УДК 517.956.4

©1999 р. Т.М. Балабушенко, С.Д. Івасишен

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ УЛЕНБЕКА—ОРНШТЕЙНА З ВИРОДЖЕННЯМ

Знайдені явні вирази для елементів вектор-функцій Гріна крайових задач Діріхле і Неймана без початкових умов для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека–Орнштейна з виродженням. Описаний клас розв'язків, які можуть бути зображені в інтегральній формі за допомогою вектор–функцій Гріна.

We find the explicit expressions for elements of Green's vector-functions of Dirichlet and Neumann boundary value problems without initial conditions for Kolmogorov's equation for Uhlenbeck – Ornstein diffusion process with degeneration. The class of solutions that can be represented with the aid of Green's vector–function in the integral form is described.

Стаття присвячена знаходженню формул для розв'язків задач Діріхле і Неймана в області $Q_{-\infty} \equiv \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | \ t < T, \ x > 0\}$, де T – задане дійсне число, для рівняння

$$Lu(t,x) \equiv (\alpha(t)\partial_t - \partial_x^2 - \\ -x\partial_x - 1)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_{-\infty}, \tag{1}$$

в якому $\alpha : \ (-\infty, T] \to (0, \infty)$ – неперервна функція така, що $\alpha(t) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Рівняння (1) є рівнянням Колмогорова дифузійного процесу Уленбека – Орнштейна [1, с.165]. Це рівняння є параболічним рівнянням другого порядку, коефіцієнт при похідній першого порядку по x якого необмежено зростає при $x \to \infty$. Воно характерне тим, що для нього вдається знайти явні формули для фундаментального розв'язку задачі Коші [1, с.166-167], а також для елементів вектор-функцій Гріна основних крайових задач із звичайною початковою умовою і крайовими умовами при $x = 0$ [2].

Задачі, які розглядаються в статті, є задачами Діріхле і Неймана без початкових умов. Такі задачі виникають, коли якийсь процес вивчається в моменти часу, досить віддалені від початкового моменту, і тоді вплив початкових даних практично не позначається на поведінці відповідної функції в момент спостереження. Розглянуті в статті задачі без початкової умови містять ще виродження при $t \to -\infty$.

1. Розглянемо задачу про знаходження розв'язку u рівняння (1) , який задовольняє одну з таких крайових умов :

$$B_i u(t,x) \mid_{x=0} = g_i(t), \quad t \in (-\infty, T], \quad i = 1, 2, \tag{2_i}$$

де $B_1 u \equiv u$, а $B_2 u \equiv \partial_x u$. Метою статті є знаходження формул для розв'язків задач $(1), (2_i), \ i = 1, 2$.

Нехай $A(t,\tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $\rho(t,x;\tau,\xi) \equiv (1 - e^{-2A(t,\tau)})^{-1}(x - e^{-A(t,\tau)}\xi)^2$, c – фіксована стала з проміжку $(0, \frac{1}{2})$, a – задана невід'ємна стала. Розглянемо функцію

$$k(t,a) \equiv cae^{-2A(T,t)}(c + a(1 - e^{-2A(T,t)}))^{-1}, \\ t \le T. \tag{3}$$

Дослідивши на максимум функцію $f(\xi) \equiv -c\rho(t,x;\tau,\xi) + k(\tau,a)\xi^2, \ \xi \in \mathbb{R}$, легко переконатися, що функція (3) має таку властивість:

$$\forall \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}, \quad \forall \ \{\tau, t\} \subset (-\infty, T], \quad \tau < t : \\ -c\rho(t,x;\tau,\xi) + k(\tau,a)\xi^2 \le k(t,a)x^2. \tag{4}$$

Для неперервної функції u будемо вважати

$$||u(t,\cdot)||^{k(t,a)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{x\in[0,\infty)} (|u(t,x)| \exp\{-k(t,a)x^2\}),$$

$$t \in (-\infty, T],$$

і сформулюємо основний результат статті.

