УДК 517.956.4

©1999 р. В.С. Дронь, С.Д. Івасишен

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ТА КОРЕКТНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Встановлена коректна розв'язність задачі Коші для одного модельного виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова з нульовою початковою умовою у спеціальному ваговому гельдеровому просторі. Доведення грунтується на дослідженні гладкості відповідного об'ємного потенціалу.

The well posedness of the Cauchy problem for a model degenerate parabolic equation of Kolmogorov type with zero initial condition in special weight Gölder space is established. The proof is based on the study of smoothness of corresponding volume potential.

Розглядається неоднорідне модельне рівняння другого порядку, яке належить до класу ультрапараболічних рівнянь і є узагальненням відомого рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. У праці [1] показано відмінність у гладкості розв'язків такого рівняння та невиродженого параболічного рівняння. Похідні розв'язку, які входять в останнє рівняння, належать до того ж самого класу Гельдера, що й права частина рівняння. В [1] доведено, що другі похідні від розв'язку рівняння типу Колмогорова по просторових змінних першої групи задовольняють умову Гельдера з тим самим показником, що й права частина рівняння, а показник Гельдера для перших похідних від розв'язку по просторових змінних i-ї групи, $i \geq 2$, на $(2i-3)/(2i-1)$ менше показника Гельдера правої частини. Доведено точність одержаних оцінок.

У цій статті вводяться спеціальні гельдерові норми, в термінах яких вивчається гладкість об'ємного потенціалу та доводиться коректна розв'язність задачі Коші.

Нехай T – задане додатне число; $n_i, 1 \leq i \leq 3,$ – задані натуральні числа такі, що $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq n_1$, $N \equiv n_1+n_2+n_3$, $N_1 \equiv n_1 + 3n_2 + 5n_3$; $\{X \equiv (x_1, x_2, x_3),\ \Xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\} \subset \mathbb{R}^N$, якщо $\{x_i \equiv (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}), \xi_i \equiv (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in_i})\} \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq 3$; $\{\bar{X} \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),\ \bar{X}_2 \equiv (\xi_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),\ \bar{X}_3 \equiv (\xi_1, \xi_2, \bar{x}_3)\} \subset \mathbb{R}^N$, якщо $\bar{x}_i \equiv \equiv (\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{in_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}, 1 \leq i \leq 3, \bar{x}_{1j} \equiv x_{1j}$, $1 \leq j \leq n_1$, $\bar{x}_{2j} \equiv x_{2j} + (t-\tau)x_{1j}$, $1 \leq j \leq n_2$, $\bar{x}_{3j} \equiv x_{3j} + (t-\tau)x_{2j} + \frac{1}{2}(t-\tau)^2 x_{1j}, 1 \leq j \leq n_3$;

$$\rho(t-\tau, X, \Xi) \equiv (t-\tau)^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}(\bar{x}_{1i} - \xi_{1i})^2 +$$

$$(t-\tau)^{-3}\sum_{i=1}^{n_2}(\bar{x}_{2i}-\xi_{2i})^2 + (t-\tau)^{-5}\sum_{i=1}^{n_3}(\bar{x}_{3i}-\xi_{3i})^2;$$

Z_+^n- множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $m \equiv (m_1, m_2, m_3) \in Z_+^N$, якщо $m_i \equiv (m_{i1}, \ldots, m_{in_i}) \in Z_+^{n_i}, |m_i| = \sum\limits_{j=1}^{n_i} m_{ij}, 1 \leq i \leq 3$, $M \equiv |m_1| + 2(|m_2| + |m_3|)$; $\partial_{x_i}^{m_i} \equiv \prod_{j=1}^{n_i} \partial_{x_{ij}}^{m_{ij}}$, $\partial_X^m \equiv \prod_{i=1}^3 \partial_{x_i}^{m_i}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $m_i \in Z_+^{n_i}$, $1 \leq i \leq 3$; $[a, X] \equiv \sum_{i=1}^3 a_i |x_i|^2$, якщо $a = (a_1, a_2, a_3), X = (x_1, x_2, x_3)$; $B_R \equiv \{X \in \mathbb{R}^N | |X| \leq R\}$ при $R \geq 0$, $\Pi_\Omega \equiv \Omega \times \mathbb{R}^N, \Omega \subset \mathbb{R}$.

