УДК 514.76

©1999 р. Р.Ф. Домбровський

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

# Ф-СТРУКТУРА НА НОРМАЛІЗОВАНОМУ ПІДМНОГОВИДІ МНОГОВИДУ З $O$-ДЕФОРМОВАНИМ АФФІНОРНИМ ПОЛЕМ

На нормалізованому підмноговиді многовиду з $O$-деформованим аффінорним полем існує Ф-структура, яка узагальнює $(f\xi\eta\rho)$-структуру, введену Г.Ф.Лаптєвим і Н.М.Остіану.

The normalized submanifold existence of a variety with $O$-unformated differentiable affinorial field of a $\Phi$-structure is proved which generalizes $(f\xi\eta\rho)$-structure entered Laptev and Ostianu.

1. Нехай $M_n$ — диференційовний многовид класу $C^\infty$ і $U$ — деякий окіл довільної точки $x_0 \in M_n$. Будь-яку точку околу $U \subset M_n$ позначимо через $x$. Якщо $T^s(M_n)$ — дотичне розшарування порядку $s$ над околом $U$, то $T^s(M_n) = \bigcup\limits_{x\in M_n} T^s_x(M_n)$, де $T^s_x(M_n)$ — шар розшарування в точці $x$. Над $M_n$ можна ввести розшарування базисів $R^s(M_n) = \bigcup\limits_{x\in M_n} R^s_x(M_n)$, де $R^s_x(M_n)$ — множина всіх базисів у точці $x$ з базовими векторами $\underset{x}{\vec{e}}_J, \underset{x}{\vec{e}}_{J_1J_2}, ..., \underset{x}{\vec{e}}_{J_1...J_s}$, $J, ..., J_\nu = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{1,s}$. Над околом $U$ введемо $n$ лінійних лінійно незалежних диференціальних форм $\omega^J$ (структурні форми многовиду $M_n$ [1]), рівняння структури яких має вигляд

$$d\omega^J = \omega^L \wedge \omega^J_L,$$

$$d\omega^J_L = \omega^K_L \wedge \omega^J_K + \omega^K \wedge \omega^J_{KL}, \omega^J_{KL} = \omega^J_{LK}. \quad (1)$$

При продовженнях системи (1) над $U$ виникає послідовність лінійних диференціальних форм $\omega^J_L, \omega^J_{L_1L_2}, ..., \omega^J_{L_1...L_s}$, яка має розшаровану структуру відносно структурних форм многовиду $M_n$ [2]. У фіксованій точці $x$ многовиду $M_n$ форми $\omega^J$ перетворюються в нуль, а форми $\bar{\omega}^J_L, \bar{\omega}^J_{L_1L_2}, ..., \bar{\omega}^J_{L_1...L_s}$ стають інваріантними формами деякої лінійної групи, яку називають диференціальною групою порядку $s$ і позначають $D^s_n$ [3]. У дотичному просторі $T^s_x(M_n)$ група $D^s_n$ зображена групою перетворень базису $\{\underset{x}{\vec{e}}_L, \underset{x}{\vec{e}}_{L_1L_2}, ..., \underset{x}{\vec{e}}_{L_1...L_s}\}$. Зокрема, група $D^1_n$ з інваріантними формами $\bar{\omega}^J_K$ зображена в шарах дотичного розшарування першого порядку, яке будемо позначати $T(M_n)$, групою перетворень локального векторного базису $\underset{x}{\vec{e}}_J$: $\delta\underset{x}{\vec{e}}_J = \bar{\omega}^K_J \underset{x}{\vec{e}}_K$.

2. Приєднаємо до групи $D^1_n$ многовиду $M_n$ диференційовне поле геометричного об'єкта $F = F^K_J \underset{x}{\vec{e}}_K \otimes \underset{\bar{x}}{\varepsilon}^J$, де $\underset{\bar{x}}{\varepsilon}^J$ — базис ковекторів, взаємний з базисом $\underset{x}{\vec{e}}_K$. Функції $F^K_J$ утворюють тензор типу $(1,1)$ — аффінор у точці $x$ многовиду $M_n$. Вважаємо, що поле аффінора $F$ $O$-деформоване [4-5]. $O$-деформованість аффінорного поля $F$ на многовиді $M_n$ означає, що в кожній точці $x$ многовиду $M_n$ існує базис простору $T_x(M_n)$, в якому матриця аффінора $F$ може бути зведена до одного і того ж фіксованого вигляду. Адаптованими базисами для поля аффінора $F$ на $M_n$ називаються ті базиси в $T_x(M_n)$, відносно яких матриця аффінора $F$ зберігає фіксований вигляд. Інваріантність поля $F$ на многовиді $M_n$ еквівалентна умовам

$$dF^K_J - F^K_L\omega^L_J + F^L_J\omega^K_L = F^K_{JL}\omega^L. \quad (2)$$

Функції $F^K_{JL}$ називаються додатковими функціями, які визначають аффінорне поле $F = \{F^K_J\}$ [4-5].