Теорема. *Нехай неперервні функції* f *і* g_i, $i = 1, 2$, *задовольняють такі умови:*

$$\exists\, C_1 > 0 \;\forall\, t \le T: \; \|f(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \le$$

$$\le C_1 \exp\{-A(T,t)\}\eta(t), \qquad (5)$$

$$\exists\, C_2 > 0 \;\forall\, t \le T: \; |g_i(t)| \le C_2 \exp\{-iA(T,t)\},$$

$$i = 1, 2, \qquad (6_i)$$

де функція η *така, що* $\int\limits_{-\infty}^{T} \frac{\eta(t)}{\alpha(t)} dt < \infty$. *Тоді всякий розв'язок* u_i *задачі* (1), (2_i), $i = 1, 2$, *який задовольняє умову*

$$\exists\, C_3 > 0 \;\forall\, t \le T:$$

$$\|u_i(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \le C_3 \exp\{-A(T,t)\}\varepsilon(t), \quad (7_i)$$

де $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to -\infty$, *зображується у вигляді*

$$u_i(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{0}^{\infty} G_{i0}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} G_{i1}(t,x;\tau) g_i(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad (t,x) \in Q_{-\infty}. \qquad (8_i)$$

Функції G_{i0} *і* G_{i1}, $i = 1, 2$, *визначаються такими формулами:*

$$G_{i0}(t,x;\tau,\xi) \equiv (2\pi(1 - e^{-2A(t,\tau)}))^{-1/2} \times$$

$$\times \left(\exp\left\{ -\frac{1}{2}\rho(t,x;\tau,\xi) \right\} + (-1)^i \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ -\frac{1}{2}\rho(t,x;\tau,-\xi) \right\} \right), \qquad (9_i)$$

$$G_{i1}(t,x;\tau) \equiv (-1)^{i+1} 2^{1/2} (xe^{-A(t,\tau)})^{2-i} \times$$

$$\times (\pi^{1/2}(1 - e^{-2A(t,\tau)})^{1+\frac{(-1)^{i+1}}{2}})^{-1} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2}\rho(t,x;\tau,0) \right\},$$

$$-\infty < \tau < t \le T, \quad x > 0, \quad \xi > 0, \quad i = 1, 2. \qquad (10_i)$$

Зауваження. *З формул* (9_i) *і* (10_i) *легко випливають рівності*

$$G_{i1}(t,x;\tau) = -\partial_\xi^{2-i} G_{i0}(t,x;\tau,\xi) \,|_{\xi=0},$$

$$-\infty < \tau < t \le T, \; x > 0, \; i = 1, 2.$$

Вектор–функції (G_{i0}, G_{i1}) природно назвати *вектор-функціями Гріна* задач $(1), (2_i), i = 1, 2$.

Доведення теореми проводиться в наступних пунктах.

2. Нехай $t_0 < T$, $\quad Q_{t_0} \equiv \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 < t \le T, \; x > 0\}$ та i – одне з чисел 1 або 2. Розв'язок u_i задачі (1), (2_i) є, очевидно, розв'язком у Q_{t_0} крайової задачі (1), (2_i) з початковою умовою

$$u_i(t,x) \,|_{t=t_0} = \varphi_i(x), \quad x > 0, \qquad (11_i)$$

де

$$\varphi_i(x) \equiv u_i(t_0, x), \quad x > 0. \qquad (12_i)$$

Тому спочатку розглянемо задачу (1), (2_i), (11_i) і зведемо її до задачі, для якої компоненти вектор-функції Гріна відомі. Для цього в задачі (1), (2_i), (11_i) здійснимо заміну, поставивши у відповідність змінній t змінну β за допомогою формули

$$\beta = A(t, t_0), \qquad (13)$$

так що $t = A^{-1}(\beta, t_0) \equiv \Phi(\beta)$. Змінній τ відповідатиме змінна γ згідно з формулою

$$\gamma = A(\tau, t_0). \qquad (14)$$

Зауважимо, що зміні t на $[t_0, T]$ відповідає зміна β на $[0, B]$, де $B \equiv A(T, t_0)$.

