УДК 517.956.4

©1999 р. Л.П. Березан

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИЛЬНО ВИРОДЖЕНОЇ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ $2\vec{b}$-ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Одержано інтегральне зображення одного класу розв'язків $2\vec{b}$-параболічної системи з сильним виродженням на початковій гіперплощині. Ці розв'язки задовольняють початкову умову із спеціальною ваговою функцією.

The integral representation for a class of solutions of $2\vec{b}$-parabolic system with strong degeneration on the initial hyperplane is obtained. These solutions satisfy the initial condition with a special weight function.

Системи рівнянь, які розглядаються в статті, належать до $2\vec{b}$-параболічних систем С.Д.Ейдельмана, в яких кожна просторова змінна може мати свою вагу відносно часової змінної і які містять певного типу вироджения на початковій гіперплощині. Теорії $2\vec{b}$-параболічних систем без вироджень присвячено ряд праць, зокрема праця [1]. Параболічні за Петровським системи з виродженням на початковій гіперплощині досліджувались у [2–4]. Результати побудови й дослідження властивостей фундаментальної матриці розв'язків (ф.м.р.) задачі Коші для систем, які тут розглядаються, наведені в [5]. У цій статті вони використовуються для одержання інтегрального зображення розв'язків з певного класу.

1. Використовуватимемо такі позначення: $n,\ b_1,\dots,b_n,\ N-$задані натуральні числа; $2\vec{b}\equiv(2b_1,\dots,2b_n)$; s - найменше спільне кратне чисел $b_1,\dots,b_n$; $m_j\equiv s/b_j$, $q_j\equiv 2b_j/(2b_j-1),\ 1\le j\le n$; q' і q'' - відповідно найменше і найбільше з чисел $q_j,\ 1\le j\le n$; $M\equiv\sum\limits_{j=1}^{n}m_j$; якщо $x\in\mathbb{R}^n$, то $x_1,\dots,x_n$ – координати x; $||k||\equiv\sum\limits_{j=1}^{n}m_jk_j$, якщо k – мультиіндекс; T – задане додатне число; $\Pi_H\equiv\{(t,x)|t\in H,\ x\in\mathbb{R}^n\}$, якщо $H\subset\mathbb{R}$; I – одинична матриця порядку N, $\mathbb{C}_{hp}$ – сукупність усіх матриць розміром $h\times p$, елементами яких є комплексні числа; α: $[0,T]\to\mathbb{R}$ і $\beta:[0,T]\to\mathbb{R}$ – неперервні функції, для яких $\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$ при $t\in(0,T]$ і $\alpha(0)\,\beta(0)=0$, причому функція β монотонно неспадна;

$$A(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)},\ B(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma,\ 0<\tau\le t\le T;$$

$$E_c(t,\tau,x)\equiv\exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n}(B(t,\tau))^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\right\},$$

$$E^d(t,\tau)\equiv\exp\{dA(t,\tau)\},$$
$$E_c^d(t,\tau,x)\equiv E_c(t,\tau,x)E^d(t,\tau),$$

$$0<\tau<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^n,\ c>0,\ d\in\mathbb{R};$$

$$p(x,\xi)\equiv\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-\xi_j|^{2/m_j}\right)^{1/2}\ -$$

$2\vec{b}$-параболічна відстань між точками x і ξ з $\mathbb{R}^n$ (умова Гельдера по x всюди далі розуміється відносно цієї відстані);

$$d(x,\xi) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - \xi_j|^{q_j} \right)^{1/q''} -$$

спеціальна відстань між точками x і ξ в просторі $\mathbb{R}^n$; $K(x,R) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) \leq \leq R\}$, $K_R \equiv K(0,R)$, $R > 0$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{0<||k||\leq 2s} a_k(t,x)\partial_x^k -$$

$$-a_0(t,x))u(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]},\ (1)$$

де $a_k : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $||k|| \leq 2s$; $u, f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$.

Для коефіцієнтів a_k, $||k|| \leq 2s$, вважатимемо виконаними такі умови:

1) існує така стала $\delta > 0$, що p-корені рівняння

$$\det \left(\sum_{||k||=2s} a_k(t,x)(i\sigma)^k - pI \right) = 0$$

задовольняють нерівність $Re\ p(t,x,\sigma) \leq \leq -\delta \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}$ для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$;

2) функції a_k, $||k|| \leq 2s$, обмежені й неперервні по t (при цьому неперервність a_k з $||k|| = 2s$ рівномірна по $x \in \mathbb{R}^n$), а також задовольняють у $\Pi_{[0,T]}$ рівномірну умову Гельдера по x з показником $\lambda \in (0,1)$;

3) існують обмежені й неперервні по t похідні $\partial_x^k a_k$, $||k|| \leq 2s$, які задовольняють рівномірну умову Гельдера по x з показником λ.