Замкнемо систему (2) і використаємо (1), тоді отримаємо

$$dF^K_{JL} - F^K_{PL}\omega^P_J - F^K_{JP}\omega^P_L + F^P_{JL}\omega^K_P +$$

$$+F^P_J\omega^K_{PL} - F^K_P\omega^P_{JL} = F^K_{JLP}\omega^P, \quad (3)$$

$F^K_{JLP} = F^K_{JPL}$ — коефіцієнти, отримані внаслідок застосування леми Е.Картана [3]. Продовжений геометричний об'єкт $\{F^K_J, F^K_{JL}\}$ аффінорного поля $F$ на $M_n$ приєднаний до диференціальної групи $D^2_n$. Диференціальна геометрія аффінорного поля $F$ на $M_n$ на диференціальних околах вищих порядків визначається продовженими геометричними об'єктами $\{F^K_J, F^K_{JL}, F^K_{JLP}, ..., F^K_{J_1...J_s}\}$, симетричними за будь-якою парою нижніх індексів і приєднаних до групи $D^s_n$. Будь-які додаткові умови для структурного об'єкта поля $F$ або для продовжених об'єктів приводять до спеціальних класів многовидів з аффінорною структурою. Наприклад, користуючись рівняннями (1), (2) і (3), можна переконатися, що величини

$$N^J_{KL} := F^P_L F^J_{KP} - F^P_K F^J_{LP} - -F^J_P F^P_{LK} + F^J_P F^P_{KL} \quad (4)$$

утворюють тензор типу $(1,2)$ — тензор Нейєнхейса аффінорного поля $F$. Рівність нулеві тензора Нейєнхейса аффінорного $O$-деформованого поля на диференційовному многовиді не завжди є необхідною і достатньою умовою інтегровності аффінорної структури. Якщо, наприклад, мінімальний поліном аффінора в адаптованому базисі має прості корені, то інтегровність аффінорної структури еквівалентна рівності нулеві тензора Нейєнхейса її структурного аффінора [5].

Зауважимо, що многовид $M_n$ з $O$-деформованим полем аффінора $F$ з властивостями $F^2 = -id$ або $F^2 = id$, або $F^2 = 0$ називається, відповідно, многовидом майже комплексної структури або многовидом $\pi$-структури, або многовидом майже дотичної структури. Многовиди з цими структурами — це многовиди аффінорної структури типу унітальної асоціативної алгебри рангу 2. Якщо на $M_n$ задати кілька $O$-деформованих аффінорних полів, інваріантних відносно перетворень групи $D^1_n$, то отримаємо многовиди аффінорної структури типу унітальної асоціативної кватерніонної алгебри [7-8].

3. Найсуттєвішою диференціальною структурою для побудови геометрії многовиду $M_n$ та його підмноговидів є зв'язність [2-3]. Ознакою існування зв'язності першого порядку в многовиді $M_n$ (тобто зв'язності в розшаруванні $T(M_n)$) є існування на $M_n$ поля геометричного об'єкта $\Gamma = \{\Gamma^J_{KL}\}$ такого, що

$$d\Gamma^J_{KL} - \Gamma^J_{PL}\omega^P_K - \Gamma^J_{KP}\omega^P_L + +\Gamma^P_{KL}\omega^J_P + \omega^J_{KL} - \Gamma^M_{KL}\Gamma^J_{MP}\omega^P = \Gamma^J_{KLP}\omega^P. \quad (5)$$

Форми

$$\tilde{\omega}^J_K := \omega^J_K - \Gamma^J_{KL}\omega^L \quad (6)$$

задовольняють умови теореми Картана-Лаптєва [3]. Отже, форми $\tilde{\omega}^J_K$ визначають інфінітезімальне відображення локальних просторів $T_{x+dx}(M_n)$ на $T_x(M_n)$ і є формами зв'язності Γ (яка визначається геометричним об'єктом Γ).

Система рівнянь (1) набуває вигляду

$$d\omega^J = \omega^L \wedge \tilde{\omega}^J_L + \frac{1}{2}S^J_{KL}\omega^K \wedge \omega^L,$$

де $S^J_{KL} = \Gamma^J_{KL} - \Gamma^J_{LK}$ — тензор скруту зв'язності Γ.

Форми зв'язності задовольняють рівняння

$$d\tilde{\omega}^J_K = \tilde{\omega}^L_K \wedge \tilde{\omega}^J_L + \frac{1}{2}R^J_{KLP}\omega^L \wedge \omega^P,$$

де $R^J_{KLP} = -R^J_{KPL}$ — тензор кривини зв'язності Γ [5]. Зв'язність Γ називається симетричною, якщо її компоненти $\Gamma^J_{KL}$ симетричні за нижніми індексами. Симетрична зв'язність характеризується нульовим тензором скруту. Многовиди з симетричною зв'язністю допускають адаптовані базиси, відносно яких $\Gamma^J_{KL} = 0$ і тому $\tilde{\omega}^J_K = \omega^J_K$, $\omega^J_{KL} = \Gamma^J_{KLP}\omega^P$, $R^J_{KLP} = \Gamma^J_{KLP} - \Gamma^J_{KPL}$.

