УДК 517.982.4

©1999 р. Т.І. Готинчан

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

# ПРО НУЛЬОВІ МНОЖИНИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ ТИПУ $W'$

Досліджена коректність поняття нульової множини узагальненої функції з класу типу $W'$.

The correctness of the notion of the zero set of a generalized function from a space of $W'$ type has been investigated.

Розглянемо функцію $\eta$: $[0,+\infty) \to \to [0,+\infty)$, яка є неперервною і зростаючою, причому $\eta(0)=0$, $\eta(1)>1$, $\eta(\infty)=\infty$. Очевидно, що для кожного $n \in \mathbf{Z}_+$ рівняння $x\eta(x)=n$ має єдиний розв'язок $\rho_n<n$, якщо $n \geq 1$ і $\rho_0=0$, якщо $n=0$. Послідовність $\{\rho_n, n\in\mathbf{Z}_+\}$ є зростаючою і необмеженою.

Для $x \geq 0$ будемо вважати $\Omega(x) = \int\limits_0^x \eta(\omega)d\omega$. Функція $\Omega$ є диференційовною, зростаючою, опуклою вниз на $[0,+\infty)$, причому $\Omega(0)=0$, $\Omega(+\infty)=+\infty$. Довизначимо парним чином її на $(-\infty,0]$.

Поруч з $\eta$ розглянемо функцію $\mu$ : $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, яка має ті самі властивості, що й функція $\eta$. Для $x\geq 0$ візьмемо

$$M(x)=\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi,\ M(-x)=M(x).$$

За функціями $M,\Omega$ будуємо основні простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ [1], де

$$(\varphi\in W_M)\Longleftrightarrow(\exists a>0\ \ \forall n\in\mathbf{Z}_+\ \ \exists C_n>0$$
$$\forall x\in\mathbf{R}:\ |\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n\exp(-M(ax)));$$
$$(\varphi\in W^\Omega)\Longleftrightarrow(\exists b>0\ \ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \ \exists C_k>0$$
$$\forall z=x+iy\in\mathbf{C}:\ |z^{(k)}\varphi(z)|\leq C_k\exp(\Omega(by)));$$
$$(\varphi\in W_M^\Omega)\Longleftrightarrow(\exists a>0\ \ \exists b>0\ \ \exists C>0$$
$$\forall z=x+iy\in\mathbf{C}:$$
$$|\varphi(z)|\leq C\exp(-M(ax)+\Omega(by))).$$

Сукупність лінійних неперервних функціоналів, заданих на $W_M, W^\Omega$, $W_M^\Omega$, зі слабкою збіжністю позначимо відповідно через $(W_M)', (W^\Omega)', (W_M^\Omega)'$. Елементи просторів $(W_M)', (W^\Omega)', (W_M^\Omega)'$ називатимемо узагальненими функціями, а просторів $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ – основними функціями. Результат дії узагальненої функції $F$ на основну функцію $\varphi$ з відповідного простору позначатимемо символом $\langle F,\varphi\rangle$.

Правильні наступні твердження [2].

**Лема 1.** $(\ \ \varphi\in W_M^\Omega\ \ )\Longleftrightarrow$

$$(\ \exists C>0\ \ \exists a>0\ \ \exists b>0\ \ \forall n\in\mathbf{Z}_+$$
$$\exists\rho_n\in[0,n),\ \rho_0=0,\ \forall x\in\mathbf{R}:$$
$$|\varphi^{(n)}(x)|\leq C\frac{n!b^n}{\rho_n^n}\exp(\Omega(\rho_n)-M(ax))\ ).$$

**Лема 2.** $(\ \ \varphi\in W^\Omega\ \ )\Longleftrightarrow$

$$(\ \exists b>0\ \ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \ \exists C_k>0\ \ \forall n\in\mathbf{Z}_+$$
$$\exists\rho_n\in[0,n),\ \rho_0=0,\ \forall x\in\mathbf{R}:$$
$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq C_k\frac{n!b^n}{\rho_n^n}\exp(\Omega(\rho_n))\ ).$$

