{I}_\alpha + L$, для якого $Te^{(0)} = y$, то оператор T подається у вигляді (6) і виконується умова (7).*

При додатковій умові на простір E правильне і обернене твердження.

Означення 2. *Вважатимемо, що простір E має властивість (B), якщо він разом з кожною своєю послідовністю $x = (x_n)$ містить також і послідовність $x' = (nx_n)$.*

Зауважимо, що умову (B) задовольняють, наприклад, простори, які входять у класифікацію [4, с.31].

Твердження 3. *Нехай простір E має властивість (B), $L \in E'$ і виконується умова (7). Тоді для кожної послідовності $y \in E$ формулою (6) визначається оператор $T \in \mathcal{L}(E)$, який є переставним з $\mathcal{I}_\alpha + L$, причому $Te^{(0)} = y$.*

Доведення. Нехай y – послідовність із простору E. Доведемо, що відповідний оператор T, який визначається формулою (6), належить множині $\mathcal{L}(E)$ і є переставним з $\mathcal{I}_\alpha + L$.

Візьмемо $x \in E$ і доведемо, що ряд із правої частини (6) є збіжним у просторі E. Для цього досить перевірити, що послідовність частинних сум указаного ряду є послідовністю Коші, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall v \in E^\alpha\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall i, j \geq n_0\, (i < j):$$

$$p_v\left(\sum_{n=i+1}^{j} \frac{x_n}{\alpha_n}\Phi_n(y)\right) < \varepsilon.$$

Зафіксуємо довільно взяті $\varepsilon > 0$, $v \in E^\alpha$, а також знайдене для v із (7) $u \in E^\alpha$. Тоді для $i,\ j\ \in\ \mathbf{N}\ (i < j)$ матимемо, що

$$p_v\left(\sum_{n=i+1}^{j} \frac{x_n}{\alpha_n}\Phi_n(y)\right) \leq \sum_{n=i+1}^{j}\sum_{m=0}^{\infty} |x_n y_m| \times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\left|\frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m} l_{n+m-k+1} v_k\right| +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=\max\{n,m\}+1}^{n+m+1}\left|\frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n\alpha_m} l_{n+m-k+1} v_k\right|\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=i+1}^{j}\sum_{m=0}^{\infty} |x_n y_m|(n+m+2)|u_n u_m|.$$

Звідси, оскільки $n+m+2 \leq (n+1)(m+2)$ і ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)|x_n u_n|$ та $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+2)|y_m u_m|$ є збіжними, отримаємо, що для зафіксованих $\varepsilon > 0$ і $v \in E^\alpha$

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall i, j \geq n_0 (i < j):$$

$$p_v\left(\sum_{n=i+1}^{j} \frac{x_n}{\alpha_n}\Phi_n(y)\right) < \varepsilon,$$

що й треба було довести.

Отже, формулою (6) визначається оператор $T : E \to E$. Його лінійність очевидна. Доведемо неперервність цього оператора, тобто, що

$$\forall v \in E^\alpha \quad \exists u \in E^\alpha \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots :$$

$$p_v(Te^{(n)}) < |u_n|$$

Нехай $v \in E^\alpha$. Оскільки $\mathcal{D}_\alpha$ діє лінійно й неперервно в E, то

$$\exists u' \in E^\alpha \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots :$$

$$p_v(Te^{(n)}) < p_{u'}\left(\frac{1}{\alpha_n}\Phi_n(y)\right).$$

Скориставшись наведеними вище оцінками і умовою (7), матимемо, що

$$\exists u'' \in E^\alpha \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots :$$

$$p_{u'}\left(\frac{1}{\alpha_n}\Phi_n(y)\right) \leq (n+1)|u''_n| \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)|y_m u''_m|.$$

Тоді, очевидно, за шукану можна взяти послідовність

$$u = \left((n+1)|u''_n| \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)|y_m u''_m|\right) \in E^\alpha.$$

Таким чином, оператор (6) належить простору $\mathcal{L}(E)$. Залишилось довести, що він є переставним з $\mathcal{I}_\alpha + L$. Враховуючи лінійність та неперервність оператора T, досить перевірити, що при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$T(\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} = (\mathcal{I}_\alpha + L)Te^{(n)}.$$

З (6) випливає, що при $n = 0, 1, 2, \ldots$ послідовність $Te^{(n)}$ подається у вигляді (2) – (3). Зафіксуємо довільно взяте $n = 0, 1, 2, \ldots$. Оскільки

$$(\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}e^{(n+1)} - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}l_{n+1}e^{(0)},$$

то, враховуючи (2) і (3), маємо

$$T(\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} = \frac{1}{\alpha_n}\Big(\mathcal{D}_\alpha[\Phi_{n+1}(y)] - \alpha_{n+1}l_{n+1}y\Big).$$

Але

$$\mathcal{D}_\alpha[\Phi_{n+1}(y)] - \alpha_{n+1}l_{n+1}y = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k l_k \mathcal{I}_\alpha^{n-k+1}y -$$

$$- \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{k-1}e^{(k-1)}\Lambda[\mathcal{I}_\alpha^{n-(k-1)+1}y] = \Phi_n(y).$$

Тому

$$T(\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} = \frac{1}{\alpha_n}\Phi_n(y).$$

З іншого боку, використовуючи (4) та (5), одержуємо, що

$$(\mathcal{I}_\alpha + L)Te^{(n)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_n}\Big(\Phi_n(y) - \Lambda[\Phi_n(y)]\Big) = \frac{1}{\alpha_n}\Phi_n(y).$$

Отже, оператор T, який визначається формулою (6), є справді переставним з $\mathcal{I}_\alpha + L$. Твердження доведене.