4. Якщо на многовиді $M_n$ з $O$-деформованим аффінорним полем $F$ задати зв'язність Γ таку, щоб додаткові визначальні для аффінорного поля $F$ функції відносно зв'язності Γ дорівнювали нулеві, то зв'язність Γ називається $F$-зв'язністю. Многовид $M_n$ з $O$-деформованим аффінорним

полем $F$ та з $F$-зв'язністю $\Gamma$ позначатимемо $M_n(F,\Gamma)$.

Якщо у рівняннях (2) перейти за формулами (6) до форм зв'язності $\Gamma$, то

$$dF^J_K - F^J_L\tilde{\omega}^L_K + F^L_K\tilde{\omega}^J_L = \tilde{F}^J_{KL}\omega^L,$$

де $\tilde{F}^J_{KL} = F^J_{KL} + F^M_K\Gamma^J_{ML} - F^J_M\Gamma^M_{KL}$ — коваріантні похідні аффінора $F$ у зв'язності $\Gamma$ [5]. На многовиді $M_n(F,\Gamma)$ правильні тотожності

$$F^J_{KL} = F^J_M\Gamma^M_{KL} - F^M_K\Gamma^J_{ML}. \qquad (7)$$

**Твердження 1.** *Тензор Нейєнхейса аффінорного поля $F$ на многовиді $M_n(F,\Gamma)$ з симетричною $F$-зв'язністю має будову*

$$N^J_{KL} = F^J_P F^M_{[L}\Gamma^P_{K]M},$$

*де за індексами у квадратних дужках здійснюється альтернування.*

Доведення твердження 1 випливає з формул будови компонент $N^J_{KL}$ (4), тотожностей (7) та умов $\Gamma^J_{KL} = \Gamma^J_{LK}$.

Оскільки відносно симетричної $F$-зв'язності $\Gamma$ на $M_n(F,\Gamma)$ поле аффінора $F$ коваріантно стале, то правильне наступне твердження.

**Наслідок.** *Аффінорне поле $F$ на многовиді $M_n(F,\Gamma)$ з симетричною $F$-зв'язністю $\Gamma$ інтегровне.*

5. Нехай $\mathfrak{M}_m\,(m < n)$ — $m$-вимірний підмноговид многовиду $M_n(F,\Gamma)$. Якщо $\theta^i(i,j,k,l,\ldots = \overline{1,m})$ — структурні форми підмноговиду $\mathfrak{M}_m$, то система

$$\omega^J = \Lambda^J_i\theta^i \qquad (8)$$

є системою диференціальних рівнянь підмноговиду $\mathfrak{M}_m$, а функції $\Lambda^J_i$ у кожній точці $x \in \mathfrak{M}_m$ утворюють фундаментальний геометричний об'єкт першого порядку підмноговиду, оскільки

$$d\Lambda^J_i - \Lambda^J_j\theta^j_i + \Lambda^K_i\omega^J_K = \Lambda^J_{ij}\theta^j, \Lambda^J_{ij} = \Lambda^J_{ji},$$

$$d\theta^i_j = \theta^l_j \wedge \theta^i_l + \theta^l \wedge \theta^i_{jl}, \theta^i_{jl} = \theta^i_{lj}. \qquad (9)$$

Форми $\bar{\theta}^i_j$ є інваріантними формами диференціальної групи першого порядку $D^1_m$ підмноговиду $\mathfrak{M}_m$. Фундаментальний об'єкт першого порядку підмноговиду $\mathfrak{M}_m$ в $M_n(F,\Gamma)$ приєднаний до групи $D^1_m \times D^1_n$.

Довільну лінійну зв'язність у дотичному розшаруванні $T(\mathfrak{M}_m)$ підмноговиду $\mathfrak{M}_m$ називають тангенційною зв'язністю [4]. Наявність зв'язності у вміщуючому многовиді $M_n(F,\Gamma)$ не є достатньою умовою існування зв'язності в дотичному розшаруванні підмноговиду.