2. Якщо виконуються умови 1 і 2, то (див. [5]) існує ф.м.р. $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задачі Коші для системи (1), для якої правильні оцінки

$$\left| \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi) \right| \leq$$

$$\leq C(B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 < \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ ||k|| \leq 2s,\quad (2)$$

де $C > 0$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ – деякі сталі.

Якщо, крім умов 1 і 2, виконується ще умова 3, то ф.м.р. Z має властивість нормальності. Це означає, що матриця

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) \equiv \bar{Z}'(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 < \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\qquad (3)$$

є ф.м.р. задачі Коші для системи

$$(L^* v)(\tau,\xi) \equiv -\partial_\tau v(\tau,\xi) -$$

$$-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{0<||k||\leq 2s} (-\partial_\xi)^k (\bar{a_k}'(\tau,\xi) v(\tau,\xi)) -$$

$$-\frac{\bar{a_0}'(\tau,\xi)}{\alpha(\tau)} v(\tau,\xi) = 0,\ (\tau,\xi) \in \Pi_{[t_0,t)},\qquad (4)$$

при довільних t_0 і t таких, що $0 < t_0 < t \leq T$. Тут і далі штрих означає транспонування, а риска – комплексне спряження.

Зауважимо, що диференціальний вираз L^* з (4) є спряженим за Лагранжем з виразом

$$(Lu)(t,x) \equiv \left(I\partial_t - -\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{0<||k||\leq 2s} a_k(t,x)\partial_x^k - \right.$$

$$\left. -\frac{a_0(t,x)}{\alpha(t)} \right) u(t,x),\quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}.\qquad (5)$$

3. Сформулюємо основний результат статті. Для цього розглянемо набір функцій

$$\vec{k}(t) \equiv (k_1(t),\ldots,k_n(t)), k_j(t) \equiv$$

$$\equiv c_0 a_j \left(c_0^{2b_j-1} - (T - B(T,t)) a_j^{2b_j-1} \right)^{1-q_j},$$

$$1 \leq j \leq n,\ t \in [0,T],$$

де c_0 – фіксоване число з проміжку $(0,c)$, c – стала з оцінок (2), а числа a_j, $1 \leq j \leq n$, такі, що $0 \leq a_j < c_0 T^{1-q_j}$. Кожна з функцій k_j, $1 \leq j \leq n$, монотонно зростає від значення $k_j(0)$ до $k_j(T)$ і має таку властивість:

$$\forall\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}\quad \forall\ t \in \{t,\tau\} \subset (0,T],\ \tau < t:$$

$$-c_0(B(t,\tau))^{1-q_j}|x-\xi|^{q_j} + k_j(\tau)|\xi|^{q_j} \leq k_j(t)|x|^{q_j}.\qquad (6)$$

Якщо запровадити позначення

$$\Psi_\nu(t,x) \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{ \nu \sum_{j=1}^{n} k_j(t)|x_j|^{q_j} \right\}, (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

$\nu = \pm 1$, то з (6) випливає нерівність

$$E_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Psi_1(\tau,\xi) \leq \Psi_1(t,x),$$

$$0 < \tau < t \leq T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (7)$$

Для функцій $u: \ \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ вважатимемо

$$\|u(t,\cdot)\|^{\vec{k}(t)} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(|u(t,x)|\Psi_{-1}(t,x)\right).$$

Припустимо, що для системи (1) має місце сильне виродження, але з додатковим обмеженням, тобто виконується така умова:

$$4) \quad \int_0^T \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} = \infty, \quad \int_0^T \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma < \infty.$$

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови 1 – 4 і d – стала з оцінок (2). Нехай функція* $u: \ \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ *неперервна і задовольняє такі умови:*

а) $\exists C > 0 \ \forall t \in (0,T]$:

$$\|u(t,\cdot)\|^{\vec{k}(t)} E^d(T,t) \leq C;$$

б) функція u є розв'язком системи (1) з неперервною функцією $f: \ \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$, *для якої збігається інтеграл*

$$\int_0^T \|f(\tau,\cdot)\|^{\vec{k}(\tau)} E^d(T,\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)};$$

в) $\lim\limits_{t\to 0}(u(t,x)E^d(T,t)) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^n$.