Відомо [3], що

$$(\varphi\in S)\Longleftrightarrow(\forall\{k,m\}\subset\mathbf{Z}_+\ \exists\,C_{km}>0$$
$$\forall x\in\mathbf{R}:\ |x^k\varphi^{(m)}(x)|\leq C_{km});$$
$$(\varphi\in S^\beta)\Longleftrightarrow(\exists B>0\ \forall k\in\mathbf{Z}_+\ \exists C_k>0$$
$$\forall q\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in\mathbf{R}:$$
$$|x^k\varphi^{(q)}(x)|\leq C_kB^qq^{q\beta});$$

$$(\varphi \in S_\alpha^\beta) \iff (\exists C > 0\ \exists a > 0\ \exists B > 0$$
$$\forall q \in \mathbf{Z}_+\ \forall x \in \mathbf{R} :$$
$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq CB^q q^{q\beta} e^{-a|x|^{1/\alpha}}),$$

де $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta \geq 1$ (означення просторів типу $S$ див. у [3]).

**Лема 3.** *Правильні такі неперервні вкладення:*

*1) $W_M^\Omega \subset S_1^1$;*
*2) $W^\Omega \subset S^1$.*

**Доведення**. 1). Розглянемо довільну функцію $\varphi \in W_M^\Omega$. Тоді на $\mathbf{R}$ для неї виконуються оцінки з леми 1.

Згідно з формулою Стірлінга,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} E_n, \text{ де } E_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Очевидно, що існує стала $C_E > 0$ така, що $|E_n| < C_E$ для всіх $n \in \mathbf{Z}_+$.

Тоді на підставі оцінок з леми 1 для функції $\varphi$ отримуємо

$$\exists C > 0\ \exists a > 0\ \exists b > 0\ \forall n \in \mathbf{Z}_+$$
$$\exists \rho_n \in [0, n),\ \rho_0 = 0,\ \forall x \in \mathbf{R} :$$
$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq CC_E\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n}\times$$
$$\times \left(\frac{b}{e}\right)^n \exp\{-M(ax)\}n^n.$$

Зазначимо, що

$$\exists C_1 > 0\ \forall n \in \mathbf{Z}_+ : \quad \frac{\sqrt{n}\exp\{\Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n} \leq C_1,$$
$$\exists a_1 > 0\ \forall x \in \mathbf{R} :\ a_1 + M(ax) \geq a|x|.$$

Тоді

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq C_2 B^n n^n \exp\{-a|x|\},$$
$$x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}_+,$$

де $C_2 = \sqrt{2\pi} CC_E C_1 \exp\{a_1\}$, $B = \dfrac{b}{e}$.

Отже, $\varphi \in S_1^1$.

Неперервність вкладення $W_M^\Omega \subset S_1^1$ очевидна.

Випадок 2) доводиться аналогічно.

Для лінійних неперервних функціоналів $F$, заданих на основному просторі $X$, який містить щільну сукупність фінітних функцій, відоме таке означення рівності нулю на відкритій множині $Q \subset \mathbf{R}$.

**Означення 1**. *Нехай $F \in X'$. $F = 0$ на $Q$, якщо для довільної функції $\varphi \in X$ такої, що $\operatorname{supp} \varphi \subset Q$, виконується рівність $\langle F, \varphi \rangle = 0$.*

Зазначимо, що простори $W_M$, $S_\alpha^\beta$, $S^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$, містять фінітні функції, а простори $W_M^\Omega$, $W^\Omega$ - ні, оскільки їхні елементи є цілими функціями.

Елементи просторів $S_\alpha^1$, $\alpha > 0$, $S^1$ аналітично продовжуються в деяку смугу комплексної площини. У [4] обгрунтовано таке означення.

**Означення 2**. *Узагальнена функція $F \in (S_\alpha^1)'$ ( $F \in (S^1)'$ ), $\alpha > 0$, дорівнює нулеві на відкритій множині $Q$, якщо аналітична на $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ функція*

$$\tilde{F}_{1,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\langle F_x, \frac{\exp(-(1+x^2)^{1/(2\alpha)})}{x-z}\right\rangle$$

$$\left(\tilde{F}_{1,1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\langle F_x, \frac{\exp(-(1+x^2)^{1/2})}{x-z}\right\rangle\right),$$
$$x \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R},$$

*продовжується аналітично на $Q$.*

Розглянемо наступні простори. Нехай $Q$ – обмежена відкрита множина в $\mathbf{R}$. Позначимо символом $W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$ сукупність нескінченно диференційовних функцій з простору $S$, які на $\mathbf{R} \setminus Q$ збігаються з функціями з простору $W_M^\Omega$, і для яких на $\mathbf{R} \setminus Q$ виконуються оцінки з леми 1. Означимо в просторі $W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$ загальноприйняту топологію.