**Твердження 2.** *Необхідною і достатньою умовою виникнення тангенційної зв'язності на підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ многовиду $M_n(F,\Gamma)$ є задання на підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ інваріантного нормального розшарування.*

**Доведення.** Якщо $N_x(\mathfrak{M}_m)$ — $(n-m)$-вимірний лінійний підпростір простору $T_x(M_n)$ такий, що $T_x(\mathfrak{M}_m) \cup N_x(\mathfrak{M}_m) = T_x(M_n)$ і $T_x(\mathfrak{M}_m) \cap N_x(\mathfrak{M}_m) = \{x\}$ для довільного елемента $x \in \mathfrak{M}_m$, то нормальне розшарування $N(\mathfrak{M}_m)$ на підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ є диференційовним об'єднанням $\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{M}_m} N_x(\mathfrak{M}_m)$. Нехай $\underset{x}{\vec{N}}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma,\ldots = \overline{m+1,n})$ — деякий базис підпростору $N_x(\mathfrak{M}_m) \subset T_x(M_n)$ такий, що $\delta\underset{x}{\vec{N}}_\alpha = \bar{v}^\beta_\alpha\underset{x}{\vec{N}}_\beta$, де $\bar{v}^\beta_\alpha$ — інваріантні форми групи $GL(n-m,\mathbf{R})$. Тоді $\underset{x}{\vec{N}}_\alpha = N^J_\alpha\underset{x}{\vec{e}}_J$ і умови інваріантності нормального розшарування на $\mathfrak{M}_m$ набувають вигляду [3]

$$dN^J_\alpha - N^J_\beta v^\beta_\alpha + N^L_\alpha\omega^J_L = N^J_{\alpha i}\theta^i. \qquad (10)$$

Вектор-функції $\underset{x}{\vec{\Lambda}}_i := \Lambda^J_i\underset{x}{\vec{e}}_J$ утворюють базис простору $T_x(\mathfrak{M}_m)$, а рівняння (9) є умовами інваріантності цього базису відносно перетворень групи $D^1_m \times D^1_n$. Базис $R_x(\Lambda,N) = \{\underset{x}{\vec{\Lambda}}_i, \underset{x}{\vec{N}}_\alpha\}$ назвемо адаптованим базисом нормалізованого підмноговиду $\mathfrak{M}_m$ в $M_n$. Матриця $\left\| \begin{matrix} \Lambda^I_i \\ N^J_\alpha \end{matrix} \right\|$ невироджена, оскільки вона є матрицею переходу від базису $R_x(\Lambda,N)$ до $\{\underset{x}{\vec{e}}_J\}$ в $T_x(M_n)$, $x \in \mathfrak{M}_m$. Тому існує її обернена матриця $\left\|\tilde{\Lambda}^i_J\tilde{N}^\alpha_J\right\|$ така, що

$$\Lambda^J_i\tilde{\Lambda}^j_J = \delta^j_i, N^J_\alpha\tilde{N}^\beta_J = \delta^\beta_\alpha, \Lambda^J_i\tilde{N}^\alpha_J = 0, N^J_\alpha\tilde{\Lambda}^i_J = 0,$$

$$\Lambda_i^J\tilde{\Lambda}_K^i + N_\alpha^J\tilde{N}_K^\alpha = \delta_K^J. \qquad (11)$$

Функції $\tilde{\Lambda}_J^i$ та $\tilde{N}_J^\alpha$ служать компонентами розкладу $\underset{x}{\vec{e}}_J = \tilde{\Lambda}_J^i \underset{x}{\vec{\Lambda}}_i + \tilde{N}_J^\alpha \underset{x}{\vec{N}}_\alpha$. Вони задовольняють рівняння

$$d\tilde{\Lambda}_i^J - \tilde{\Lambda}_j^J\theta_i^j + \tilde{\Lambda}_i^K\omega_K^J = \tilde{\Lambda}_{ij}^J\theta^j,$$

$$d\tilde{N}_\alpha^J - \tilde{N}_\beta^J v_\alpha^\beta + \tilde{N}_\alpha^K\omega_K^J = \tilde{N}_{\alpha j}^J\theta^j. \qquad (12)$$

Для того щоб форми $\tilde{\theta}_j^i = \theta_j^i - \gamma_{jl}^i\theta^l$ були формами тангенційної зв'язності підмноговиду $\mathfrak{M}_m$, необхідно і досить, щоб функції $\gamma_{jl}^i$ задовольняли рівняння

$$d\gamma_{jl}^i - \gamma_{kl}^i\theta_j^k - \gamma_{jk}^i\theta_l^k + \gamma_{jl}^k\theta_k^i -$$

$$-\gamma_{jl}^p\gamma_{pk}^i\theta^k + \theta_{jl}^i = \gamma_{jlk}^i\theta^k. \qquad (13)$$

За допомогою рівнянь (5) і (9) знаходимо, що компоненти геометричного об'єкта $\{\Lambda_i^J, \Gamma_{Ki}^J := \Gamma_{KL}^J\Lambda_i^L\}$ задовольняють систему

$$d\Gamma_{Ki}^J - \Gamma_{Li}^J\omega_K^L + \Gamma_{Ki}^L\omega_L^J - \Gamma_{Kj}^J\theta_i^j +$$

$$+\Lambda_i^L\omega_{KL}^J - \Gamma_{Ki}^L\Gamma_{Lj}^J\theta^j = \Gamma_{Kij}^J\theta^j. \qquad (14)$$

Користуючись рівняннями (8), (9), (10), (12), (14) та умовами (11), шляхом безпосереднього диференціювання встановлюємо, що функції

$$\gamma_{jl}^i := -\tilde{\Lambda}_K^i(\Lambda_{jl}^K - \Lambda_j^L\Gamma_{Ll}^K) \qquad (15)$$

задовольняють систему (13).