У результаті заміни (13) задача (1), (2_i), (11_i) перейде в задачу

$$\tilde{L}\tilde{u}_i(\beta,x) \equiv (\partial_\beta - \partial_x^2 - x\partial_x - 1)\tilde{u}_i(\beta,x) = \tilde{f}(\beta,x),$$

$$(\beta, x) \in \tilde{Q}, \qquad (15_i)$$

$$\tilde{u}_i(\beta,x) \,|_{\beta=0} = \varphi_i(x), \quad x > 0, \qquad (16_i)$$

$$B_i \tilde{u}_i(\beta,x) \,|_{x=0} = \tilde{g}_i(\beta), \quad \beta \in (0, B], \qquad (17_i)$$

а нерівності з (4), (5), (6_i), (7_i) для $t \in [t_0, T]$ – відповідно в нерівності

$$\forall\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R} \quad \forall\ \{\gamma,\beta\} \subset [0,B], \quad \gamma < \beta :$$

$$-c\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi) + \tilde{k}(\gamma,a)\xi^2 \le \tilde{k}(\beta,a)x^2, \quad (18)$$

$$\exists\ C_j > 0, \quad j = 1,2,3, \quad \forall\ \beta \in [0,B] :$$

$$\|\tilde{f}(\beta,\cdot)\|^{\tilde{k}(\beta,a)} \le C_1 \exp\{-B+\beta\}\tilde{\eta}(\beta), \quad (19)$$

$$|\tilde{g}_i(\beta)| \le C_2 \exp\{-i(B-\beta)\}, \qquad (20_i)$$

$$||\tilde{u}_i(\beta,\cdot)||^{\tilde{k}(\beta,a)} \le C_3 \exp\{-B+\beta\}\tilde{\varepsilon}(\beta), \quad (21_i)$$

де використані такі позначення:

$$\tilde{u}_i(\beta,x) \equiv u_i(\Phi(\beta),x),$$

$$\tilde{f}(\beta,x) \equiv f(\Phi(\beta),x), \quad \tilde{g}_i(\beta) \equiv g_i(\Phi(\beta)),$$

$$\tilde{Q} \equiv \{(\beta,x) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \beta \le B, x > 0\},$$

$$\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi) \equiv (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}(x - e^{-(\beta-\gamma)}\xi)^2,$$

$$\tilde{k}(\beta,a) \equiv cae^{-2(B-\beta)}(c + a(1 - e^{-2(B-\beta)}))^{-1},$$

$$\tilde{\eta}(\beta) \equiv \eta(\Phi(\beta)), \quad \tilde{\varepsilon}(\beta) \equiv \varepsilon(\Phi(\beta)).$$

Легко переконатися, що для функції $\tilde{k}$ справджується нерівність

$$\tilde{k}(\beta-\gamma, \tilde{k}(\gamma,a)) \le \tilde{k}(\beta,a), \quad 0 \le \gamma \le \beta \le B.$$

3. Доведемо, що за умов (19), (20_i) та (21_i) розв'язок задачі (15_i) – (17_i) зображується у вигляді

$$\tilde{u}_i(\beta,x) = \int\limits_0^\beta d\gamma \int\limits_0^\infty \tilde{G}_{i0}(\beta,x;\gamma,\xi)\tilde{f}(\gamma,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^\beta \tilde{G}_{i1}(\beta,x;\gamma)\tilde{g}_i(\gamma)d\gamma +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \tilde{G}_{i0}(\beta,x;0,\xi)\varphi_i(\xi)d\xi,$$

$$(\beta,x) \in \tilde{Q}, \qquad (22_i)$$

де, згідно з [2],

$$\tilde{G}_{i0}(\beta,x;\gamma,\xi) \equiv (2\pi(1 - e^{-2(\beta-\gamma)}))^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\} + (-1)^i \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,-\xi)\right\}\right), \qquad (23_i)$$

$$\tilde{G}_{i1}(\beta,x;\gamma) \equiv (-1)^{i+1}2^{1/2}(xe^{-(\beta-\gamma)})^{2-i} \times$$

$$\times (\pi^{1/2}(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{1+(-1)^{i+1}/2})^{-1} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,0)\right\}, \qquad (24_i)$$

$$0 \le \gamma < \beta \le B, \quad x > 0, \quad \xi > 0.$$

Оскільки доведення формули (22_i) для $i = 1$ та $i = 2$ аналогічні, то для визначеності розглянемо випадок $i = 1$.