Розглянемо рівняння

$$(Lu)(t,X) \equiv (\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}^2)u(t,X) = f(t,X), \quad (t,X) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1}$$

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1) задається виразом [2]

$$Z(t,X;\tau,\Xi)=$$
$$=12^{n_2/2}720^{n_3/2}(4\pi)^{-N/2}(t-\tau)^{-N_1/2}\times$$
$$\times exp\{-\frac{1}{4(t-\tau)}\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\xi_{1j})^2-$$
$$-\frac{3}{(t-\tau)^3}\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\xi_{2j}+\frac{1}{2}(t-\tau)(x_{1j}+\xi_{1j}))^2-$$
$$-\frac{180}{(t-\tau)^5}\sum_{j=1}^{n_3}(x_{3j}-\xi_{3j}+\frac{1}{2}(t-\tau)(x_{2j}+\xi_{2j})+$$
$$+\frac{1}{12}(t-\tau)^2(x_{1j}-\xi_{1j}))^2\},\quad \tau<t,\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N, \tag{2}$$

і має такі властивості:

$$|\partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)|\leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-(N_1+|m_1|+3|m_2|+5|m_3|)/2}\times$$
$$\times exp\{-c\rho(t-\tau,X,\Xi)\},\quad \tau<t,\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N, \tag{3}$$

де $m\in Z_+^N$, $c>0$ (через C тут і далі позначається додатна стала без урахування її величини);

$$\partial_{x_{ij}}\int\limits_{\mathbb{R}^{l-i+1}} Z(t,X;\tau,\Xi)d\xi_{ij}d\xi_{i+1,j}\dots d\xi_{lj}=0 \tag{4}$$

при $1\leq i\leq 3$, $1\leq j\leq n_i$ і $l\geq i$ такому, що $n_{l+1}<j\leq n_l$.

Легко переконатися, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} t^{-N_1/2}exp\{-\delta\rho(t,X,\Xi)\}d\Xi=(\pi/\delta)^{N/2},$$
$$t>0,X\in\mathbb{R}^N,\delta>0, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)d\Xi=1,\quad 0\leq\tau<t,X\in\mathbb{R}^N. \tag{6}$$

Покладемо

$$k(t,a)\equiv(k_1(t,a_1),k_2(t,a_2),k_3(t,a_3)),$$
$$s(t)\equiv(s_1(t),s_2(t),s_3(t));$$
$$k_i(t,a_i)\equiv\frac{c_0a_i}{c_0-a_it^{2i-1}},\quad 1\leq i\leq 3;$$
$$s_1(t)\equiv k_1(t,a_1)+2t^2k_2(t,a_2)+\frac{3}{4}t^4k_3(t,a_3),$$
$$s_2(t)\equiv 2k_2(t,a_2)+3t^2k_3(t,a_3),$$
$$s_3(t)\equiv 3k_3(t,a_3),\quad 0\leq t\leq T,$$

де $0<c_0<c$, c – стала з оцінки (3), $a\equiv(a_1,a_2,a_3)$, $a_i,1\leq i\leq 3$, – невід'ємні числа такі, що

$$T<\min_{1\leq i\leq 3}(\frac{c_0}{ia_i})^{1/(2i-1)}=\min_{1\leq i\leq 3}(\frac{c_0}{s_i(0)})^{1/(2i-1)}.$$

Властивості функцій k,s досліджено в [3]. Зокрема, встановлено, що

$$a_i\leq k_i(\tau,a_i)<k_i(t,a_i)\leq s_i(t),$$
$$0\leq\tau<t\leq T,1\leq i\leq 3; \tag{7}$$
$$-c_0\rho(t,X,\Xi)+[a,\Xi]\leq$$
$$\leq[k(t,a),\bar X|_{\tau=0}]\leq[s(t),X],$$
$$t\in(0,T],\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N; \tag{8}$$
$$k_i(t-\tau,k_i(\tau,a_i))\leq k_i(t,a_i),$$
$$0\leq\tau<t\leq T,1\leq i\leq 3. \tag{9}$$

Використовуючи ці властивості, можна довести, що

$$-c_0\rho(t-\tau,X,\Xi)+[k(\tau,a),\Xi]\leq$$
$$\leq[k(t,a),\bar X]\leq[s(t),X],$$
$$0\leq\tau<t\leq T,\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^N. \tag{10}$$