Отже, задання на підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ многовиду $M_n(F,\Gamma)$ інваріантного поля нормалей є ознакою існування (виникнення) на ньому тангенційної зв'язності з об'єктом зв'язності (15).

**Твердження 3.** *Нормалізований підмноговид многовиду $M_n(F,\Gamma)$ є підмноговидом з нормальною зв'язністю.*

Доведення твердження 3 аналогічне доведенню твердження 2, якщо важати нормальною зв'язністю підмноговиду $\mathfrak{M}_m$ довільну лінійну зв'язність у нормальному розшаруванні $N(\mathfrak{M}_m)$. Форми $\tilde{v}_\beta^\alpha = v_\beta^\alpha - \gamma_{\beta i}^\alpha\theta^i$ будуть формами нормальної зв'язності в розшаруванні $N(\mathfrak{M}_m)$, якщо функції $\gamma_{\beta i}^\alpha$ задовольняють рівняння

$$d\gamma_{\beta i}^\alpha - \gamma_{\gamma i}^\alpha v_\beta^\gamma - \gamma_{\beta j}^\alpha\theta_i^j + \gamma_{\beta i}^\gamma v_\gamma^\alpha -$$

$$-\gamma_{\beta i}^\gamma\gamma_{\gamma j}^\alpha\theta^j + v_{\beta i}^\alpha = \gamma_{\beta ij}^\alpha\theta^j. \qquad (16)$$

Функції

$$\gamma_{\beta i}^\alpha := -\tilde{N}_K^\alpha(N_{\beta i}^K - N_\beta^L\Gamma_{Li}^K) \qquad (17)$$

задовольняють рівняння (16) і тому визначають на $\mathfrak{M}_m$ нормальну зв'язність.

**Теорема 1.** *Симетрична $F$-зв'язність многовиду $M_n(F,\Gamma)$ індукує на нормалізованому підмноговиді симетричну тангенційну зв'язність.*

Дійсно, віднесемо нормалізований підмноговид $\mathfrak{M}_m$ в $M_n(F,\Gamma)$, де $\Gamma$ — симетрична $F$-зв'язність, до базису $R_x(\Lambda, N)$. Аналітична канонізація базису зумовлена значеннями $\Lambda_i^\alpha = 0, \Lambda_i^j = \delta_i^j, N_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta, N_\alpha^i = 0$. Тоді за умов (11) маємо $\tilde{\Lambda}_i^j = \delta_i^j$, $\tilde{\Lambda}_\alpha^i = 0$, $\tilde{N}_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$, $\tilde{N}_i^\alpha = 0$ і тому $\gamma_{jl}^i = \Gamma_{jl}^i - \Lambda_{jl}^i$. Оскільки $F$-зв'язність симетрична, то $\Gamma_{jl}^i = \Gamma_{lj}^i$ і тому $\gamma_{jl}^i = \gamma_{lj}^i$. Отже, тангенційна зв'язність симетрична.

6. Розглянемо розклад

$$F(\underset{x}{\vec{\Lambda}}_i) = f_i^j\underset{x}{\vec{\Lambda}}_j + \eta_i^\alpha\underset{x}{\vec{N}}_\alpha,$$

$$F(\underset{x}{\vec{N}}_\beta) = \xi_\beta^j\underset{x}{\vec{\Lambda}}_j + \rho_\beta^\alpha\underset{x}{\vec{N}}_\alpha,\ x \in \mathfrak{M}_m. \qquad (18)$$

Скалярний аналог системи (18) має вигляд

$$\Lambda_i^I F_I^L = f_i^j\Lambda_j^L + \eta_i^\alpha N_\alpha^L,$$

$$N_\beta^I F_I^L = \xi_\beta^j\Lambda_j^L + \rho_\beta^\alpha N_\alpha^L. \qquad (19)$$

Застосуємо умови (11), згорнувши послідовно рівняння системи (19) з тензорами $\tilde{\Lambda}_L^i$ та $\tilde{N}_L^\alpha$. Отримаємо

$$f_j^i = \Lambda_j^I F_I^K\tilde{\Lambda}_K^i, \quad \xi_\alpha^i = N_\alpha^I F_I^K\tilde{\Lambda}_K^i,$$

$$\eta_i^\alpha = \Lambda_i^I F_I^K\tilde{N}_K^\alpha, \quad \rho_\alpha^\beta = N_\alpha^I F_I^K\tilde{N}_K^\beta. \qquad (20)$$