Тоді правильне зображення

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (8)$$

де

$$Z_0(t,x;\xi) \equiv \lim_{\tau\to 0} (Z(t,x;\tau,\xi)E^{-d}(T,\tau)).$$

Зауваження 1. *Задачу про знаходження розв'язку системи (1), який задовольняє умову в) теореми, природно назвати узагальненою задачею Коші, а матрицю* (Z_0, Z) *– матрицею Гріна цієї задачі.*

Як приклад розглянемо рівняння

$$\alpha(t)\partial_t u = \beta(t)(\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^4)u + du,$$

в якому $n = 2, \ d \in \mathbb{R}$, а функції α і β задовольняють умови з теореми. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для цього рівняння визначається формулою

$$Z(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-2} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{i(x-\xi,\sigma) - B(t,\tau)(\sigma_1^2 + \sigma_2^4) +$$

$$+ dA(t,\tau)\} d\sigma, \ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^2,$$

звідки, згідно з [6, с. 207], одержуємо вираз

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} (B(t,\tau))^{-3/4} \times$$

$$\times \exp\left\{ dA(t,\tau) - \frac{(x_1-\xi_1)^2}{4B(t,\tau)} \right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\{-r^4\} J_{-1/2}(r(B(t,\tau))^{-1/4} \times$$

$$\times |x_2 - \xi_2|) r^{1/2} dr, \ 0 < \tau < t \leq T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^2,$$

де $J_{-1/2}$ - функція Бесселя першого роду порядку $-1/2$. Легко бачити, що

$$Z_0(t,x;\xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} (B(t,0))^{-3/4} \times$$

$$\times \exp\left\{ -dA(T,t) - \frac{(x_1-\xi_1)^2}{4B(t,0)} \right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\{-r^4\} J_{-1/2}(r(B(t,0))^{-1/4} \times$$

$$\times|x_2-\xi_2|)r^{1/2}dr,\ 0<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^2.$$

Зауваження 2. *З теореми випливає єдиність розв'язку узагальненої задачі Коші в класі функцій, які задовольняють умову а) теореми.*

4. При доведенні теореми користуватимемося такою формулою Гріна-Остроградського [1]:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau\int\limits_{\Omega}\left(\bar v' Lu-(\overline{L^* v})' u\right)(\tau,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\Omega}(\bar v' u)(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2}d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{n}B^j[v,u](\tau,\xi)\nu_j dS_\xi,\qquad(9)$$

де $t_1<t_2$, Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$, $(\nu_1,\dots,\nu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, L і L^* – диференціальні вирази з (4) і (5), а

$$B^j[v,u]\equiv-\sum_{0<\|k\|<2s}\sum_{r_j=0}^{k_j-1}(-\partial_{x_1})^{k_1}\cdots\times$$

$$\times(-\partial_{x_{j-1}})^{k_{j-1}}(-\partial_{x_j})^{r_j}(\bar v' a_k)\partial_{x_j}^{k_j-r_j}\partial_{x_{j+1}}^{k_{j+1}}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}u,$$
$$1\le j\le n,$$

при $k_j=0$ відповідна сума дорівнює нулеві.

Нехай t_0 – довільно взяте число з проміжку $(0,T)$; $G_R\equiv(t_0,T]\times K_R$; θ – функція з простору $C^\infty([0,\infty))$ така, що $\theta=1$ на [0,1/2], $\theta=0$ на $[3/4,\infty)$ і $\theta'\le 0$; (t,x) – довільно фіксована точка з $G_{\bar R/4}$, де $\bar R>0$ – фіксоване число. Візьмемо у формулі (9) замість t_1, t_2, Ω, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi)$ відповідно t_0, $t-\varepsilon$, K_R, $u(\tau,\xi)$ і $\theta_R(\xi)Z^*(\tau,\xi;t,x)$, де $R\ge\bar R$, $0<\varepsilon<(t-t_0)/2$, $\theta_R(\xi)\equiv\theta(d(\xi,0)/R)$, а u – функція, яка задовольняє умови теореми. Використавши властивості функції θ_R, рівність (3) і те, що $Lu=f/\alpha$, одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t-\varepsilon,\xi)\theta_R(\xi)u(t-\varepsilon,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t_0,\xi)\theta_R(\xi)u(t_0,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\theta_R(\xi)f(\tau,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t-\varepsilon}d\tau\int\limits_{K_{3R/4}\setminus K_{R/2}}\overline{(L^*(\theta_R(\xi)Z^*(\tau,\xi;t,x))'}\times$$

$$\times u(\tau,\xi)d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon\to0$ прийдемо до рівності