Дійсно,

$$-c_0\rho(t-\tau,X,\Xi)+[k(\tau,a),\Xi]\leq$$
$$\leq[k(t-\tau,k(\tau,a)),\bar X]\leq$$
$$\leq[k(t,a),\bar X]\leq k_1(t,a_1)\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}^2+$$
$$+2k_2(t,a_2)\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}^2+(t-\tau)^2x_{1j}^2)+$$
$$+3k_3(t,a_3)\sum_{j=1}^{n_3}(x_{3j}^2+(t-\tau)^2x_{2j}^2+\frac{(t-\tau)^4}{4}x_{1j}^2))\leq$$

$$\leq [s(t), X].$$

Користуватимемось ще такою очевидною оцінкою:

$$exp\{-c_1\rho(t-\tau, X, \Xi)\}(\delta_1 \sum_{j=1}^{n_1} |\bar{x}_{1j} - \xi_{1j}|^{\alpha_1} +$$

$$+\delta_2 \sum_{j=1}^{n_2} |\bar{x}_{2j} - \xi_{2j}|^{\alpha_2} + \delta_3 \sum_{j=1}^{n_3} |\bar{x}_{3j} - \xi_{3j}|^{\alpha_3}) \leq$$

$$\leq C(\delta_1(t-\tau)^{\alpha_1/2} + \delta_2(t-\tau)^{3\alpha_2/2} +$$

$$+\delta_3(t-\tau)^{5\alpha_3/2})exp\{-c_2\rho(t-\tau, X, \Xi)\}, \quad (11)$$

$0 \leq \tau < t \leq T, \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N, \delta_j \in \{0,1\}$, $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq 3$, $c_2 \in (0, c_1)$.

Означимо потрібні норми та простори функцій. Покладемо

$$||f||_0^\alpha \equiv$$

$$\equiv \sup_{(t,X)\in\Pi_{(0,T]}} (|f(t,X)|exp\{-[k(t,a),X]\}) +$$

$$+ \sup_{\substack{\{(t,X),(t,\Xi)\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ X\neq\Xi}} ((|f(t,X) - f(t,\Xi)|) \times$$

$$\times(|x_1 - \xi_1|^\alpha + |x_2 - \xi_2|^{(\alpha+1)/3} +$$

$$+|x_3 - \xi_3|^{(\alpha+3)/5})^{-1} \times$$

$$\times(exp\{[k(t,a),X]\} + exp\{[k(t,a),\Xi]\})^{-1});$$

$$||u||_2^\alpha \equiv \sum_{M\leq 2} \sup_{(t,X)\in\Pi_{(0,T]}} \frac{|\partial_X^m u(t,X)|}{exp\{[s(t),X]\}} +$$

$$+ \sum_{M=2} \sup_{\substack{\{(t,X),(t,\Xi)\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ X\neq\Xi}} \Bigg(|\partial_X^m u(t,X) -$$

$$-\partial_X^m u(t,\Xi)| \cdot \Bigg(\sum_{i=1}^3 |x_i - \xi_i|^{\alpha/(2i-1)} \times$$

$$\times(exp\{[s(t),X]\} + exp\{[s(t),\Xi]\})\Bigg)^{-1}\Bigg) +$$

$$+ \sum_{|m_1|=1} \sup_{\substack{\{(t,X),(t,\Xi_1)\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ X\neq\Xi_1}} \Bigg(|\partial_{x_1}^{m_1} u(t,X) -$$

$$-\partial_{x_1}^{m_1} u(t,\Xi_1)| \cdot \Bigg(\sum_{i=2}^3 |x_i - \xi_i|^{(\alpha+1)/(2i-1)} \times$$

$$\times(exp\{[s(t),X]\} + exp\{[s(t),\Xi_1]\})\Bigg)^{-1}\Bigg),$$

де $\Xi_1 \equiv (x_1, \xi_2, \xi_3)$;

$$||u(t,\cdot)||^{s(t)} \equiv \sup_{X\in\mathbb{R}^N} (|u(t,X)exp\{-[s(t),X]\}|).$$

Через $C_p^\alpha, p \in \{0,2\}, \alpha \in (0,1]$, позначимо простір неперервних у $\Pi_{(0,T]}$ функцій, які мають неперервні у $\Pi_{(0,T]}$ похідні $\partial_X^m, M \leq p$, та скінченну норму $||\cdot||_p^\alpha$.