Диференціюючи тотожності (20) та використовуючи (2), (9), (10) і (12), маємо

$$df_j^i - f_l^i\theta_j^l + f_j^l\theta_l^i = f_{jl}^i\theta^l,$$

$$d\xi_\alpha^i - \xi_\beta^i v_\alpha^\beta + \xi_\alpha^l\theta_l^i = \xi_{\alpha l}^i\theta^l,$$

$$d\eta_i^\alpha - \eta_j^\alpha\theta_i^j + \eta_i^\beta v_\beta^\alpha = \eta_{il}^\alpha\theta^l, \qquad (21)$$

$$d\rho_\beta^\alpha - \rho_\gamma^\alpha v_\beta^\gamma + \rho_\beta^\gamma v_\gamma^\alpha = \rho_{\beta l}^\alpha\theta^l.$$

Отже, $\{f^i_j\}$ — тензор, приєднаний до групи $D^1_m$, $\{\xi^i_\alpha\}$ та $\{\eta^\alpha_i\}$ — тензори, приєднані до групи $D^1_m \times GL(n-m, \mathbf{R})$, і $\{\rho^\alpha_\beta\}$ — тензор, приєднаний до групи $GL(n-m, \mathbf{R})$.

**Означення.** *Диференціально-геометрична структура з структурними об'єктами $\{f^j_i\}, \{\xi^i_\alpha\}, \{\eta^\alpha_i\}$ і $\{\rho^\alpha_\beta\}$, визначеними за формулами (20) на нормалізованому підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ многовиду з O-деформованим аффінорним полем $F$, називаєтьcя $\Phi$-структурою.*

Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 2.** *Кожний нормалізований підмноговид многовиду з O-деформованим аффінорним полем є многовидом з $\Phi$-структурою.*

Використовуючи (19), (20) і умови (11), знаходимо, що структурні об'єкти многовиду з $\Phi$-структурою зв'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} f^i_j f^j_l + \eta^\gamma_l \xi^i_\gamma &= \Lambda^J_j \Phi^K_J \tilde{\Lambda}^i_K, \\ f^i_j \eta^\alpha_i + \eta^\beta_j \rho^\alpha_\beta &= \Lambda^J_j \Phi^K_J \tilde{N}^\alpha_K, \\ f^i_j \xi^j_\beta + \xi^i_\alpha \rho^\alpha_\beta &= N^J_\beta \Phi^K_J \tilde{\Lambda}^i_K, \\ \rho^\alpha_\beta \rho^\gamma_\alpha + \eta^\gamma_i \xi^i_\beta &= N^J_\beta \Phi^K_J \tilde{N}^\gamma_K, \end{aligned} \tag{22}$$

де $\Phi^K_J = F^L_J F^K_L$.

**Теорема 3.** *Якщо аффінорне поле вміщуючого многовиду визначає на ньому майже комплексну структуру ($\pi$-структуру), то довільний нормалізований підмноговид цього многовиду є многовидом $(f\xi\eta\rho)$-структури гіперболічного (еліптичного) типу.*

**Доведення.** За теоремою 2, довільний нормалізований підмноговид $\mathfrak{M}_m$ многовиду з аффінорним полем $F$ є многовидом з $\Phi$-структурою. Нехай $\Phi^K_J = -\delta^K_J$ ($\Phi^K_J = \delta^K_J$), тоді поле $F$ визначає на $M_n$ майже комплексну структуру ($\pi$-структуру). Співвідношення (22) набувають вигляду

$$f^i_j f^j_l + \eta^\gamma_l \xi^i_\gamma = \varepsilon \delta^i_l,$$

$$f^i_j \eta^\alpha_i + \eta^\beta_j \rho^\alpha_\beta = 0,$$

$$f^i_j \xi^j_\beta + \xi^i_\alpha \rho^\alpha_\beta = 0,$$

$$\rho^\alpha_\beta \rho^\gamma_\alpha + \eta^\gamma_i \xi^i_\beta = \varepsilon \delta^\gamma_\beta,$$

де $\varepsilon = \mp 1$, якщо $\Phi^K_J = \mp \delta^K_J$.

Отже, підмноговид $\mathfrak{M}_m$ є многовидом $(f\xi\eta\rho)$-структури, введеної Г.Ф.Лаптєвим і Н.М.Остіану в праці [6].