Візьмемо функцію θ з простору $C^\infty([0,\infty))$ таку, що $\theta = 1$ на $[0, 1/2]$, $\theta = 0$ на $[3/4, \infty)$ і $\theta' < 0$, та фіксовану точку $(\beta,x) \in (0,B] \times (0, \bar{R}/4]$, де $\bar{R} > 0$. Скористаємось такою формулою Гріна-Остроградського:

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} d\gamma \int\limits_0^R (v\tilde{L}u - u\tilde{L}^*v)(\gamma,\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^R u(\beta_2,\xi)v(\beta_2,\xi)d\xi - \int\limits_0^R u(\beta_1,\xi)v(\beta_1,\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} (\xi(uv)(\gamma,\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=R} d\gamma -$$

$$- \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} (v\partial_\xi u - u\partial_\xi v)(\gamma,\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=R} d\gamma, \qquad (25)$$

де $\tilde{L}$ – диференціальний вираз з (15_i),

$$\tilde{L}^* \equiv -\partial_\gamma - \partial_\xi^2 + \xi\partial_\xi, \quad \beta_1 < \beta_2, \quad R > 0.$$

Формула (25) одержується, якщо проінтегрувати за змінною γ по $[\beta_1, \beta_2]$ і за змінною ξ по $[0, R]$ обидві частини тотожності

$$(v\tilde{L}u - u\tilde{L}^*v)(\gamma,\xi) = \partial_\gamma(uv)(\gamma,\xi) -$$

$$-\partial_\xi(\xi uv)(\gamma,\xi) - \partial_\xi(v\partial_\xi u - u\partial_\xi v)(\gamma,\xi).$$

У формулі (25) покладемо замість β_1, β_2, $v(\gamma,\xi)$ і $u(\gamma,\xi)$ відповідно ε, $\beta - h$,

$\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta(\frac{\xi}{R})$ і $\tilde{u}_1(\gamma,\xi)$, де $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\beta$, $0<h<\frac{1}{2}\beta$, $R\geq\bar{R}$, $\tilde{G}_{10}$ визначається формулою (23_1), а $\tilde{u}_1$ – взятий нами розв'язок задачі (15_1) – (17_1).

Оскільки

$$(\tilde{L}\tilde{u}_1)(\gamma,\xi)=\tilde{f}(\gamma,\xi),\quad (\gamma,\xi)\in\tilde{Q};$$

$$\tilde{u}_1(\gamma,\xi)\mid_{\xi=0}=\tilde{g}_1(\gamma),\quad \gamma\in(0,B];$$

$$\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\mid_{\xi=0}=0,\quad \gamma<\beta,\quad x>0,$$

то на підставі формули (25), властивостей функції θ та рівності

$$\partial_\xi\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\mid_{\xi=0}=-\tilde{G}_{11}(\beta,x;\gamma),$$

$$\gamma<\beta,\quad x>0,$$

яка випливає з явних виразів для $\tilde{G}_{10}$ та $\tilde{G}_{11}$, одержимо

$$\int\limits_0^R\tilde{G}_{10}(\beta,x;\beta-h,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\tilde{u}_1(\beta-h,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^R\tilde{G}_{10}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\tilde{u}_1(\varepsilon,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_\varepsilon^{\beta-h}\tilde{G}_{11}(\beta,x;\gamma)\tilde{g}_1(\gamma)d\gamma+$$

$$+\int\limits_\varepsilon^{\beta-h}d\gamma\int\limits_0^R\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\tilde{f}(\gamma,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_\varepsilon^{\beta-h}d\gamma\int\limits_0^R\tilde{L}^*\left(\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\times$$

$$\times\tilde{u}_1(\gamma,\xi)d\xi.$$

Після переходу в цій рівності до границі при $h\to0$ і використання властивості однорідної функції Гріна прийдемо до рівності

$$\tilde{u}_1(\beta,x)=$$

$$=\int\limits_\varepsilon^\beta d\gamma\int\limits_0^R\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\tilde{f}(\gamma,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_\varepsilon^\beta\tilde{G}_{11}(\beta,x;\gamma)\tilde{g}_1(\gamma)d\gamma+$$

$$+\int\limits_0^R\tilde{G}_{10}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)u_1(\varepsilon,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_\varepsilon^\beta d\gamma\int\limits_0^R\tilde{L}^*\left(\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\times$$

$$\times\tilde{u}_1(\gamma,\xi)d\xi\equiv I_1^{(R)}+I_2+I_3^{(R)}+I_4^{(R)}.\quad(26)$$