Нехай $\alpha_1 \in (0,1], \alpha_i \in (\frac{2i-3}{2i-1}, \frac{2i-2}{2i-1}], 2 \leq i \leq 3$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і покладемо

$$||f||_0 \equiv$$

$$\equiv \sup_{(t,X)\in\Pi_{(0,T]}} (|f(t,X)|exp\{-[k(t,a),X]\}) +$$

$$+ \sup_{\substack{\{(t,X),(t,\Xi)\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ X\neq\Xi}} (\frac{|f(t,X) - f(t,\Xi)|}{\sum_{i=1}^3 |x_i - \xi_i|^{\alpha_i}} \times$$

$$\times(exp\{[k(t,a),X]\} + exp\{[k(t,a),\Xi]\})^{-1}).$$

Через $C_0^{\bar{\alpha}}$ позначимо простір неперервних у $\Pi_{(0,T]}$ функцій зі скінченною нормою $||\cdot||_0$.

Теорема 1. *Нехай $f \in C_0^{\bar{\alpha}}$. Тоді функція*

$$u(t,X) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)f(\tau,\Xi)d\Xi,$$

$$(t,X) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (12)$$

є регулярним розв'язком рівняння (1), причому

$$\partial_X^m u(t,X) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)F_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi,$$

$$(t,X) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (13)$$

$$\lim_{t\to 0} \sup_{X\in\mathbb{R}^N} (|\partial_X^m u(t,X)|exp\{-[s(t),X]\}) = 0, \quad (14)$$

$0 < M \leq 2$, *де* $F_m(\tau,\Xi;t,X) \equiv$

$$\equiv \begin{cases} f(\tau,\Xi), & |m_1| = 1; \\ f(\tau,\Xi) - f(\tau,\bar{X}), & |m_1| = 2; \\ f(\tau,\Xi) - f(\tau,\bar{X}_2), & |m_2| = 1; \\ f(\tau,\Xi) - f(\tau,\bar{X}_3), & |m_3| = 1; \end{cases}$$

$$\partial_t u(t,X) = f(t,X)+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$
$$\times(f(\tau,\Xi)-f(\tau,\bar{X}_3))d\Xi+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$
$$\times(f(\tau,\bar{X}_3)-f(\tau,\bar{X}_2))d\Xi+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$
$$\times(f(\tau,\bar{X}_2)-f(\tau,\bar{X}))d\Xi, \quad (t,X)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{15}$$

Доведення. Досить довести правильність рівностей (13)-(15). Оскільки за означенням та (7)

1) при $|m_1|=1, |m_2|=|m_3|=0$

$$|F_m(\tau,\Xi;t,X)| \le ||f||_0 exp\{[k(\tau,a),\Xi]\} \le$$
$$\le ||f||_0 exp\{[k(t,a),\Xi]\};$$

2) при $|m_1|=2, |m_2|=|m_3|=0$

$$|F_m(\tau,\Xi;t,X)| \le ||f||_0 \sum_{i=1}^3 |\bar{x}_i-\xi_i|^{\alpha_i}\times$$
$$\times(exp\{[k(t,a),\Xi]\}+exp\{[k(t,a),\bar{X}]\});$$

3) при $|m_2|=1, |m_1|=|m_3|=0$

$$|F_m(\tau,\Xi;t,X)| \le ||f||_0 \sum_{i=2}^3 |\bar{x}_i-\xi_i|^{\alpha_i}\times$$
$$\times(exp\{[k(t,a),\Xi]\}+exp\{[k(t,a),\bar{X}_2]\});$$

4) при $|m_3|=1, |m_1|=|m_2|=0$

$$|F_m(\tau,\Xi;t,X)| \le ||f||_0 |\bar{x}_3-\xi_3|^{\alpha_3}\times$$
$$\times(exp\{[k(t,a),\Xi]\}+exp\{[k(t,a),\bar{X}_3]\}),$$

