УДК 519.86

©1999 р. В.С. Григорків

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОСТУ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ

Для моделі економічного росту з кусково-лінійними макровиробничою функцією та функцією корисності споживання розроблений алгоритм побудови оптимальної програми росту.

Algorithm of construction of optimal growth program are investigated for model of economic growth with piece-linear macro production function and favour function of consumption.

Предметом дослідження даної праці є модель економічного росту

$$\left\{\begin{array}{c} \int\limits_{t_0}^{t_m} \rho_0 e^{-\delta t} Q(c) dt \to \max\limits_{c}, \\ \\ \dot{k} = f(k) - (\mu+\eta)k - c, \\ k(t_0) = k^{(0)}, \quad k(t_m) \geq k^{(m)}, \\ 0 < c_0 f(k) \leq c \leq c_1 f(k) < f(k), \end{array}\right. \tag{1}$$

де k — фондоозброєність, c — питоме споживання (споживання на одиницю робочої сили), $\mu\,(0 < \mu < 1)$ — коефіцієнт зношення фондів (капіталу), $\eta\,(\eta > 0)$ — коефіцієнт росту робочої сили, $f(k)$ — однофакторна макровиробнича функція, $Q(c)$ — функція корисності споживання, $\rho_0 e^{-\delta t}$ — вагова функція (або дисконтуючий множник), що "співвиміряє" споживання в різні моменти часу, сталі додатні величини $t_0, t_m, \delta, \rho_0, \mu, \eta, k^{(0)}, k^{(m)}\,(k^{(m)} > k^{(0)}), c_0, c_1$, а також функції $f(k)$ і $Q(c)$ вважаються заданими.

Принциповою відмінністю моделі (1) від неокласичних моделей росту [1] є те, що тут розглядаються класи функцій $f(k)$ і $Q(c)$, які не збігаються із загальноприйнятими в неокласичній теорії росту.

Щодо функції $f(k)$, то припустимо, що вона визначена на $\mathbf{R}^1_+ = [0, +\infty)$, неперервна, кусково-лінійна, угнута (опукла вверх), монотонно зростаюча. Функцію $Q(c)$ вважатимемо лінійною, тобто

$$Q(c) = Q_0 c, \quad (Q_0 = \text{const} > 0).$$

Побудова функцій $f(k)$ і $Q(c)$ є окремою проблемою математичного моделювання. Не зупиняючись детально на цій проблемі, зазначимо, що її складність залежить не тільки від апріорних властивостей макроекономічного процесу, але й від адекватності наявної економічної інформації.

Нехай на відрізку $[k^{(0)}, k^{(m)}] \subset \mathbf{R}^1_+$ побудована сітка $\Delta^{(1)}_k = \{k^{(0)} < k^{(1)} < \ldots < k^{(m)}\}$ та відповідна їй сіткова макровиробнича функція

$$f_{\Delta^{(1)}_k} = \{(k^{(i)}, f_i) : \, k^{(i)} \mapsto f_i,$$

$$k^{(i)} \in \Delta^{(1)}_k, \, i = \overline{0, m}\}.$$

Методика побудови таких функцій розроблена автором [2,3].

Тоді кусково-лінійна макровиробнича функція $f(k)$ з вершинами $(k^{(i)}, f_i) \in f_{\Delta^{(1)}_k}$ може бути подана у вигляді

$$f(k) = \sum_{i=0}^{m-1} L_i(k), \tag{2}$$

де

$$L_i(k) = \left\{\begin{array}{rl} a_i k + b_i, & k \in [k^{(i)}, k^{(i+1)}], \\ 0, & k \notin [k^{(i)}, k^{(i+1)}], \end{array}\right.$$

$$a_i = f^{(+)}_{i;1} \equiv (f_{i+1} - f_i)/h_i, \quad h_i = k^{(i+1)} - k^{(i)},$$

$$b_i = f_i - f_{i;1}^{(+)} \cdot k^{(i)}.$$

Величини a_i та b_i є додатними, крім того, $a_0 > a_1 > ... > a_{m-1}$.