Перейдемо в (26) до границі при $R\to\infty$. Візьмемо

$$I_1\equiv\int\limits_\varepsilon^\beta d\gamma\int\limits_0^\infty\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\tilde{f}(\gamma,\xi)d\xi$$

і оцінимо різницю

$$\mid I_1-I_1^{(R)}\mid=\left|\int\limits_\varepsilon^\beta d\gamma\int\limits_R^\infty\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\tilde{f}(\gamma,\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)d\xi\right|,$$

використовуючи оцінку

$$\mid\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\mid\leq2^{1/2}(\pi(1-e^{-2(\beta-\gamma)}))^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\},\quad(27)$$

яка випливає з явного виразу для $\tilde{G}_{10}$ і того, що для $x>0$ і $\xi>0$

$$(x+e^{-(\beta-\gamma)}\xi)^2\geq(x-e^{-(\beta-\gamma)}\xi)^2.$$

За допомогою нерівностей (18), (19) і (27) маємо

$$\left|I_1-I_1^{(R)}\right|\leq\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon}^{\beta} d\gamma \int\limits_{0}^{\infty} \exp\{-c\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)+\tilde{k}(\gamma,a)\xi^2\}\times$$

$$\times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}(\mid \tilde{f}(\gamma,\xi)\mid \times$$

$$\times \exp\{-\tilde{k}(\gamma,a)\xi^2\})(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2}d\xi \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} C_1\exp\{k(\beta,a)x^2\}\times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon}^{\beta} \exp\{-B+\gamma\}\tilde{\eta}(\gamma)d\gamma \int\limits_{R/2}^{\infty}(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2}\times$$

$$\times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}d\xi \to 0,$$

$$R\to\infty,$$

бо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}\times$$

$$\times(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2}d\xi = \left(\frac{1}{2}-c\right)^{-1/2}\sqrt{\pi}e^{\beta-\gamma}. \tag{28}$$

Аналогічно з використанням нерівностей (18), (21_1) і (27) доводиться, що

$$I_3^{(R)} \to \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{G}_{10}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\tilde{u}_1(\varepsilon,\xi)d\xi,\ \ R\to\infty.$$

Тепер доведемо, що $I_4^{(R)} \to 0,\ \ R\to\infty$. Для цього зауважимо, що

$$\tilde{L}^*\left(\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right) =$$

$$= (\tilde{L}^*\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi))\theta\left(\frac{\xi}{R}\right) -$$

$$-\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\partial_\xi^2\theta\left(\frac{\xi}{R}\right) -$$

$$-2\partial_\xi\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\partial_\xi\theta\left(\frac{\xi}{R}\right) +$$

$$+\xi\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\partial_\xi\theta\left(\frac{\xi}{R}\right).$$

За допомогою формули (23_1) легко перевірити правильність рівності $\tilde{L}^*\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi) = 0$. Врахувавши це і властивості функції θ, дістанемо, що $\tilde{L}^*(\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta(\frac{\xi}{R})) = 0$ для $\xi\in[0,\frac{1}{2}R]\cup[\frac{3}{4}R,\infty)$. Використовуючи нерівності

$$\left|\partial_\xi\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right| \le \frac{C}{R},\ \left|\partial_\xi^2\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right| \le \frac{C}{R^2},$$

$$\left|\xi\partial_\xi\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right| \le \frac{C}{R}\xi,$$

оцінку (27) та оцінку

$$\mid \partial_\xi\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\mid =$$

$$= \big|(2\pi(1-e^{-2(\beta-\gamma)}))^{-1/2}e^{-(\beta-\gamma)}\times$$

$$\times(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}\times\right.$$

$$\times(x-e^{-(\beta-\gamma)}\xi)+\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,-\xi)\right\}\times$$

$$\left.\times(x+e^{-(\beta-\gamma)}\xi)\right)\Big| \le C(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\},$$