то з урахуванням (10) та (11) при $c_1 = c - c_0$, маємо

1) при $|m_1|=1, |m_2|=|m_3|=0$

$$exp\{-c\rho(t-\tau,X,\Xi)\}|F_m(\tau,\Xi;t,X)| \le$$
$$\le Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0 exp\{-c_1\rho(t-\tau,X,\Xi)\}; \tag{16}$$

2) при $M=2, |m_p|>0$

$$exp\{-c\rho(t-\tau,X,\Xi)\}|F_m(\tau,\Xi;t,X)| \le$$
$$\le Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0 exp\{-c_2\rho(t-\tau,X,\Xi)\}\times$$
$$\times\sum_{i=p}^3 (t-\tau)^{\alpha_i(2i-1)/2}. \tag{17}$$

Поєднуючи оцінки (16),(17) з рівністю (5), маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-\tau)^{-N_1/2} exp\{-c\rho(t-\tau,X,\Xi)\}\times$$
$$\times|F_m(\tau,\Xi;t,X)|d\Xi \le Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$
$$\times\begin{cases} \sum\limits_{i=p}^3 (t-\tau)^{\alpha_i(2i-1)/2}, M=2, |m_p|>0; \\ 1, \quad |m_1|=1, |m_2|+|m_3|=0, \end{cases} \tag{18}$$
$$0\le\tau<t\le T, X\subset\mathbb{R}^N.$$

Розглянемо

$$v(t,X;\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;\tau,\Xi)F_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi,$$
$$X\in\mathbb{R}^N, 0\le\tau<t\le T.$$

Можливість застосування операції $\partial_X^m, M\le 2$, під знаком інтеграла функції v можна обгрунтувати, підставивши явний вираз для $\partial_X^m Z$ та зробивши заміну змінних інтегрування за формулами

$$\bar{x}_1-\xi_1=(t-\tau)^{1/2}\xi_1', \bar{x}_2-\xi_2=(t-\tau)^{3/2}\xi_2',$$
$$\bar{x}_3-\xi_3=(t-\tau)^{5/2}\xi_3'.$$

Тоді на підставі (16) та (17) легко знаходиться у довільному компакті $K\subset\mathbb{R}^N$ інтегровна мажоранта, не залежна від X. Крім того, на підставі (18) одержуємо

1) при $M=2, |m_p|>0$

$$|\partial_X^m v(t,X)| \le Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$
$$\times(t-\tau)^{-|m_p|(2p-1)/2}\sum_{i=p}^3 (t-\tau)^{\alpha_i(2i-1)/2} \le$$

$\leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0(t-\tau)^{(\alpha_p-|m_p|)(2p-1)/2}$;

2) при $|m_1|=1, |m_2|=|m_3|=0$

$|\partial_X^m v(t,X)| \leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0(t-\tau)^{-1/2}$.

Це доводить можливість диференціювання в (13) під знаком інтеграла.

Завершення доведення рівності (13) випливає з рівності нулю на підставі (4) інтеграла

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$
$$\times(f(\tau,\Xi)-F_m(\tau,\Xi;t,X))d\Xi.$$

Зауважимо, що на підставі рівності (4) вираз (13) можна змінити та доповнити (12). Матимемо

$$\partial_X^m u(t,X)=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^N}\partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi, \tag{19}$$

$(t,X)\in\Pi_{(0,T]}$, $m\in Z_+^N, M\leq 2$, де

$$\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)\equiv$$
$$\equiv\left\{\begin{array}{c} f(\tau,\Xi), \quad |m|=0;\\ f(\tau,\Xi)-f(\tau,\bar{X}), \quad |m_1|>0;\\ f(\tau,\Xi)-f(\tau,\bar{X}_2), \quad |m_2|=1;\\ f(\tau,\Xi)-f(\tau,\bar{X}_3), \quad |m_3|=1.\end{array}\right.$$

Відповідно зміниться оцінка (18):

$$I(X)\equiv\int_{\mathbb{R}^N}(t-\tau)^{-N_1/2}\times$$
$$\times exp\{-c\rho(t,X,\Xi)\}|\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)|\leq$$
$$\leq\left\{\begin{array}{c} Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\sum\limits_{i=p}^{3}(t-\tau)^{\alpha_i(2i-1)/2},\\ 0<M\leq 2, |m_p|>0;\\ Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0, |m|=0,\end{array}\right. \tag{20}$$

$0\leq\tau<t\leq T, X\subset\mathbb{R}^N$.