Повернемось до моделі (1).

Це задача оптимального керування, зміст якої полягає в тому, щоб знайти таке допустиме керування $c^*(t)$ та відповідну йому допустиму траєкторію $k^*(t)$, які б максимізували інтегральну дисконтовану корисність на досліджуваному відрізку часу $[t_0, t_m]$.

Дослідження моделі здійснюватимемо аналогічно [4].

Побудуємо функцію

$$R(t,k,c) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial k}[f(k) - $$
$$-(\mu+\eta)k - c] + \rho_0 e^{-\delta t} Q_0 c, \qquad (3)$$

де $\varphi(t,k)$ — деяка шукана функція, що має неперервні похідні по t і k.

Вимагаючи, щоб $R(t,k,c)$ не залежала від керування c, одержимо співвідношення

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k} = \rho_0 Q_0 e^{-\delta t}. \qquad (4)$$

Проінтегрувавши (4) по k, виберемо функцію $\varphi(t,k) = \rho_0 Q_0 e^{-\delta t} k$. Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\rho_0 Q_0 \delta e^{-\delta t} k. \qquad (5)$$

Підставивши (4) і (5) у (3), матимемо

$$R(t,k,c) = \rho_0 Q_0 e^{-\delta t} \tilde{R}(k),$$

де $\tilde{R}(k) = f(k) - (\mu+\eta+\delta)k$.

Враховуючи (2), на відрізку $[k^{(i)}, k^{(i+1)}]$ $\tilde{R}(k) = \tilde{a}_i k + \tilde{b}_i$, $\tilde{a}_i = a_i - (\mu+\eta+\delta)$, $\tilde{b}_i = b_i$.

Послідовність $\{\tilde{a}_i\}_{i=0}^{m-1}$ є монотонно спадною. Нехай існує таке i_0 $(0 \le i_0 \le m-2)$, що $\tilde{a}_{i_0} > 0$ і $\tilde{a}_{i_0+1} < 0$. Тоді значення $\tilde{k} = k^{(i_0+1)}$ буде магістральним значенням фондоозброєності або положенням рівноваги для моделі (1). Відповідне йому допустиме керування

$$\tilde{c} = \begin{cases} c_0\tilde{f}, & \tilde{\tilde{c}} < c_0\tilde{f}, \\ \tilde{\tilde{c}}, & c_0\tilde{f} \le \tilde{\tilde{c}} \le c_1\tilde{f}, \\ c_1\tilde{f}, & \tilde{\tilde{c}} > c_1\tilde{f}, \end{cases}$$

де $\tilde{\tilde{c}} = \tilde{f} - (\mu+\eta)\tilde{k}$, $\tilde{f} = a_{i_0}\tilde{k} + b_{i_0}$.

Принагідно відзначимо, що магістраль моделі (1) не залежить від корисності споживання, а визначається тільки граничними можливостями виробництва, тобто макровиробничою функцією. Оскільки $\tilde{k} \in (k^{(0)}, k^{(m)})$, то для знаходження оптимального розв'язку задачі (1) потрібно будувати граничні траєкторії.

Як ліва, так і права граничні траєкторії можуть складатись з однієї або кількох ланок.

Для знаходження ланки траєкторії, що відповідає відрізку $[k^{(q)}, k^{(q+1)}]$, необхідно при $c_l^{(q)}$ $(l = 0,1;\ c_0^{(q)} = c_0 f(k^{(q)}),\ c_1^{(q)} = c_1 f(k^{(q)}))$ розв'язати задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{k}_{lq} = (a_q - \mu - \eta)k_{lq} + b_q - c_l^{(q)}, \\ k_{lq}(t_q) = k^{(q)}. \end{cases} \qquad (6)$$

При $a_q - \mu - \eta \ne 0$ розв'язок задачі (6) має вигляд

$$k_{lq}(t) = \left(k^{(q)} - \frac{b_q - c_l^{(q)}}{\mu+\eta-a_q}\right) e^{(a_q-\mu-\eta)(t-t_q)} +$$
$$+\frac{b_q - c_l^{(q)}}{\mu+\eta-a_q}, \qquad (7)$$