**Теорема 4.** *На $F$-інваріантному нормалізованому підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ многовиду з O-деформованим аффінорним полем проектора $F$ ($F^2 = F$) це аффінорне поле індукує $\Phi$-структуру з трьома структурними тензорами $f, \xi$ і $\rho$ такими, що $f$ — проектор в $T(\mathfrak{M}_m)$, $\rho$ — проектор в $N(\mathfrak{M}_m)$ і $f\xi\rho = 0$.*

Дійсно, якщо $F^2 = F$, то рівняння (22) набувають вигляду

$$f^i_j f^j_l + \eta^\gamma_l \xi^i_\gamma = f^i_l,$$

$$f^i_j \eta^\alpha_i + \eta^\beta_j \rho^\alpha_\beta = \eta^\alpha_j,$$

$$f^i_j \xi^j_\beta + \xi^i_\alpha \rho^\alpha_\beta = \xi^i_\beta,$$

$$\rho^\alpha_\beta \rho^\gamma_\alpha + \eta^\gamma_i \xi^i_\beta = \rho^\gamma_\beta.$$

Рівність нулеві тензора $\eta^\alpha_i$ є ознакою $F$-інваріантності нормалізованого підмноговиду, бо тоді за формулами (18) $F(\underset{x}{\vec{\Lambda}}_i) = f^j_i \underset{x}{\vec{\Lambda}}_j$ [9].

Отже, $\Phi$-структура, індукована на $F$-інваріантному нормалізованому підмноговиді аффінорним полем проектора $F$, визначається трьома тензорами $f = \{f^i_j\}$, $\xi = \{\xi^i_\alpha\}$ та $\rho = \{\rho^\alpha_\beta\}$, які задовольняють умови

$$f^i_j f^j_l = f^i_l, \; f^i_j \xi^j_\beta + \xi^i_\alpha \rho^\alpha_\beta = \xi^i_\beta,$$

$$\rho^\alpha_\beta \rho^\gamma_\alpha = \rho^\gamma_\beta.$$

Ці умови вказують на те, що $f$ — проектор на $T(\mathfrak{M}_m)$, а $\rho$ — проектор на $N(\mathfrak{M}_m)$. Крім цього, $f^i_j \xi^j_\beta \rho^\beta_\alpha = 0$.

7. **Означення.** *Лінійна зв'язність $\nabla$ на підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ многовиду з аффінорним полем $F$ та $F$-зв'язністю називається $\Phi$-зв'язністю, якщо принаймні один структурний тензор $\Phi$-структури, індукованої на $\mathfrak{M}_m$ $F$-зв'язністю, відносно зв'язності $\nabla$ коваріантно сталий [10].*

**Теорема 5.** *Для того щоб тангенційна зв'язність, індукована на нормалізованому підмноговиді $F$-зв'язністю многовиду з аффінорним полем $F$, була Ф-зв'язністю, необхідно і досить, щоб тензор $f^i_{jl} - f^i_k\gamma^k_{jl} + f^k_j\gamma^i_{kl}$ дорівнював нулеві. Якщо на цьому підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ аффінорне поле $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}^{Ji}_{jL}\}$ О-деформоване і ранг $\|\mathcal{H}^{Ji}_{jL}\|$ максимальний, то на $M_n(F,\Gamma)$ існує єдина $F$-зв'язність, котра індукує на $\mathfrak{M}_m$ тангенційну Ф-зв'язність. Матриця аффінора $\mathcal{H}$ має будову*

$$\mathcal{H}^{Ji}_{jL} = \Lambda^J_j F^K_L \tilde{\Lambda}^i_K - \Lambda^K_j F^J_K \tilde{\Lambda}^i_L + $$
$$+ f^l_j \Lambda^J_l \tilde{\Lambda}^i_L - f^i_l \Lambda^J_j \tilde{\Lambda}^l_L. \tag{23}$$

**Доведення.** Запишемо рівняння (21) в термінах форм тангенційної і нормальної зв'язностей, індукованих $F$-зв'язністю $\Gamma$ на нормалізованому підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ многовиду $M_n(F,\Gamma)$:

$$df^i_j - f^i_l\tilde{\theta}^l_j + f^l_j\tilde{\theta}^i_l = \tilde{f}^i_{jl}\theta^l,$$
$$d\xi^i_\alpha - \xi^i_\beta\tilde{v}^\beta_\alpha + \xi^j_\alpha\tilde{\theta}^i_j = \tilde{\xi}^i_{\alpha l}\theta^l,$$
$$d\eta^\alpha_i - \eta^\alpha_j\tilde{\theta}^j_i + \eta^\beta_i\tilde{v}^\alpha_\beta = \tilde{\eta}^\alpha_{il}\theta^l,$$
$$d\rho^\alpha_\beta - \rho^\alpha_\gamma\tilde{v}^\gamma_\beta + \rho^\gamma_\beta\tilde{v}^\alpha_\gamma = \tilde{\rho}^\alpha_{\beta l}\theta^l,$$