Знайдемо оцінки для функції u та її похідних (19). Якщо використати оцінку (3) та нерівності (20), то одержимо

1) при $M\leq 2, |m_p|>0$

$$|\partial_X^m u(t,X)|\leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$
$$\times\int_0^t(t-\tau)^{-|m_p|(2p-1)/2}\sum_{i=p}^{3}(t-\tau)^{\alpha_i(2i-1)/2}d\tau\leq$$
$$\leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$
$$\times\int_0^t(t-\tau)^{(\alpha_p-|m_p|)(2p-1)/2}d\tau=$$
$$=Cexp\{[s(t),X]\}t^{(\alpha_p-|m_p|)(2p-1)/2+1}||f||_0;$$

2) при $|m|=0$

$$|u(t,X)|\leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\int_0^t d\tau=$$
$$=Cexp\{[s(t),X]\}t||f||_0.$$

Отже,

$$|\partial_X^m u(t,X)|\leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{c} t, \quad |m|=0,\\ t^{(\alpha_p-|m_p|)(2p-1)/2+1}, \ 0<M\leq 2, |m_p|>0,\end{array}\right.$$
$$(t,X)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{21}$$

що доводить співвідношення (14).

Візьмемо досить мале h $(0<h\leq h_0<T)$ і покладемо

$$U_h(t,X)=\int_0^{t-h}\int_{\mathbb{R}^N}Z(t,X;\tau,\Xi)f(\tau,\Xi)d\Xi,$$
$$(t,X)\in\Pi_{(h_0,T]}.$$

Тоді

$$\partial_t U_h(t,X)=\int_{\mathbb{R}^N}Z(t,X;t-h,\Xi)f(t-h,\Xi)d\Xi+$$
$$+\int_0^{t-h}d\tau\int_{\mathbb{R}^N}\partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$
$$\times(f(\tau,\Xi)-f(\tau,\bar{X}_3))d\Xi+$$

$$+\int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\bar{X}_3)-f(\tau,\bar{X}_2))d\Xi+$$

$$+\int_0^{t-h} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\bar{X}_2)-f(\tau,\bar{X}))d\Xi+$$

$$+\int_0^{t-h}\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)d\Xi f(\tau,\bar{X})d\tau \equiv$$

$$\equiv I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

На підставі (6) $I_5=0$. Рівномірна на довільному компакті збіжність інтегралів I_2, I_3, I_4 доводиться подібно до того, як було обгрунтовано можливість диференціювання під знаком інтеграла в v. Використавши оцінки

$$|\partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-(N_1+5)/2}exp\{-c_1\rho(t-\tau,X,\Xi)\},$$

$$|\partial_t \int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z(t,X;\tau,\Xi)d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-(n_1+3n_2+3)/2}\times$$

$$\times exp\{-c_1\rho(t-\tau,x_1,x_2,0,\xi_1,\xi_2,0)\},$$

$$|\partial_t \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z(t,X;\tau,\Xi)d\xi_2 d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-(n_1+2)/2}\times$$

$$\times exp\{-c_1\rho(t-\tau,x_1,0,0,\xi_1,0,0)\},$$

$\tau<t$, $\Xi\in\mathbb{R}$, $X\in K$ ($K\subset\mathbb{R}$ – довільний компакт), $0<c_1<c$ (c – стала з оцінки (3)); і повторивши дії, аналогічні проведеним при доведенні збіжності інтегралів у (13), встановимо збіжність інтегралів у виразі

$$I_0\equiv\int_0^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\Xi)-f(\tau,\bar{X}_3))d\Xi+$$

$$+\int_0^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\bar{X}_3)-f(\tau,\bar{X}_2))d\Xi+$$

$$+\int_0^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\bar{X}_2)-f(\tau,\bar{X}))d\Xi$$

і те, що $\lim_{h\to 0}(I_2+I_3+I_4)=I_0$.

На підставі граничної властивості інтеграла Пуассона $I_1\to f(t,X)$ при $h\to 0$. Рівність (15), таким чином, доведена.