Очевидно, що:

1) $W_M^\Omega \subset W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$;

2) $K(Q) \subset W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$, де $K(Q)$ – сукупність фінітних функцій з $S$, носії яких містяться в $Q$.

Аналогічно будуємо простір $W^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$.

**Означення 3.** *Узагальнена функція $F \in (W_M^\Omega)'$ ( $F \in (W^\Omega)'$ ) дорівнює нулеві на відкритій множині $Q$, якщо існує продовження $F_Q \in (W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q))'$ ( $F_Q \in (W^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q))'$ ), яке дорівнює нулеві на $Q$.*

Оскільки мають місце такі ланцюжки неперервних вкладень:

$$W_M^\Omega \subset S_\alpha^\beta \subset S^\beta \subset S \subset L_2(\mathbf{R}) \subset$$

$$\subset S' \subset (S^\beta)' \subset (S_\alpha^\beta)' \subset (W_M^\Omega)',$$

$$W_M^\Omega \subset S_\alpha^\beta \subset S_\alpha \subset S \subset L_2(\mathbf{R}) \subset$$

$$\subset S' \subset (S_\alpha)' \subset (S_\alpha^\beta)' \subset (W_M^\Omega)',$$

$$W^\Omega \subset S^\beta \subset S \subset L_2(\mathbf{R}) \subset S' \subset (S^\beta)' \subset (W^\Omega)',$$

$$\alpha \geq 1, \beta \geq 1,$$

то доведемо, що для $F \in (S_\alpha^\beta)'$ ( $F \in S'$, $F \in \in (S^\beta)'$, $F \in (S_\alpha)'$ ), $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$, означення 1 і 3 рівносильні, а для $F \in (S_\alpha^1)'$ ( $F \in \in (S^1)'$ ), $\alpha \geq 1$, рівносильними є означення 2 і 3.

**Теорема.** *1) Якщо $F \in (S_\alpha^\beta)'$ ( $F \in S'$, $F \in (S_\alpha)'$, $F \in (S^\beta)'$ ), де $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$, то $F = 0$ на відкритій множині $Q$, згідно з означенням 1, тоді і тільки тоді, коли $F = 0$ на $Q$, згідно з означенням 3.*

*2) Якщо $F \in (S_\alpha^1)'$ ( $F \in (S^1)'$ ), $\alpha \geq \geq 1$, то $F = 0$ на відкритій множині $Q$ за означенням 2 тоді і тільки тоді, коли $F = = 0$ на $Q$ за означенням 3.*

**Доведення**. Необхідність. Для $F \in \in (S_\alpha^\beta)'$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$, у праці [4] доведено, що означення 1 і 2 еквівалентні. Тому досить довести, що якщо виконується умова з означення 2, то виконується умова з означення 3.

Отже, розглянемо $F \in (S_\alpha^\beta)'$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$.

Тоді для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, існує $\delta \in (0,1]$ таке, що [4]

$$\langle F, \varphi \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{F}_\delta(x+i\varepsilon) - \tilde{F}_\delta(x-i\varepsilon)] \mu_{-\delta}(x) \varphi(x) dx.$$

Будуємо функціонал $F_Q : W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q) \to \to \mathbf{C}$ так. Візьмемо довільну функцію $\psi \in \in W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$. За цією функцією розглядаємо функцію $\varphi \in W_M^\Omega$ таку, що $\varphi(x) = \psi(x)$ на $\mathbf{R} \setminus Q$. Зрозуміло, що для кожної функції $\psi$ існує така функція $\varphi$ і якщо $supp\, \psi \in Q$, то $\varphi \equiv 0$ на $\mathbf{R}$.

Розглянемо функцію $\gamma_Q \in C^\infty(\mathbf{R})$ таку, що:

1) $\gamma_Q(x) = 1$, коли $x \in \bar{Q}_1$ (тут $\bar{Q}_1$ – замикання множини $Q_1 \subset Q$) ;

2) $\gamma_Q(x) = 0$, якщо $x \notin Q$.

Функція $\gamma_Q$ є мультиплікатором у просторі $S$.