а при $a_q - \mu - \eta = 0$

$$k_{lq}(t) = (b_q - c_l^{(q)})(t - t_q) + k^{(q)}. \qquad (8)$$

Траєкторія (8) зростає при $b_q > c_l^{(q)}$. Що стосується траєкторії (7), то її зростання гарантується умовою

$$k^{(q)}(a_q - \mu - \eta) + b_q - c_l^{(q)} > 0. \qquad (9)$$

Обернена до (9) нерівність забезпечить спадання траєкторії (7).

Для зростання граничних траєкторій (як лівої, так і правої) досить виконання обмежень $a_{m-1} > \mu + \eta, b_0 > c_l^{(q)}$ $(l = 0,1,\ q = \overline{0, m-1})$. Оскільки вивчається ситуація, коли $k^{(1)} \le \tilde{k} \le k^{m-1}$, то нижче мова йтиме тільки про монотонно зростаючі траєкторії росту. В інших випадках дослідження здійснюється аналогічно. Отже, нехай $\tilde{k} = k^{(j)}$ $(1 \le j \le m-1)$.

Процес побудови лівої граничної траєкторії включає такі етапи:

1) в залежності від значення величини $a_0 - \mu - \eta$ при $q = 0$ і $c = c_l^{(0)}$ ($l = 0, 1$; $c_0^{(0)} = c_0 f(k^{(0)})$; $c_1^{(0)} = c_1 f(k^{(0)})$) вибираємо розв'язок (7) або (8) задачі (6) і з рівняння $k_{l0}(t) = k^{(1)}$ знаходимо момент часу t_1;

2) в залежності від значення величини $a_1 - \mu - \eta$ при $q = 1$ і $c = c_l^{(1)}$ ($l = 0, 1$; $c_0^{(1)} = c_0 f(k^{(1)})$; $c_1^{(1)} = c_1 f(k^{(1)})$) вибираємо розв'язок задачі (6) і з рівняння $k_{l1}(t) = k^{(2)}$ знаходимо момент часу t_2;

....

J) в залежності від значення величини $a_j - \mu - \eta$ при $q = j - 1$ і $c = c_l^{(j-1)}$ ($l = 0, 1$; $c_0^{(j-1)} = c_0 f(k^{(j-1)})$; $c_1^{(j-1)} = c_1 f(k^{(j-1)})$) вибираємо розв'язок задачі (6) і з рівняння $k_{l,j-1}(t) = k^{(j)}$ знаходимо t_j.

Момент часу $\tau^* = t_j$ є так званим лівим моментом перемикання траєкторії. Очевидно, що у випадку траєкторії (7)

$$\tau^* = t_{j-1} + (\ln E)/(a_{j-1} - \mu - \eta),$$

де

$$E = \frac{k^{(j)} - (b_{j-1} - c_l^{(j-1)})/(\mu + \eta - a_{j-1})}{k^{(j-1)} - (b_{j-1} - c_l^{(j-1)})/(\mu + \eta - a_{j-1})},$$

а у випадку траєкторії (8)

$$\tau^* = t_{j-1} + \frac{k^{(j)} - k^{(j-1)}}{b_{j-1} - c_l^{(j-1)}}.$$

Процедура побудови правої граничної траєкторії реалізується аналогічно, тобто вибираються відповідні розв'язки задачі (6) при $q = m, m-1, ..., j+1$ та $c = c_l^{(i)}$ ($l = 0, 1$; $c_0^{(i)} = c_0 f(k^{(i)})$; $c_1^{(i)} = c_1 f(k^{(i)})$, $i = m, m-1, ..., j+1$) і знаходяться з рівнянь $k_{lq}(t) = k^{(q)}$ відповідні моменти часу $t_{m-1}, t_{m-2}, ..., t_{j+1}$.