Теорема 2. *Нехай $f\in C_0^\alpha$. Тоді об'ємний потенціал (12) належить до простору C_2^α, причому*

$$||u||_2^\alpha\le C||f||_0^\alpha,\quad C>0. \tag{22}$$

Доведення. Покладемо $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\frac{\alpha+1}{3}$, $\alpha_3=\frac{\alpha+3}{5}$, $\alpha\in(0,1]$. За цієї умови норми $||\cdot||_0$ і $||\cdot||_0^\alpha$, а також простори $C_0^{\bar{\alpha}}$ і C_0^α є тотожними. Враховуючи твердження теореми 1, потрібно тільки довести нерівність (22). На підставі (21)

$$|\partial_X^m u(t,X)|exp\{-[s(t),X]\}\le C||f||_0,$$

$$M\le 2,\quad (t,X)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{23}$$

Оцінимо другу і третю складові норми $||\cdot||_2^\alpha$. Нехай $H\in\mathbb{R}^N$, $H\equiv(h_1,h_2,h_3)$, $h_i\equiv(h_{i1},\dots,h_{in_i})\in\mathbb{R}^{n_i}, 1\le i\le 3$. Покладемо $h_{ij}=0, 1\le j\le n_i, i\ne l$, $|h_l|>0$. Оцінюватимемо вираз

$$\Delta_{x_l}^{h_l}\partial_X^m u(t,X)\equiv\partial_X^m u(t,X+H)-\partial_X^m u(t,X),$$

коли $l|m_1|\ne 1$.

1. Нехай $|h_l|\ge t^{(2l-1)/2}$. Тоді на підставі (21)

$$|\Delta_{x_l}^{h_l}\partial_X^m u(t,X)|\equiv$$

$$\equiv|\partial_X^m u(t,X+H)|+|\partial_X^m u(t,X)|\le$$

$$\le C(exp\{[s(t),X+H]\}+exp\{[s(t),X]\})||f||_0\times$$

$$\times t^{(\alpha_p-|m_p|)(2p-1)/2+1}\le C(exp\{[s(t),X+H]\}+$$

$$+exp\{[s(t),X]\})||f||_0|h_l|^{((\alpha_p-|m_p|)(2p-1)+2)/(2l-1)},$$

$$(t,X)\in\Pi_{(0,T]}.$$

2. Нехай $0 < |h_l| < t^{(2l-1)/2}$. Очевидно, що

$$\Delta_{x_l}^{h_l}\partial_X^m u(t,X) = \int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Delta_{x_l}^{h_l}(\partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X))d\Xi+$$

$$+\int\limits_{t-|h_l|^{2/(2l-1)}}^{t} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}\partial_X^m Z(t,X+H;\tau,\Xi)\times$$

$$\times\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X+H)d\Xi-$$

$$-\int\limits_{t-|h_l|^{2/(2l-1)}}^{t} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}\partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)\times$$

$$\times\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi\equiv J_1+J_2-J_3.$$

На підставі оцінок (3) та (20)

$$|J_2-J_3|\le|J_2|+|J_3|\le$$

$$\le\int\limits_{t-|h_l|^{2/(2l-1)}}^{t}(t-\tau)^{-|m_p|(2p-1)/2}I(X+H)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t-|h_l|^{2/(2l-1)}}^{t}(t-\tau)^{-|m_p|(2p-1)/2}I(X)d\tau\le$$

$$\le C(exp\{[s(t),X+H]\}+exp\{[s(t),X]\})||f||_0\times$$

$$\times\int\limits_{t-|h_l|^{2/(2l-1)}}^{t}(t-\tau)^{\alpha_p-|m_p|(2p-1)/2}d\tau\le$$

$$\le C(exp\{[s(t),X+H]\}+exp\{[s(t),X]\})\times$$

$$\times||f||_0|h_l|^{((\alpha_p-|m_p|)(2p-1)+2)/(2l-1)},$$

$$(t,X)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Вираз J_1 можна переписати у вигляді

$$J_1=\int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}\partial_X^m Z(t,X+H;\tau,\Xi)\times$$

$$\times\Delta_{x_l}^{h_l}\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi+\int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Delta_{x_l}^{h_l}\partial_X^m Z(t,X;\tau,\Xi)\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi\equiv$$

$$\equiv J_{11}+J_{12}.$$

На підставі (4) $J_{11}=0$. Для оцінки J_{12} використаємо інтегральну теорему про середнє:

$$J_{12}=|h_l|\int\limits_0^1 d\theta\int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^N}\partial_s\partial_X^m Z(t,X+\theta H;\tau,\Xi)\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)d\Xi,$$

де $s-$ напрямок від точки X до точки $X+H$.