Функціонал $F_Q$ задамо так:

$$\langle F_Q, \psi \rangle = \langle F, \varphi \rangle + \langle \gamma_Q G, \psi - \varphi \rangle\,,$$

де $G \in S'$ - продовження функціоналу $F$ з простору $S_\alpha^\beta$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ [5].

Очевидно, що функціонал $F_Q$ визначений на всьому просторі $W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$ і є лінійним.

Доведемо, що він є неперервним.

Дійсно, розглянемо довільну послідовність $\{\psi_n, n \geq 1\} \subset W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$ таку, що $\psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ у просторі $W_M^\Omega(\mathbf{R} \setminus Q)$. Тоді $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ у просторі $W_M^\Omega$, де $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ визначаються функціями $\{\psi_n, n \geq 1\}$.

Оскільки $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$ на $\mathbf{R} \setminus Q$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, то

$$\forall K \subset \mathbf{R} \setminus Q \ \forall m \in \mathbf{Z}_+ : \varphi_n^{(m)} \underset{n\to\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} 0.$$

Послідовність $\{\varphi_n, n \in \mathbf{N}\}$ належить до простору $W_M^\Omega$, тому в околі довільної точки $x_0 \in \mathbf{R}$ має місце розклад

$$\varphi_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k+m)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

$$x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{Z}_+.$$

Зафіксуємо деяку точку $x_0 \in \mathbf{R} \setminus Q$ і розглянемо довільну точку $x \in Q$. Оскільки даний ряд збігається рівномірно на довільному компакті $K$, який містить відрізок, що з'єднує точки $x$ і $x_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(m)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n^{(k+m)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 0,\ m \in \mathbf{Z}_+.$$

Отже, $\varphi_n^{(m)}(x) \to 0$, $m \in \mathbf{Z}_+$, на множині $Q$.

Розглянемо тепер довільний компакт $K$ такий, що $K\bigcap Q\neq\emptyset$. Тоді

$$\forall x\in\mathbf{K}\ \forall m\in\mathbf{Z}_+:\ \lim_{n\to\infty}|\varphi_n^{(m)}(x)|\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\varphi_n^{(k+m)}(x_0)|}{k!}|x-x_0|^k\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\varphi_n^{(k+m)}(x_0)|}{k!}N^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{|\varphi_n^{(k+m)}(x_0)|}{k!}N^k=0,$$

де $N=\lambda_1(K)+\rho(x_0,K)$ ( тут $\lambda_1(K)$ – міра Лебега на прямій компакта $K$, $\rho(x_0,K)=$ $=\inf\limits_{x\in K}|x-x_0|$ ).

Отже,

$$\forall\,K\subset\mathbf{R}\ \forall\,m\in\mathbf{Z}_+:\quad\varphi_n^{(m)}\underset{n\to\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}}0.$$

Зазначимо, що на $\mathbf{R}\setminus Q$ правильні оцінки

$$\exists C>0\ \exists a>0\ \exists b>0\ \forall m\in\mathbf{Z}_+$$

$$\exists\rho_m\in[0,m),\ \rho_0=0,\ \forall n\in\mathbf{N}:$$

$$|\varphi_n^{(m)}(z)|\leq C\frac{m!b^m}{\rho_m^m}\exp\{-M(ax)+\Omega(\rho_m)\},$$

де $\rho_m$ – розв'язок рівняння $x\eta(x)=m$, $m\in$ $\in\mathbf{Z}_+$.

Доведемо, що ці оцінки зберігаються на $Q$.

Нехай знову $x_0$ – деяка фіксована точка з $\mathbf{R}\setminus Q$, і розглянемо довільне $x\in Q$. Тоді

$$\forall n\in\mathbf{N}\ \forall m\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in Q:\quad|\varphi_n^{(m)}(x)|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\varphi_n^{(k+m)}(x_0)|}{k!}|x-x_0|^k\leq\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|\varphi_n^{(k)}(x_0)|}{(k-m)!}L^k,$$

де $L=\lambda_1(Q)+\rho(x_0,Q)$.