при $R\ge 1$ маємо

$$\left|\tilde{L}^*\left(\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\right| \le$$

$$\le C(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}. \tag{29}$$

За допомогою (18), (21_1), (28), (29) і нерівності

$$\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi) \ge (1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}(\xi-e^{\beta-\gamma}x)^2\times$$

$$\times e^{-2(\beta-\gamma)} \ge (1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}\left(\frac{1}{2}R-e^B\frac{\bar{R}}{4}\right)^2\times$$

$$\times e^{-2B} \ge \frac{1}{16}e^{-2B}(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}R^2,$$

$$x\in\left(0,\frac{\bar{R}}{4}\right],\ \ \xi\in\left[\frac{R}{2},\infty\right),$$

$$0\le\gamma<\beta\le B,\ 0<\bar{R}\le e^{-B}R,$$

маємо

$$\left|\int\limits_{R/2}^{3R/4} \tilde{L}^* \left(\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\tilde{u}_1(\gamma,\xi)d\xi\right| \leq$$

$$\leq C(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}\int\limits_{R/2}^{3R/4}\exp\{-c\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)+$$

$$+\tilde{k}(\gamma,a)\xi^2\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}\times$$

$$\times(|\tilde{u}_1(\gamma,\xi)|\exp\{-\tilde{k}(\gamma,a)\})d\xi \leq$$

$$\leq C||\tilde{u}_1(\gamma,\cdot)||^{\tilde{k}(\gamma,a)}\exp\left\{-\frac{1}{64}\left(\frac{1}{2}-c\right)\times\right.$$

$$\times e^{-2B}(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}R^2+$$

$$\left.+\tilde{k}(\beta,a)x^2\right\}(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\gamma,\xi)\right\}\times$$

$$\times(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2}d\xi \leq$$

$$\leq C\exp\{\tilde{k}(\beta,a)x^2-\delta(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}R^2\}\times$$

$$\times(1-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2}\leq\frac{C}{R}\exp\{\tilde{k}(\beta,a)x^2-\delta_0(1-$$

$$-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}R^2\}\leq C\exp\{\tilde{k}(\beta,a)x^2-\delta_0(1-$$

$$-e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1}R^2\},\ 0\leq\gamma<\beta\leq B,\ R\geq 1,$$

де $0<\delta_0<\delta\equiv\frac{1}{64}\left(\frac{1}{2}-c\right)$. Звідси випливає, що

$$\left|I_4^{(R)}\right|\leq C\exp\{\tilde{k}(\beta,a)x^2-$$

$$-\delta_0(1-e^{-2(\beta-\varepsilon)})^{-1}R^2\}\to 0,\quad R\to\infty.$$

Отже, після переходу в (26) до границі при $R\to\infty$ одержимо

$$\tilde{u}_1(\beta,x)=\int\limits_{\varepsilon}^{\beta}d\gamma\int\limits_0^{\infty}\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\tilde{f}(\gamma,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\varepsilon}^{\beta}\tilde{G}_{11}(\beta,x;\gamma)\tilde{g}_1(\gamma)d\gamma+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\tilde{G}_{10}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\tilde{u}_1(\varepsilon,\xi)d\xi. \qquad (30)$$

Тепер у рівності (30) перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. На підставі формул (23_1) *і* (24_1) та умов (19) і (20_1) легко переконатись, що границями перших двох доданків з (30) є відповідні доданки з формули (22_1). Доведемо, що при $\varepsilon\to 0$ третій доданок з (30) прямує до третього доданка з (22_1). Для цього відзначимо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\tilde{G}_{10}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\tilde{u}_1(\varepsilon,\xi))=$$

$$=\tilde{G}_{10}(\beta,x;0,\xi)\varphi_1(\xi),\ \xi>0,$$

і правильна нерівність

$$|\ \tilde{G}_{10}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\tilde{u}_1(\varepsilon,\xi)\ |\leq C(1-e^{-2(\beta-\varepsilon)})^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)\tilde{\rho}(\beta,x;\varepsilon,\xi)\right\}\times$$