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t_0,\xi)\theta_R(\xi)u(t_0,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\theta_R(\xi)f(\tau,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{K_{3R/4}\setminus K_{R/2}}\overline{(L^*(\theta_R(\xi)Z^*(\tau,\xi;t,x))'}\times$$

$$\times u(\tau,\xi)d\xi\equiv\sum_{j=1}^{3}I_j^{(R)}.\qquad(10)$$

Перейдемо в (10) до границі при $R\to\infty$. Інтеграл $I_1^{(R)}$ при цьому прямує до

$$I_1\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi.$$

Справді, за допомогою нерівностей (2) і (7) та умови а) маємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|=\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t_0,\xi)(1-$$

$$-\theta_R(\xi))u(t_0,\xi)d\xi\Bigg|\le C(B(t,t_0))^{-M/(2s)}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus K_{R/2}} E^d_{c-c_0}(t,t_0,x-\xi)\times$$

$$\times(E_{c_0}(t,t_0,x-\xi)\Psi_1(t_0,\xi))(|u(t_0,\xi)|\times$$

$$\times\Psi_{-1}(t_0,\xi))d\xi \le C\|u(t_0,\cdot)\|^{\vec{k}(t_0)}\times$$
$$\times\Psi_1(t,x)E^d(t,t_0)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{c-c_0}{2}(B(t,t_0))^{\lambda}\left(\frac{R}{4}\right)^{q''}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,t_0))^{-M/(2s)}\times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,t_0,x-\xi)d\xi \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

бо для $x\in K_{\bar{R}/4}$, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus K_{R/2}$ і $R>\bar{R}$

$$\sum_{j=1}^{n}(B(t,t_0))^{1-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j}\ge$$

$$\ge (B(t,t_0))^{\lambda}|d(\xi,0)-d(x,0)|^{q''}\ge$$
$$\ge (B(t,t_0))^{\lambda}\,(R/4)^{q''},$$

де $\lambda=1-q'$ при $0<B(t,t_0)\le 1$, і $\lambda=1-q''$ при $B(t,t_0)>1$.

Аналогічно доводиться, що

$$I_2^{(R)}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi.$$

Тепер доведемо, що $I_3^{(R)}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$. Оскільки $L^*Z^*=0$, то вираз $L^*(\theta_R(\xi)Z^*(\tau,\xi;t,x))$ являє собою суму добутків виразів вигляду

$$\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}D_\xi^m(\bar{a}'_k(\tau,\xi)Z^*(\tau,\xi;t,x)) \ \textit{i}\ D_\xi^k\theta_R(\xi),$$

$1\le\|k\|\le 2s$, $\|m\|<2s$ із сталими коефіцієнтами. Використавши рівність (3), оцінки (2) і властивості функції θ_R, при $R\ge 1$ одержимо оцінку

$$|L^*(\theta_R(\xi)Z^*(\tau,\xi;t,x))|\le$$

$$\le C\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}(B(t,\tau))^{-(M+2s-1)/(2s)}E_c^d(t,\tau,x-\xi).$$

З допомогою цієї оцінки і нерівності (7) так, як і при оцінюванні $|I_1-I^{(R)}|$, маємо

$$|I_3^{(R)}|\le C\int\limits_{t_0}^{t}(B(t,\tau))^{-1+1/(2s)}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{K_{3R/4}\setminus K_{R/2}}E^d_{c-c_0}(t,\tau,x-\xi)\times$$

$$\times(E_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Psi_1(\tau,\xi))(|u(\tau,\xi)|\times$$

$$\times\Psi_{-1}(\tau,\xi))(B(t,\tau))^{-M/(2s)}d\xi\le$$

$$\le C\Psi_1(t,x)(B(t,t_0))^{1/(2s)}E^{-d}(T,t)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{(c-c_0)/2}(t,\tau,x-\xi)\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M/(2s)}d\xi\exp\left\{-\frac{c-c_0}{2}\times\right.$$

$$\left.\times(B(t,t_0))^{\lambda}\left(\frac{R}{4}\right)^{q''}\right\}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Отже, після переходу в (10) до границі при $R\to\infty$ одержимо

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi. \tag{11}$$

Якщо тепер, використовуючи умови теореми, перейти в (11) до границі при $t_0\to 0$, то одержимо потрібну формулу (8).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $2\vec{b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.— К.: Ин-т математики АН УССР.— 1968.— Вып.1.— С.3—175, 271—273.

2. *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравнения.— 1986.— 22, N6.— С.1065—1068.

3. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України.— 1994.— N6.— С.7—11.

4. *Возняк О. Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.— Чернівці: Рута, 1995.— С.42—60.

5. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.— 1998.— N12.— С.7—12.

6. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи.— Кишинев: Штиинца, 1992.— 328с.