Використовуючи вищенаведені оцінки для $\{\varphi_n,\,n\geq1\}$ на $\mathbf{R}\setminus Q$, отримуємо, що

$$\forall n\in\mathbf{N}\ \forall m\in\mathbf{Z}_+\ \forall x\in Q:$$

$$|\varphi_n^{(m)}(x)|\leq C\exp\{-M(ax_0)\}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{\infty}\frac{b^kk!L^{k-m}}{\rho_k^k(k-m)!}\exp\{\Omega(\rho_k)\}\leq$$

$$\leq C\exp\{-M(ax)\}\exp\{M(ax)\}\times$$

$$\times\frac{m!}{L^m}\cdot\frac{\exp\{\Omega(\rho_m)\}}{\rho_m}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bL)^kk!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{\rho_m^m}{\rho_k^k}\cdot\frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}}.$$

Зазначимо, що:

1) $\sup\limits_{x\in Q}\exp\{M(ax)\}=C_{Q,a}<\infty$;

2) $C_m^k=\dfrac{k!}{m!(k-m)!}\leq\displaystyle\sum_{j=0}^{k}C_k^j=2^k$.

Тоді

$$\forall n\in\mathbf{N}\ \ \forall m\in\mathbf{Z}_+\ \ \forall x\in Q:\quad|\varphi_n^{(m)}(x)|\leq$$

$$\leq CC_{Q,a}\frac{m!}{L^m}\cdot\frac{\exp\{\Omega(\rho_m)\}}{\rho_m^m}\exp\{-M(ax)\}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{\infty}(2Lb)^k\cdot\frac{\rho_m^m}{\rho_k^k}\cdot\frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}}.$$

Оцінимо вираз

$$(2Lb)^k\cdot\frac{\rho_m^m}{\rho_k^k}\cdot\frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}},\ k\geq m.$$

Оскільки $1\leq\exp\{\Omega(\rho_k)\}\leq\exp\{k\}$, $k\in$ $\in\mathbf{Z}_+$, то

$$(2Lb)^k\cdot\frac{\rho_m^m}{\rho_k^k}\cdot\frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}}\leq(2Lbe)^k\cdot\frac{\rho_m^m}{\rho_k^k},\ k\geq m.$$

Відомо, що $\rho_k\to\infty$ при $k\to\infty$, тому існує номер $k_0\geq\rho\geq4Lbem$ такий, що для всіх $k\geq k_0$ виконується нерівність $\dfrac{\rho_m}{\rho_k}<$ $<\dfrac{1}{4Lbe}$. Оскільки $[am]\leq([a]+1)m$ ( тут $[s]$ – ціла частина числа $s$ ) для довільних $a>0$ і $m\in\mathbf{Z}_+$, то, взявши $k_0=([4Lbe]+1)m$, отримаємо, що:

1) $(2Lbe)^k\cdot\left(\dfrac{\rho_m}{\rho_k}\right)\leq(1/2)^k,\ k\geq k_0$;

2) $(2Lbe)^k\cdot\left(\dfrac{\rho_m}{\rho_k}\right)\leq(2Lbe)^k\leq C_m$,

$m \le k \le k_0$,
де $C_m = max\{1, \ (2Lbe)^{k_0}\}$.

Зазначимо, що $C_m < b_1^m$, $m \in \mathbf{Z}_+$, де $b_1$ – деяка стала, більша за одиницю.

Тоді

$$\sum_{k=m}^{\infty}(2Lb)^k \cdot \frac{\rho_m^m}{\rho_k^k} \cdot \frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}} \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{k_0}(2Lb)^k \cdot \frac{\rho_m^m}{\rho_k^k} \cdot \frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}} +$$

$$+ \sum_{k=m}^{\infty}(2Lb)^k \cdot \frac{\rho_m^m}{\rho_k^k} \cdot \frac{\exp\{\Omega(\rho_k)\}}{\exp\{\Omega(\rho_m)\}} \le$$

$$\le b_1^m(k_0 - m) + 1 \le 2([4Lbe] + 1)mb_1^m.$$

Отже, для $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{N}$

$$|\varphi_n^{(m)}| \le 2CC_{Q,a}([4Lbe] + 1)\left(\frac{2b_1}{L}\right)^m \times$$

$$\times m!\frac{\exp\{\Omega(\rho_m)\}}{\rho_m^m}\exp\{-M(ax)\}.$$

Тоді

$$\exists \tilde{C} > 0 \ \ \exists \tilde{a} > 0 \ \ \exists \tilde{b} > 0 \ \ \forall m \in \mathbf{Z}_+$$

$$\exists \rho_m \in [0, m), \ \ \rho_0 = 0, \ \ \forall n \in \mathbf{N} \ \ \forall x \in \mathbf{R}:$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le \tilde{C}\frac{m!\tilde{b}^m}{(\rho_m)^m}\exp\{-M(\tilde{a}x) + \Omega(\rho_m)\},$$

де $\tilde{C} = max\{C, 2CC_{Q,a}([4Lbe] + 1)\}$, $\tilde{b} = max\left\{b, \frac{2b_1}{L}\right\}$, $\rho_n$ – розв'язок рівняння $x\eta(x) = n$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

Крім того, $\{\psi_n - \varphi_n, n \ge 1,\} \subset S$, тому $\psi_n - \varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ за топологією простору $S$.