де

$$\tilde{f}^i_{jl} = f^i_{jl} - f^i_k\gamma^k_{jl} + f^k_j\gamma^i_{kl},$$
$$\tilde{\xi}^i_{\alpha l} = \xi^i_{\alpha l} - \xi^j_\alpha\gamma^i_{jl} + \xi^i_\beta\gamma^\beta_{\alpha l},$$
$$\tilde{\eta}^\alpha_{il} = \eta^\alpha_{il} - \eta^\beta_i\gamma^\alpha_{\beta l} + \eta^\alpha_j\gamma^j_{il}, \tag{24}$$
$$\tilde{\rho}^\alpha_{\beta l} = \rho^\alpha_{\beta l} - \rho^\gamma_\beta\gamma^\alpha_{\gamma l} + \rho^\alpha_\gamma\gamma^\gamma_{\beta l}$$

— коваріантні похідні структурних об'єктів Ф-структури, якщо величини $\gamma^i_{jl}$ та $\gamma^\alpha_{\beta l}$ обчислюються, відповідно, за формулами (15) і (17). Рівність нулеві коваріантної похідної $\tilde{f}^i_{jl}$ тензора $\{f^i_j\}$ відносно тангенційної зв'язності, індукованої $F$-зв'язністю вміщуючого многовиду $M_n(F,\Gamma)$, є необхідною і достатньою умовою того, що тангенційна зв'язність на підмноговиді $\mathfrak{M}_m$ збігається з Ф-зв'язністю. Інші коваріантні похідні системи (24) пов'язані з нормальною зв'язністю підмноговиду. Оскільки тензор $\{f^i_j\}$ (20) є згорткою тензорів $\{\Lambda^J_i\}, \{F^K_J\}$ і $\{\tilde{\Lambda}^i_J\}$, то

$$f^i_{jl} = \Lambda^J_{jl}F^L_J\tilde{\Lambda}^i_L + \Lambda^J_j F^L_{Jl}\tilde{\Lambda}^i_L + \Lambda^J_j F^L_J\tilde{\Lambda}^i_{Ll}.$$

Тому рівність нулеві тензора $\tilde{f}^i_{jl}$ можна подати у вигляді

$$\mathcal{H}^{Ji}_{jL}\Gamma^L_{Jk} = B^i_{jk}, \tag{25}$$

де $\mathcal{H}^{Ji}_{jL}$ — матриця аффінора $\mathcal{H}$, визначена формулами (23), а

$$B^i_{jk} = \tilde{\Lambda}^i_L(2f^l_j\Lambda^L_{lk} - \Lambda^J_{jk}F^L_J) -$$
$$- f^i_l\tilde{\Lambda}^l_L\Lambda^L_{jk} - \eta^\alpha_j\tilde{\Lambda}^i_{Lk}N^L_\alpha.$$

Якщо ранг матриці $\{\mathcal{H}^{Ji}_{jL}\}$ максимальний у деякій точці підмноговиду $\mathfrak{M}_m$ і поле аффінора $\mathcal{H}$ на $\mathfrak{M}_m$ $O$-деформоване, то матриця $\|\mathcal{H}^{Ji}_{jL}\|$ має обернену матрицю у всіх точках підмноговиду $\mathfrak{M}_m$. Компоненти $F$-зв'язності, яка індукує на $\mathfrak{M}_m$ тангенційну Ф-зв'язність, мають будову

$$\Gamma^K_{Ji} = \overset{*}{\mathcal{H}}{}^{Kl}_{jJ} B^j_{il}.$$

Зауважимо, що на нормалізованих підмноговидах у многовидах з аффінорними полями, які визначають майже комплексну структуру або $\pi$-структуру, тензор $\mathcal{H}$ дорівнює нулеві.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геометр. семинара: Сб. науч. тр.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— 1966.— **1**.— С.139—190.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1953.— **2**.— С.275—382.

3. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геометр. семинара: Сб. науч. тр.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— 1973.— **4**.— С.7—70.

4. *Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д.* Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— 1981.— **13**.— С.27—76.

5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— 1979.— **9**.— С.5—247.

6. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— 1975.— **7**.— С.5—22.

7. *Домбровский Р.Ф.* О дифференциально-геометрических структурах на подмногообразиях многообразия почти кватернионной структуры // Изв. вузов. Математика.— 1994.— N3(382).— С.26—31.

8. *Домбровский Р.Ф.* О геометрии тензорных полей на многообразиях почти кватернионной структуры // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.— М.: ВИНИТИ РАН.— Геометрия-3.— 1995.— **30**.— с.195—209.

9. *Домбровський Р.Ф.* Про одну властивість інваріантних підмноговидів у многовидах з $O$-деформованою аффінорною структурою // VI Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука: Матеріали конференції.— К., 1997.— С.143.

10. *Домбровский Р.Ф.* $(f\xi\eta\rho)$-связности на интегральных многообразиях многообразия квази-кватернионной структуры // Международный геометрический семинар им. Н.И.Лобачевского "Современная геометрия и теория физических полей": Материалы семинара.— Казань, 1997.— С.42.