Перейдемо тепер до побудови згортки в E для оператора $\mathcal{I}_\alpha + L$, де $L \in E'$.

Теорема. *Нехай простір E має властивість (B), L – довільно фіксований функціонал з E', $\Lambda(x) = x_0 - L(\mathcal{D}_\alpha x)$, $l_k = \Lambda(e^{(k)})$ і виконується умова (7). Тоді формулою*

$$x * y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left[l_k \mathcal{I}_\alpha^{n-k+1} y - \right.$$

$$\left. - e^{(k)} \Lambda(\mathcal{I}_\alpha^{n-k+1} y) \right], \qquad (8)$$

де $x, y \in E$, визначається нетривіальна згортка для оператора $\mathcal{I}_\alpha + L$, причому

$$(\mathcal{I}_\alpha + L)x = x * e^{(0)}, \qquad x \in E. \qquad (9)$$

Доведення. Білінійність операції $*$ очевидна. Її нарізна неперервність випливає із збіжності в просторі E ряду з правої частини (8), яка була встановлена при доведенні твердження 3. Враховуючи це, комутативність операції (8) і рівність (9) досить перевірити на ортах.

Для довільних $n, m = 0, 1, 2, ...$ маємо

$$e^{(n)} * e^{(m)} =$$

$$= \sum_{k=\max\{n,m\}+1}^{n+m+1} \frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n \alpha_m} l_{n+m-k+1} e^{(k)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \frac{\alpha_{n+m-k+1}\alpha_k}{\alpha_n \alpha_m} l_{n+m-k+1} e^{(k)} = e^{(m)} * e^{(n)}.$$

Тому операція $*$ є комутативною. Крім цього, з останнього співвідношення випливає, що для $n = 0, 1, 2, ...$

$$e^{(n)} * e^{(0)} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} e^{(n+1)} - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} l_{n+1} e^{(0)} =$$

$$= (\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)},$$

звідки отримуємо істинність формули (9).

Доведемо далі, що для всіх $x, y \in E$ виконується рівність

$$(\mathcal{I}_\alpha + L)(x * y) = [(\mathcal{I}_\alpha + L)x] * y. \qquad (10)$$

Довільно зафіксуємо $y \in E$ і розглянемо в E оператор, який визначається формулою

$$Tx = \mathcal{D}_\alpha(x * y).$$

З твердження 2 випливає, що $T \in \mathcal{L}(E)$ і T є переставним з оператором $\mathcal{I}_\alpha + L$. Використовуючи (5), отримуємо, що $\Lambda(x * y) = 0$ для всіх $x \in E$. Тому, врахувавши (4), матимемо

$$x * y = (\mathcal{I}_\alpha + L)\mathcal{D}_\alpha(x * y) + \Lambda(x * y)e^{(0)} =$$

$$= (\mathcal{I}_\alpha + L)Tx = T(\mathcal{I}_\alpha + L)x =$$

$$= \mathcal{D}_\alpha\left([(\mathcal{I}_\alpha + L)x] * y\right).$$

Скориставшись ще раз (4), одержимо (10).

Доведемо ще асоціативність операції $*$. Для цього досить переконатися у тому, що

$$(x * y) * e^{(n)} = x * (y * e^{(n)}) \qquad (11)$$

для всіх $x, y \in E$ і $n = 0, 1, 2, \ldots$. Зафіксуємо довільно взяті $x, y \in E$ і скористаємось індукцією по n. З (9) і (10) випливає, що при $n = 0$ будемо мати правильну рівність. Припустимо, що (11) має місце для якогось $n \geq 0$. Тоді, враховуючи формули (9) і (10) та індуктивне припущення, отримуємо

$$(x * y) * e^{(n+1)} =$$

$$= (x * y) * \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} (\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} + l_{n+1}e^{(0)} \right) =$$

$$= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} (\mathcal{I}_\alpha + L)[x * (y * e^{(n)})] + l_{n+1} x * (y * e^{(0)}) =$$

$$= x * \left(y * \left[\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} (\mathcal{I}_\alpha + L)e^{(n)} + l_{n+1}e^{(0)} \right] \right) =$$

$$= x * (y * e^{(n+1)}),$$

що й треба було довести.

Отже, операція (8) є дійсно згорткою для оператора $\mathcal{I}_\alpha + L$ в E. Залишилось ще довести, що вона не маєануляторів у E. Нехай

$x \in E$ таке, що $x * y = 0$ для всіх $y \in E$. Зокрема, матимемо, що і $x * e^{(0)} = 0$, тобто $(\mathcal{I}_\alpha + L)x = 0$. Подіявши на обидві частини цієї рівності оператором $\mathcal{D}_\alpha$, отримаємо, що $x = 0$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dimovski I.H.* Convolutional calculus.— Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1982.— 198p.

2. *Köthe G.* Topologische lineare Räume. Bd.1.— Berlin, 1960.— 307 S.

3. *Лінчук С.С.* Про побудову згорток у просторах аналітичних функцій // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр.— Чернівці, 1990.— С.138—142.

4. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1983.— 160с.

5. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М.:Мир, 1971.— 359с.