Отже, функціонал $F_Q \in (W_M^{\Omega}(\mathbf{R} \setminus Q))'$.

Для кожної функції $\varphi \in W_M^{\Omega}$ очевидна рівність $\langle F_Q, \varphi\rangle = \langle F, \varphi\rangle$.

Звідси випливає, що $F_Q$ є лінійним неперервним продовженням функціонала $F$ на простір $W_M^{\Omega}(\mathbf{R} \setminus Q)$.

Доведемо, що $F_Q = 0$ на $Q$.

Якщо тепер взяти довільну функцію $\psi \in \in W_M^{\Omega}(\mathbf{R} \setminus Q)$, для якої $supp\,\psi \subset Q$, то знайдеться замкнена множина $\bar{Q}_2 \subset Q$ така, що $supp\,\psi \subset \bar{Q}_2$. Тоді

$$\langle F_Q, \psi\rangle = \langle F, \varphi\rangle + \langle\gamma_Q G, \psi - \varphi\rangle = \langle G, \gamma_Q\psi\rangle\,.$$

Відомо [4], що для всіх $\delta \in (0, 1]$

$$\langle G, \gamma_Q\psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\bar{Q}_2}[\tilde{G}_{\delta,\alpha}(x+i\varepsilon) - \tilde{G}_{\delta,\alpha}(x-i\varepsilon)]\times$$

$$\times\mu_{-\delta,\alpha}(x)\gamma_Q(x)\psi(x)dx.$$

Але [4]

$$\tilde{G}_{\delta,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\langle G_x, \, \eta_{\delta,z,1,\alpha}(x)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\langle F_x, \, \eta_{\delta,z,1,\alpha}(x)\rangle = \tilde{F}_{\delta,\alpha}(z),$$

$$z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \ \ x \in \mathbf{R}, \delta \in (0, 1].$$

Тому

$$\langle F_Q, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\bar{Q}_2}[\tilde{F}_{1,\alpha}(x + i\varepsilon) - \tilde{F}_{1,\alpha}(x - i\varepsilon)]\times$$

$$\times\mu_{-1,\alpha}(x)\gamma_Q(x)\psi(x)dx.$$

Оскільки функція $\tilde{F}_{1,\alpha}$ продовжується аналітично на $Q$, то $\langle F_Q, \psi\rangle = 0$, тобто $F_Q = 0$ на $Q$. Тоді, за означенням 3, функція $F = 0$ на цій множині $Q$.

Випадки $F \in (S^{\beta})'$, $F \in (S_{\alpha})'$, $\alpha \ge 1$, $\beta \ge \ge 1$, розглядаються аналогічно. Якщо ж $F \in \in S'$, то твердження очевидне.

Достатність. 1. Якщо $F \in S'$ і $F = 0$ на відкритій множині $Q$ за означенням 3, то очевидно, що $F = 0$ на $Q$ за означенням 1, оскільки $K(Q) \subset S$ і $F_Q = F$.

2. Нехай $F \in (S_{\alpha}^{\beta})'$, $\alpha \ge 1$, $\beta \ge 1$. За теоремою Гана-Банаха, продовжимо лінійно і неперервно функціонал $F$ на простір $S$. Продовження позначимо через $G$, тобто $G \in S'$.

Розглянемо довільну функцію $\varphi \in S$ таку, що $supp\,\varphi \subset Q$. Тоді $\varphi \in K(Q)$ і $\langle G, \, \varphi\rangle = = \langle F_Q, \, \varphi\rangle = 0$. Отже, $G = 0$ на відкритій множині $Q$ за означенням 1.