$$\times\exp\{-c\tilde{\rho}(\beta,x;\varepsilon,\xi)+\tilde{k}(\varepsilon,a)\xi^2\}\times$$

$$\times(|\ \tilde{u}_1(\varepsilon,\xi)\ |\ \exp\{-\tilde{k}(\varepsilon,a)\xi^2\})\leq$$

$$\leq C(1-e^{-2(\beta-\varepsilon)})^{-1}\times$$

$$\times\exp\{-B+\beta\}\tilde{\varepsilon}(\beta)\exp\{\tilde{k}(\beta,a)x^2\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-c\right)\times\right.$$

$$\left.\times(e^{-2\beta}\xi^2-2x^2)(1-e^{-2\beta})^{-1}\right\}\leq$$

$$\leq C\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-c\right)\times\right.$$

$$\left.\times(e^{-2\beta}\xi^2-2x^2)(1-e^{-2\beta})^{-1}\right\}\times$$

$$\times (1-e^{-2\beta})^{-1/2} \exp\{\tilde{k}(\beta,a)x^2\},$$

яка одержана на підставі (18), (21_1), (27) і того, що

$$(x-e^{-(\beta-\varepsilon)}\xi)^2 \geq \frac{1}{2}e^{-2(\beta-\varepsilon)}\xi^2-x^2 \geq \frac{1}{2}e^{-2\beta}\xi^2-x^2.$$

Згідно з теоремою Лебега про обмежену збіжність, у третьому доданку з (30) можна переходити до границі під знаком інтеграла.

Таким чином, зображення (22_1) одержано.

Враховуючи те, що для задачі Неймана

$$\tilde{G}_{10}(\beta,x;\gamma,\xi)\mid_{\xi=0}= -\tilde{G}_{11}(\beta,x;\gamma),$$

$$\gamma<\beta, \quad x>0,$$

аналогічними міркуваннями доводиться правильність зображення (22_2).

4. Повернемось до задач (1), (2_i), (11_i), $i=1,2$, враховуючи те, що $u_i(t,x)=\tilde{u}_i(\beta,x)\mid_{\beta=A(t,t_0)}$.

З рівностей (22_i), $i=1,2$, беручи до уваги (13) і (14), одержуємо таке зображення для розв'язків u_i задач (1), (2_i), (11_i) :

$$u_i(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{0}^{\infty}G_{i0}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}G_{i1}(t,x;\tau)g_i(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}G_{i0}(t,x;t_0,\xi)\varphi_i(\xi)d\xi, (t,x)\in Q_{t_0}, i=1,2, \tag{31_i}$$

де $G_{i0}(t,x;\tau,\xi)\equiv \tilde{G}_{i0}(A(t,t_0),x;A(\tau,t_0),\xi)$,

$$G_{i1}(t,x;\tau)\equiv \tilde{G}_{i1}(A(t,t_0),x;A(\tau,t_0)). \tag{32_i}$$

З (23_i), (24_i) і (32_i) випливають формули (9_i) і (10_i).

5. Перейдемо до останнього пункту доведення теореми. Формула (31_i) з урахуванням (12_i) дає зображення розв'язку задачі (1), (2_i) в Q_{t_0}. Перейшовши в (31_i) до границі при $t_0\to-\infty$, одержимо зображення (8_i). Умови теореми при цьому гарантують існування границь відповідних інтегралів з (31_i). Переконаємось у цьому, наприклад, для випадку $i=1$.

Запровадимо такі позначення:

$$I_{t_0}\equiv\int\limits_{t_0}^{t}G_{11}(t,x;\tau)g_1(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

$$J_{t_0}\equiv\int\limits_{0}^{\infty}G_{10}(t,x;t_0,\xi)u_1(t_0,\xi)d\xi,$$

$$H_{t_0}\equiv\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{0}^{\infty}G_{10}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi.$$

Доведемо, що при $t_0\to-\infty$ $I_{t_0}\to I_{-\infty}$, де

$$I_{-\infty}\equiv\int\limits_{-\infty}^{t}G_{11}(t,x;\tau)g_1(\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}.$$