Права точка перемикання τ^{**} знаходиться з рівняння $k_{l,j+1}(t) = \tilde{k}$.

Виконавши вищеперелічені операції, завершимо процес побудови оптимальних розв'язків задачі (1).

Оптимальна траєкторія $k^*(t)$ матиме вигляд

$$k^*(t) = \begin{cases} k_\Lambda(t), & t_0 \le t < \tau^*, \\ \tilde{k}, & \tau^* \le t < \tau^{**}, \\ k_\Pi(t), & \tau^{**} \le t \le t_m, \end{cases} \tag{10}$$

де

$$k_\Lambda(t) = \begin{cases} k_{l0}(t), & t_0 \le t < t_1, \\ k_{l1}(t), & t_1 \le t < t_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ k_{l,j-1}(t), & t_{j-1} \le t < t_j = \tau^*, \end{cases}$$

$$k_\Pi(t) = \begin{cases} k_{lm}(t), & t_{m-1} \le t \le t_m, \\ k_{l,m-1}(t), & t_{m-2} \le t < t_{m-1}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ k_{l,j+1}(t), & \tau^{**} \le t < t_{j+1}. \end{cases}$$

Відповідне оптимальне керування

$$c^*(t) = \begin{cases} c_\Lambda(t), & t_0 \le t < \tau^*, \\ \tilde{c}, & \tau^* \le t < \tau^{**}, \\ c_\Pi(t), & \tau^{**} \le t \le t_m, \end{cases} \tag{11}$$

де

$$c_\Lambda(t) = \begin{cases} c_l^{(0)}, & t_0 \le t < t_1, \\ c_l^{(1)}, & t_1 \le t < t_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ c_l^{(j-1)}, & t_{j-1} \le t < \tau^*, \end{cases}$$

$$c_\Pi(t) = \begin{cases} c_l^{(m)}, & t_{m-1} \le t \le t_m, \\ c_l^{(m-1)}, & t_{m-2} \le t < t_{m-1}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ c_l^{(j+1)}, & \tau^{**} \le t < t_{j+1}. \end{cases}$$

Під значенням $c_l^{(q)}$ слід розуміти одне з вибраних значень: $c_0^{(q)}$ або $c_1^{(q)}$.

Підсумовуючи одержані результати, уточнимо основні етапи алгоритму розв'язування задачі (1).

1. Моделюють сіткову та кусково-лінійну макровиробничі функції.

2. При заданих і економічно обгрунтованих параметрах t_0, t_m, δ, ρ_0, μ, η, $k^{(0)}$, $k^{(m)}$, c_0, c_1 знаходять магістраль $\tilde{k}$ та відповідне їй допустиме керування $\tilde{c}$.

3. Здійснюють аналіз умов зростання та спадання допустимих траєкторій і, враховуючи результати цього аналізу, будують ліву та праву граничні траєкторії.

4. Знаходять моменти перемикання τ^* і τ^{**} відповідно лівої та правої граничних траєкторій.

5. Визначають оптимальну траєкторію $k^*(t)$ та оптимальне керування $c^*(t)$ за формулами (10),(11).

Не зупиняючись на економічній інтерпретації моделі (1) та її оптимальних розв'язків, зауважимо, зокрема, що за структурою оптимальна траєкторія є адаптованішою до нестійких періодів розвитку макроекономіки. Крім того, вона дає адекватніше обгрунтування інвестиційного процесу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику.— М.:Наука, 1984.— 296с.

2. *Григорків В.С.* Про деякі задачі умовної апроксимації сіткових функцій у випадку неточно заданої вихідної інформації // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.— Київ: Ін-т математики АН України, 1995.— Вип.10.— С.36—40.

3. *Григорків В.С.* Стохастичне моделювання сіткових макровиробничих функцій багатьох змінних // Автоматизація виробничих процесів, 1997.— N1.— С.35—39.

4. *Григорків В.С.* Дослідження оптимального розвитку макроекономіки // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.— Київ: Ін-т математики АН України, 1995.— Вип.9.— С.181—186.