Якщо $F \in (S_{\alpha}^{\beta})'$, $\alpha \ge 1$, $\beta > 1$, то очевидно, що $F = 0$ на $Q$ за означенням 1. Якщо ж $F \in (S^1_\alpha)'$, $\alpha \geq 1$, то, оскільки індикатриса $\tilde{G}_{1,\alpha}$ аналітична на $(\mathbf{C}\setminus\mathbf{R})\bigcup Q$, а $\tilde{G}_{1,\alpha} = \tilde{F}_{1,\alpha}$, $F = 0$ на $Q$ за означенням 2.

3. Випадки $F \in (S^\beta)'$, $\beta \geq 1$, $F \in (S_\alpha)'$, $\alpha \geq 1$, розглядаються аналогічно.

**Лема 4.** *Якщо узагальнена функція $F \in (W^\Omega_M)'$ дорівнює нулеві на відкритій множині $Q$, то вона як узагальнена функція з простору $(W^{\Omega_1}_{M_1})'$ також дорівнює нулю на $Q$, де $W^{\Omega_1}_{M_1} \subset W^\Omega_M$.*

**Доведення.** Нехай $F \in (W^\Omega_M)'$ і $F = 0$ на $Q$, тобто існує продовження $F_Q \in (W^\Omega_M(\mathbf{R}\setminus\setminus Q))'$, яке дорівнює нулеві на $Q$. Оскільки $W^{\Omega_1}_{M_1} \subset W^\Omega_M$, то $W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbf{R}\setminus Q) \subset W^\Omega_M(\mathbf{R}\setminus Q)$. Тому функціонал $F_Q$ дорівнює нулеві на $Q$ у просторі $(W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbf{R}\setminus Q))'$, тобто $F_Q$ є продовженням функції $F$ з $W^{\Omega_1}_{M_1}$ на $W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbf{R}\setminus Q)$ і дорівнює нулеві на $Q$. Тоді, за означенням 3, $F = 0$ на $Q$ у просторі $(W^{\Omega_1}_{M_1})'$.

**Зауваження 1.** *Простори $S^\beta_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, є просторами $W^\Omega_M$, де $M(x) = x^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $x \in \mathbf{R}$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $y \in \mathbf{R}$. Отже, для функції $F \in S^\beta_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, введене поняття "функціонал дорівнює нулеві на обмеженій відкритій множині", яке залишається правильним і у випадку $\alpha \geq 1$, $0 < \beta < 1$.*

**Зауваження 2.** *При доведенні теореми для функції $F \in (S^\beta_\alpha)'$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$, встановлено еквівалентність означень 1, 2 і 3.*

**Зауваження 3.** *Аналоги теореми і леми 4 мають місце і для випадку, коли $F \in (W^\Omega)'$.*

**Зауваження 4.** *Простори $S^\beta$, $0 < \beta < 1$, є просторами $W^\Omega$, де $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $y \in \mathbf{R}$. Отже, для функції $F \in S^\beta$, $0 < \beta < 1$, введене поняття "функціонал дорівнює нулеві на обмеженій відкритій множині".*

**Зауваження 5.** *Для довільної функції $F \in (S^\beta)'$, $\beta > 1$, означення 1, 2 і 3 еквівалентні.*

**Означення 4.** *Узагальнена функція $F \in (W^\Omega_M)'$ ( $F \in (W^\Omega)'$ ) дорівнює нулеві на необмеженій відкритій множині $\tilde{Q} \subset \mathbf{R}$, якщо вона дорівнює нулеві на довільній обмеженій відкритій множині $Q \subset \tilde{Q}$.*

**Зауваження 6.** *Якщо узагальнена функція $F \in (W^\Omega_M)'$ ($F \in (W^\Omega)'$) дорівнює нулеві на відкритій множині $Q$, то кожне її лінійне неперервне продовження $G \in S'$ ( $G \in (S^\beta_\nu)'$, $G \in (S^\beta)'$, $G \in (S_\nu)'$, $\nu \geq \alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ ) також дорівнює нулеві на $Q$.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

2. *Готинчан Т.І.* Сукупності функцій класу $\mathcal{L}$ у просторах типу $W$ // Сучасні проблеми математики. Матеріали міжнародної наук. конференції. Частина І. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— С.152—155.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 308с.

4. *Готинчан Т.І.* Про аналітичне зображення ультрарозподілів типу $S'$ // Вісник Київського ун-ту. Серія фізико-математичних наук. – Вип. 1. – 1998. – С. 37 – 41.

5. *Эдварс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.