На підставі (6_1) і (10_1) маємо

$$\mid I_{-\infty}-I_{t_0}\mid\leq Ce^{-A(T,t)}\int\limits_{-\infty}^{t_0}xe^{-2A(t,\tau)}\times$$
$$\times(1-e^{-2A(t,\tau)})^{-3/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\rho(t,x;\tau,0)\right\}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}.$$

Здійснимо заміну змінної інтегрування τ за допомогою формули $z=\rho^{1/2}(t,x;\tau,0)$ і візьмемо

$$c(x,t_0)\equiv x(1-e^{-2A(t,t_0)})^{-1/2}. \tag{33}$$

Тоді

$$\mid I_{-\infty}-I_{t_0}\mid\leq$$
$$\leq 2\pi^{-1/2}C_1\int\limits_{c(x,-\infty)}^{c(x,t_0)}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\to 0,\ t_0\to-\infty.$$

Отже, $I_{t_0}\to I_{-\infty}$, якщо $t_0\to-\infty$ і виконується умова (6_1).

Розглянемо інтеграл J_{t_0}. Використовуючи формулу (9_1), умову (7_1) та нерівність (4), одержуємо

$$\mid J_{t_0}\mid\leq C\varepsilon(t_0)\exp\{k(t,a)x^2\}\times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-A(T,t_0)}(1-e^{-2A(t,t_0)})^{-1/2}\times$$

$$\times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)\rho(t,x;t_0,\xi)\right\}d\xi.$$

Зробимо заміну змінної інтегрування ξ за допомогою формули

$$z=(1-e^{-2A(t,t_0)})^{-1/2}(x-e^{-A(t,t_0)}\xi). \quad (34)$$

Враховуючи (33), маємо

$$| J_{t_0} |\le C\varepsilon(t_0)\exp\{k(t,a)x^2-A(T,t)\}\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{c(x,t_0)} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)z^2\right\}dz \to 0, t_0\to-\infty,$$

бо $\varepsilon(t_0)\to 0$ при $t_0\to-\infty$, а $\int\limits_{-\infty}^{c(x,t_0)}\exp\{-(\frac{1}{2}-$ $-c)z^2\}dz<\infty$. Отже, $J_{t_0}\to 0$ при $t_0\to-\infty$, якщо виконується умова (7_1).

Розглянемо, нарешті, інтеграл H_{t_0} і доведемо, що при $t_0\to-\infty$ $H_{t_0}\to H_{-\infty}$, де $H_{-\infty}\equiv\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_0^\infty G_{10}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi$. За допомогою формули (9_1), нерівностей (4) і (5) маємо

$$| H_{-\infty}-H_{t_0} |\le C\exp\{k(t,a)x^2\}\int\limits_{-\infty}^{t_0}\frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty(1-e^{-2A(t,\tau)})^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-A(T,\tau)-\left(\frac{1}{2}-c\right)\rho(t,x;\tau,\xi)\right\}d\xi.$$

Якщо здійснити заміну змінної інтегрування ξ за формулою, яка відрізняється від (34) лише заміною t_0 на τ, то одержимо

$$| H_{-\infty}-H_{t_0} |\le$$

$$\le C\exp\{k(t,a)x^2-A(T,t)\}\int\limits_{-\infty}^{t_0}\frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{c(x,\tau)}\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-c\right)z^2\right\}dz\le$$

$$\le C\exp\{k(t,a)x^2-A(T,t)\}\int\limits_{-\infty}^{t_0}\frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\to 0,$$

$t_0\to-\infty$, бо за умовою інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{T}\frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau$ збігається. Отже, $H_{t_0}\to H_{-\infty}$ при $t_0\to-\infty$.

Зауваження. *Умови доведеної теореми є істотними для правильності твердження цієї теореми. Про це частково свідчить приклад, наведений в [3].*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения.— М.: Наука, 1969.— 511с.

2. *Березан Л.П., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Вектор-функції Гріна деяких параболічних крайових задач для рівнянь другого порядку.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1996.— 34с.— Деп. в ДНТБ України 08.04.96, N904—Ук96.

3. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Крайова задача Діріхле без початкової умови для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна з виродженням // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1997.— С.21—29.