На підставі нерівності [4, с.78] $exp\{-\delta(x+\Delta)^2\}\le Cexp\{-\delta x^2\}$ при $|\Delta|\le 1$, $\delta>0$, маємо

$$exp\{-c\rho(t-\tau,X+\theta H,\Xi)\}\le$$

$$\le Cexp\{-c\rho(t-\tau,X,\Xi)\}$$

при $\tau\in[0,t-|h_l|^{2/(2l-1)}],\theta\in[0,1]$.

Враховуючи оцінки (3) та останню нерівність, можемо записати

$$|J_{12}|=|h_l|\int\limits_0^1 d\theta\int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\sum_{i=1}^{n_l}\partial_{x_{li}}\partial_X^m Z(t,X+\theta H;\tau,\Xi)cos(s,x_{li})\times$$

$$\times\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)|d\Xi\le$$

$$\le C|h_l|\int\limits_0^1 d\theta\int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^N}(t-\tau)^{-(N_1+|m|_p|(2p-1)+(2l-1))/2}\times$$

$$\times exp\{-c\rho(t-\tau,X+\theta H,\Xi)\}\times$$

$$\times|\bar{F}_m(\tau,\Xi;t,X)|d\Xi\le C|h_l|\times$$

$$\times\int\limits_0^1\int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}}(t-\tau)^{-(|m|_p|(2p-1)+(2l-1))/2}\times$$

$$\times I(X)d\theta d\tau \leq C|h_l|exp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$

$$\times \int\limits_0^{t-|h_l|^{2/(2l-1)}} (t-\tau)^{((\alpha_p-|m|_p)(2p-1)-2l+1)/2}d\tau \leq$$

$$\leq Cexp\{[s(t),X]\}||f||_0\times$$
$$\times|h_l|^{((\alpha_p-|m|_p)(2p-1)-2l+3)/(2l-1)},$$
$$(t,X)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Отже,

$$\frac{|\Delta_{x_l}^{h_l}\partial_X^m u(t,X)|}{exp\{[s(t),X+H]\}+exp\{[s(t),X]\}}\leq$$

$$\leq C||f||_0|h_l|^{((\alpha_p-|m_p|)(2p-1)+2)/(2l-1)}, \qquad (24)$$

$1\leq l\leq 3, 0<M\leq 2, l|m_1|\neq 1, (t,X)\in\Pi_{(0,T]}$.

Нерівності (23) і (24) доводять (22) за умов на $\alpha_i, 1\leq i\leq 3$, вказаних на початку доведення.

Теорема 3. *У класі C_2^α існує не більше одного розв'язку рівняння (1), для якого*

$$\lim_{t\to 0}||u(t,\cdot)||^{s(t)}=0. \qquad (25)$$

Доведення. Нехай $u\in C_2^\alpha$ – розв'язок рівняння (1), для якого виконується умова (25). Тоді, очевидно, для нього виконуються умови

А. $\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||^{s(t)}\leq C$,

В. $u(t,\cdot)\to 0$ слабко при $t\to 0$.

Доведення теореми випливає з такого твердження: *за умов А та В не існує нетривіального розв'язку однорідного рівняння (1).*

Доведення цього твердження проводиться аналогічно доведенню леми 4 з [3]. У лемі тільки ставилася сильніша за А умова з нормою $||\cdot||^{k(t,a)}$.

Зауваження 1. *З доведення теореми 3 випливає, що клас єдиності можна розширити. А саме, не існує більше одного розв'язку рівняння (1), для якого виконуються умови А і В.*

Зауваження 2. *З теорем 1-3 випливає коректна розв'язність задачі Коші (1), (25) у класі C_2^α.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шатыро Я.И.* О гладкости решений некоторых вырожденных уравнений второго порядка // Мат. заметки.— 1971.— **10**, N1.— С.101—111.

2. *Ейдельман С.Д., Івасишен С.Д., Тичинська Л.М.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр.— Чернівці, 1990.— С.32—40.

3. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений.— Черновиц. ун-т.— Черновцы, 1989.— 62с.— Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, N1762-Ук89.

4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443с.